

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Д.А. ПОЖАРСКИЙ, А.А. МОЛЧАНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И КЛИНА

Получены асимптотические решения двух новых задач теории упругости со смешанными граничными условиями. Первая задача – о трещине сдвига в полосе при разных вариантах граничных условий на внешних гранях полосы. Вторая – контактная задача для трехмерного клина при действии сосредоточенной силы вне области контакта на ребре клина и скользящей заделке другой грани.

Ключевые слова: теория упругости, смешанные граничные условия, асимптотики.

Введение. Актуальность задач механики разрушения [1] не вызывает сомнений. Однако до сих пор были исследованы только задачи о трещине нормального отрыва в упругой полосе [2]. В настоящей работе строится асимптотическое решение задачи о трещине продольного сдвига в полосе. Задачи о трещинах тесно связаны с контактными задачами (в обоих типах задач возникают смешанные граничные условия) [3–5]. Реальная поверхность часто имеет микронеровности, поэтому контакт может происходить одновременно на нескольких участках. Для изучения дискретного контакта (взаимодействия нескольких штампов) важно заранее получить решение задачи о действии дополнительной сосредоточенной силы вне области контакта упругого клина [4, 5].

1. Трещина сдвига в полосе. Постановка задачи. В декартовых координатах x, y рассмотрим упругую полосу $\{x \in (-\infty, \infty); y \in [0, 2h]\}$ толщины $2h$. Предполагаем, что в рамках линейной теории упругости материал полосы характеризуется двумя параметрами упругости: G – модуль сдвига и ν – коэффициент Пуассона). Пусть обе грани полосы $y = 0, y = 2h$ жестко заделаны (вариант А), находятся в условиях скользящей заделки (вариант Б) или свободны от напряжений (вариант В). В середине полосы при $y = h$ имеется трещина продольного сдвига (разрез), занимающая область $x \in (-a, a)$, нагруженная по обоим берегам заданной касательной нагрузкой $\tau(x)$. Полагаем, что нормальное напряжение $\sigma_y = 0$ при $x \in (-\infty, \infty), y = h$ [1]. Требуется определить скачок касательного перемещения в области трещины $u(x) = \pm u_x(x, h \pm 0)$. Затем может быть определен коэффициент интенсивности касательного напряжения в кончике трещины, ответственный (согласно критерию разрушения) за ее дальнейшее распространение.

Асимптотическое решение. В силу одинаковости напряженно-деформированного состояния достаточно рассматривать лишь половину полосы $0 \leq y \leq h$. Для вывода интегрального уравнения относительно функции $u(x)$ рассмотрим вспомогательные краевые задачи с граничными условиями вида

$$y = 0: \quad \text{А) } u_x = 0, \quad u_y = 0; \quad (1)$$

$$y = 0: \quad \text{Б) } \tau_{xy} = 0, \quad u_y = 0; \quad (2)$$

$$y = 0: \quad \text{В) } \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0; \quad (3)$$

$$y = h: \quad \sigma_y = 0; \quad u_x = -u(x). \quad (4)$$

Здесь $u(x)$ – временно известная функция, равная нулю при $x \notin (-a, a)$. Для решения краевых задач (1)–(4) воспользуемся общим решением дифференциальных уравнений равновесия Ламе плоской задачи теории упругости в форме Папковича–Нейбера и преобразованием Фурье. Затем для получения интегрального уравнения в области трещины используем граничное условие (с заданной правой частью)

$$\tau_{xy}(x, h) = -\tau(x), \quad (5)$$

при помощи которого относительно функции $u(x)$ выводим интегральное уравнение (для простоты ограничимся случаем $\tau(x) = \tau = \text{const}$):

$$\theta \int_{-a}^a u(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi = \pi h^2 \tau \quad (|x| \leq a); \quad (6)$$

$$k(s) = \int_0^\infty t L(t) \cos ts \, dt, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu}; \quad (7)$$

где для варианта А

$$L(t) = \frac{\kappa \operatorname{ch} 2t + 2t^2 + 0,5(1 + \kappa^2)}{\kappa \operatorname{sh} 2t + 2t}; \quad (8)$$

а для вариантов Б и В соответственно

$$L(t) = \frac{\operatorname{sh} 2t + 2t}{\operatorname{ch} 2t + 1}; \quad L(t) = \frac{2(\operatorname{sh}^2 t - t^2)}{\operatorname{sh} 2t - 2t}. \quad (9)$$

Решение уравнения (6) подчиним условиям

$$u(\pm a) = 0. \quad (10)$$

Отметим сходство уравнения (6) с уравнением (8.2) [2] для задачи о трещине нормально-го отрыва в полосе. Это позволяет применить для решения уравнения (6) регулярный асимптотический метод эффективный для относительно толстой полосы [2]. Интегрируя по частям в (6) при учете (10) и вводя безразмерные величины

$$x^* = \frac{x}{a}; \quad \mu = \frac{h}{a}; \quad f(x^*) = \frac{d}{dx} u(x); \quad \tau^* = \frac{\tau}{\theta}; \quad (11)$$

получим уравнение (звездочки далее опускаем)

$$\int_{-1}^1 f(\xi) k_0\left(\frac{\xi-x}{\mu}\right) d\xi = -\pi \mu \tau \quad (|x| \leq 1); \quad (12)$$

$$k_0(s) = \int_0^\infty L(t) \sin ts \, dt. \quad (13)$$

Выделим из ядра (12) главную часть в форме

$$k_0(s) = \frac{1}{s} + H(s); \quad H(s) = \int_0^\infty [L(t) - 1] \sin ts \, dt. \quad (14)$$

Гладкая часть ядра $H(s)$ при $|s| < 2$ разложима в абсолютно сходящийся ряд

$$H(s) = \sum_{n=0}^\infty e_n s^{2n+1}; \quad (15)$$

$$e_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty [L(t) - 1] t^{2n+1} \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Несколько первых значений постоянных (16) для вариантов А, Б и В даны в табл.1 (при $\nu = 0,3$).

Таблица 1

Значения постоянных (16)

Задача	e_0	e_1	e_2	e_3
А	0,9429	-0,5435	0,2930	-0,1301
Б	0,4112	-0,3551	0,1540	-0,05448
В	-1,3337	0,9667	-0,5153	0,2286

Регулярное асимптотическое решение уравнения (12) имеет вид [2]

$$f(x) = -\frac{\tau x}{\sqrt{1-x^2}} \Phi(x, \mu); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, \mu) = & 1 - \frac{e_0}{2\mu^2} + \left(\frac{e_0^2}{4} + \frac{3e_1}{8} - \frac{3e_1}{2}x^2 \right) \frac{1}{\mu^4} + \\ & + \left[-\frac{e_0^3}{8} + \frac{3e_0e_1}{16} + \frac{15e_2}{8} + \left(\frac{3e_0e_1}{4} - \frac{5e_2}{2} \right)x^2 - \frac{5e_2}{2}x^4 \right] \frac{1}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17), (18) найдем отнесенное к a касательное раскрытие трещины:

$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{a} = & \int_{-1}^x f(x) dx = \tau \sqrt{1-x^2} \left\{ 1 - \frac{e_0}{2\mu^2} + \left(\frac{e_0^2}{4} - \frac{5e_1}{8} - \frac{e_1}{2}x^2 \right) \frac{1}{\mu^4} + \right. \\ & + \left. \left[-\frac{e_0^3}{8} + \frac{11e_0e_1}{16} - \frac{65e_2}{72} + \left(\frac{e_0e_1}{4} - \frac{25e_2}{18} \right)x^2 - \frac{5e_2}{12}x^4 \right] \frac{1}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Размерный коэффициент интенсивности касательных напряжений (КИН) в кончике трещины, отвечающий за дальнейшее распространение трещины, имеет вид (величина x – размерная)

$$K_{II} = - \lim_{x \rightarrow a-0} \theta \sqrt{2\pi(a-x)} \frac{d}{dx} u(x). \quad (20)$$

Безразмерный КИН на основании (19), (20) имеет вид (величина τ – размерная)

$$\frac{K_{II}}{\tau \sqrt{a\pi}} = 1 - \frac{e_0}{2\mu^2} + \left(\frac{e_0^2}{4} - \frac{9e_1}{8} \right) \frac{1}{\mu^4} + \left[-\frac{e_0^3}{8} + \frac{15e_0e_1}{16} - \frac{25e_2}{8} \right] \frac{1}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right). \quad (21)$$

Отсюда, используя табл.1, получим для варианта:

$$- \text{А} \quad \frac{K_{II}}{\tau \sqrt{a\pi}} = 1 - \frac{0,4715}{\mu^2} + \frac{0,8337}{\mu^4} - \frac{1,5009}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right); \quad (22)$$

$$- \text{Б} \quad \frac{K_{II}}{\tau \sqrt{a\pi}} = 1 - \frac{0,2056}{\mu^2} + \frac{0,4418}{\mu^4} - \frac{0,6269}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right); \quad (23)$$

$$- \text{В} \quad \frac{K_{II}}{\tau \sqrt{a\pi}} = 1 + \frac{0,6669}{\mu^2} - \frac{0,6428}{\mu^4} + \frac{0,6982}{\mu^6} + O\left(\frac{1}{\mu^8}\right). \quad (24)$$

Формулы (22)–(24) рекомендуется использовать при $\mu \geq 2$. При малых значениях μ можно использовать сингулярный асимптотический метод [2].

2. Контактная задача для клина. Постановка задачи. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим трехмерный упругий клин $\{r \in [0, \infty], \varphi \in [0, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}$ угла раствора α , ось z направлена по ребру клина. Материал клина характеризуется модулем сдвига и коэффициентом Пуассона. Грань $\varphi = 0$ находится в условиях скользящей заделки. В грань $\varphi = \alpha$ без перекоса вдавлируется эллиптический в плане штамп с плоским основанием, к которому приложена сила P . Область контакта – эллипс $\Omega = \{(r-a)^2/c^2 + z/b^2\}$, $b \geq c$, $a > c$. В начале координат $r = z = 0$ к грани $\varphi = \alpha$ приложена нормальная сосредоточенная сила Q . Для простоты считаем задачу симметричной по координате z . Осадка штампа равна δ . При заданных величинах α, G, ν, a, b, c и δ требуется определить контактное давление под штампом $\sigma_\varphi = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$ и затем найти силу P .

Асимптотическое решение. Сила Q вызывает в заданной области контакта Ω дополнительное нормальное перемещение [3]

$$u_\varphi(r, \alpha, z) = -\frac{QA_0(r, z)}{2\pi\theta\sqrt{r^2 + z^2}}; \quad \theta = \frac{G}{1-\nu}; \quad (25)$$

$$A_0(r, z) = A + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\pi u}{2} W(u) F(u) \cos \left(u \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} + |z|}{r} \right) du; \quad (26)$$

$$A = \pi \frac{1 - \cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad W(u) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha}. \quad (27)$$

Функция $F(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода ($0 \leq u < \infty$)

$$F(u) - (1 - 2\nu) \int_0^\infty L(u, y) F(y) dy = \pi/2 (1 - 2\nu) L(u, 0); \quad (28)$$

$$L(u, y) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2} W(y) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g(t) dt}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi y)}; \quad (29)$$

$$L(u, 0) = A \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\pi t/2) g(t) dt}{\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u}, \quad g(t) = \frac{\operatorname{cth} \alpha t \sin^2 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha t - \cos 4\alpha}. \quad (30)$$

В частном случае $\alpha = \pi/2$ на основании формул (25) – (30) получим

$$u_\varphi(r, \pi/2, z) = -\frac{Q}{\pi \theta \sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (31)$$

что соответствует двум одинаковым силам на упругом полупространстве [3].

Используя (25) и известную функцию Грина для трехмерного клина [3], получим относительно $q(r, z)$ следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\theta} \int_\Omega q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = 2\pi \left(\delta - \frac{Q A_0(r, z)}{2\pi \theta \sqrt{r^2 + z^2}} \right); \quad (r, z) \in \Omega; \quad (32)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} + F(x, y, r, z); \quad R = [(r - x)^2 + (z - y)^2]^{1/2}; \quad (33)$$

$$F(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \operatorname{sh} \pi u (W(u) - \operatorname{cth} \pi u) K_{iu}(\beta x) + \\ + 2 \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W(u) F(u, \beta x) \} K_{iy}(\beta r) \cos \beta(z - y) d\beta du. \quad (34)$$

Здесь $K_{iu}(r)$ – функция Бесселя, а функция $F(u, \beta x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода ($0 \leq u < \infty$)

$$F(u, \beta x) = (1 - 2\nu) \int_0^\infty L(u, y) [F(y, \beta x) + \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} K_{iy}(\beta x)] dy. \quad (35)$$

Отметим, что перемещение (25) получается из ядра интегрального уравнения (32) при $x \rightarrow 0, y = 0$ (с точностью до множителя). При $\alpha = \pi/2$ ядро интегрального уравнения (32) совпадает с ядром интегрального уравнения симметричной контактной задачи о двух штампах на полупространстве.

Для получения асимптотического решения введем безразмерные величины (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r - a}{b}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad R' = \frac{R}{b}, \quad \beta' = \beta b; \quad (36)$$

$$q'(r', z') = q(r, z) / \theta, \quad Q' = Q / (2\pi \theta b^2), \quad P' = P / (\theta b^2), \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega. \quad (37)$$

Уравнение (32) в обозначениях (36), (37) принимает вид $((r, z) \in \Omega)$

$$\int_{\Omega} q(x, y) \left[\frac{1}{R} + F(x + \lambda, y, r + \lambda, z) \right] dx dy = 2\pi \left(\delta - \frac{QA_0(r + \lambda, z)}{\sqrt{(r + \lambda)^2 + z^2}} \right). \quad (38)$$

Для решения интегрального уравнения (38) применим регулярный асимптотический метод [3], эффективный при больших значениях параметра λ , т.е. вдали от ребра клина.

С использованием известных интегралов разложим гладкую часть ядра уравнения (38) в ряд по отрицательным степеням λ . Имеем $(\lambda \rightarrow \infty)$

$$F(x + \lambda, y, r + \lambda, z) = \frac{A_1}{\lambda} + \frac{A_2(x + r)}{\lambda^2} + \frac{A_3(x^2 + r^2) + A_4(y - z)^2 + A_5xr}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right); \quad (39)$$

$$A_1 = a_0 + \kappa_0, \quad A_2 = -\frac{A_1}{2}, \quad A_3 = \frac{3}{8}a_0 + \frac{a_1 + \kappa_0}{2} - \kappa_1, \quad (40)$$

$$A_4 = \frac{a_1}{2} - \kappa_2, \quad A_5 = \frac{a_0}{4} - a_1 + 2\kappa_1, \quad (41)$$

где $(n = 0, 1, m = 0, 1, 2)$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_0^\infty [\operatorname{th} \pi u W(u) - 1] (0,25 + u^2)^n du; \quad (42)$$

$$\kappa_m = 2 \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W(u) F_m(u) du. \quad (43)$$

Значения функций $F_m(u_k)$, где u_k – узел квадратурной формулы Гаусса, определяются как значения при $u = u_k$ функций, удовлетворяющих интегральным уравнениям Фредгольма второго рода $(0 \leq u \leq \infty)$

$$F_m(u) = (1 - 2v) \int_0^\infty L(u, y) \left[F_m(y) + \frac{\operatorname{ch}(\pi y / 2) L_m(u_k, y)}{8(\operatorname{ch} \pi u + \operatorname{ch} \pi y)} \right] dy; \quad (44)$$

$$L_0(u, y) = 16, \quad L_2(u, y) = (1 + (u + y)^2)(1 + (u - y)^2); \quad (45)$$

$$L_1(u, y) = (3 - (u + y)^2)(1 + (u - y)^2) + (3 - (u - y)^2)(1 + (u + y)^2). \quad (46)$$

Аналогично разложим функцию в правой части уравнения (32). С учетом того, что $(\lambda \rightarrow \infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{(r + \lambda)^2 + z^2}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{r}{\lambda^2} + \frac{2r^2 - z^2}{2\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right); \quad (47)$$

$$\cos \left(u \ln \frac{\sqrt{(r + \lambda)^2 + z^2} + |z|}{r + \lambda} \right) = 1 - \frac{u^2 z^2}{2\lambda^2} \left(1 - \frac{2r}{\lambda} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right); \quad (48)$$

получим разложение $(\lambda \rightarrow \infty)$:

$$\frac{A_0(r + \lambda, z)}{\sqrt{(r + \lambda)^2 + z^2}} = \frac{B_1}{\lambda} + \frac{B_2 r}{\lambda^2} + \frac{B_3 r^2 + B_4 z^2}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right); \quad (49)$$

$$B_1 = -B_2 = B_3 = A + b_0, \quad B_4 = -\frac{A + b_0 + b_1}{2}; \quad (50)$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} W(u) F(u) u^{2n} du \quad (n = 0, 1). \quad (51)$$

Здесь постоянная A определяется формулой (27), а функция $F(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма (28).

Разложения (39) и (49), если их продолжить, равномерно сходятся в области $(x,y),(r,z) \in \Omega$ при $\lambda > \max(\alpha^{-1}, 1+\varepsilon)$.

В табл.2 приводятся значения независимых коэффициентов, входящих в разложения (39) и (49), рассчитанные при $\nu = 0,3$ и $\alpha = \pi k/6$.

Таблица 2

Значения независимых постоянных (40), (41), (50)

k	2	3	4	5	6	7	8
$-A_1$	-0,2867	-0,5000	-0,2701	0,1732	0,3183	0,2467	0,1502
$-A_3$	-0,1400	-0,1250	-0,06667	0,05354	0,09284	0,07298	0,04440
A_4	-0,007466	-0,06250	-0,04353	0,007344	0,02653	0,01766	0,01036
$-A_5$	-0,006701	-0,2500	-0,1367	0,06615	0,1326	0,1008	0,06138
B_1	1,843	2,000	1,494	0,3694	0	0,1944	0,5160
$-B_4$	1,096	1,000	0,7944	0,1925	0	0,09939	0,2625

При учете (39) и (49) асимптотическое решение уравнения (32) при больших значениях λ ищем в виде

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^3 \frac{q_n(x, y)}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (52)$$

Приходим к цепочке интегральных уравнений с ядром R^{-1} для последовательного определения функций из разложения (52). Каждое из уравнений этой цепочки решается в явном виде. В результате получим

$$q_0(x, y) = \frac{\delta}{\varepsilon K s(x, y)}, \quad q_1(x, y) = \frac{-Q_1}{\varepsilon K s(x, y)}, \quad s(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} - y^2}; \quad (53)$$

$$Q_m = QB_m + \frac{\delta A_m}{K} \quad (m=1,2,3,4), \quad q_2(x, y) = \frac{1}{\varepsilon s(x, y)} \left(\frac{A_1 Q_1}{K^2} - \frac{Q_2 e^2 x}{E - \varepsilon^2 K} \right);$$

$$q_3(x, y) = \frac{1}{\varepsilon s(x, y)} \left\{ \frac{1}{K} \left[-\frac{A_1^2 Q_1}{K^2} - \frac{\delta(A_3 \varepsilon^2 + A_4)}{3K} + \frac{2}{\psi} (Q_4 \psi_1 + Q_3 \varepsilon^2 \psi_2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{A_2 Q_1 e^2 x}{K(E - \varepsilon^2 K)} + \frac{4x^2}{\psi} (Q_4 \psi_{01} - Q_3 \psi_{00}) + \frac{4y^2}{\psi} (Q_3 \varepsilon^2 \psi_{10} - Q_4 \psi_{11}) \right\}, \quad e = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad (54)$$

где $K = K(e)$, $E = E(e)$ – полные эллиптические интегралы;

$$\psi = -(1 - e^2)K^2 + 2(2 - e^2)KE - 3E^2; \quad (55)$$

$$\psi_1 = (1 - e^2)(1,5 - e^2)K^2 - 2(1 - e^2)KE + 0,5E^2; \quad (56)$$

$$\psi_2 = (1,5 - 0,5e^2)K^2 - 2KE + 0,5E^2, \quad \psi_{00} = K - (1 + 0,5e^2)E; \quad (57)$$

$$\psi_{01} = \psi_{10} = E - (1 - 0,5e^2)K, \quad \psi_{11} = (1 - e^2)^2 K - (1 - 1,5e^2)E. \quad (58)$$

Для вдавливающей штамп силы получим выражение

$$P = \int_{\Omega} q(x, y) dx dy = 2\pi \sum_{n=0}^3 \frac{P_n}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \quad (\lambda \rightarrow \infty); \quad (59)$$

$$P_0(x, y) = \frac{\delta}{K}, \quad P_1 = -\frac{Q_1}{K}, \quad P_2 = \frac{A_1 Q_1}{K^2}; \quad (60)$$

$$P_3 = \frac{1}{K} \left\{ -\frac{A_1^2 Q_1}{K^2} - \frac{\delta(A_3 \varepsilon^2 + A_4)}{3K} + \frac{2}{\psi} (Q_4 \psi_1 + Q_3 \varepsilon^2 \psi_2) \right\} + \\ + \frac{4}{3\psi} [\varepsilon^2 (Q_4 \psi_{01} - Q_3 \psi_{00}) + Q_3 \varepsilon^2 \psi_{10} - Q_4 \psi_{11}]. \quad (61)$$

Расчеты по формулам (52)–(61) показывают, что при возрастании дополнительной силы Q , приложенной вне штампа, снижается как контактное давление, так и сила, вдавливающая штамп. При возрастании значения λ (область контакта отдалается от ребра) контактное давление и вдавливающая сила стремятся к известным значениям [3].

Выводы. Полученные формулы (22)–(24) для коэффициента интенсивности касательных напряжений в кончике трещины важны для анализа возможности дальнейшего распространения трещины. Этот анализ показывает, что трещина будет наименее опасна для граничных условий варианта А (жесткая заделка граней полосы) и наиболее опасна для варианта В (свободные грани полосы). Решение задачи о действии сосредоточенной силы вне области контакта на грани клина может быть использовано в дальнейшем для сведения контактной задачи о взаимодействии нескольких штампов на грани клина к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода (метод Андрейкива – Панасюка) [5].

Работа для клина поддержана грантами РФФИ 08-01-00003, 09-01-00004.

Библиографический список

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. Александров В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М.: Наука, 1993. – 224 с.
3. Александров В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
5. Аргатов И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – СПб.: Политехника, 2003. – 233 с.

References

1. Kachanov L.M. Osnovy mehaniki razrusheniya / L.M. Kachanov. – M.: Nauka, 1974. – 312 s. – in Russian.
2. Aleksandrov V.M. Tonkie koncentratory napryazhenii v uprugih telah / V.M. Aleksandrov, B.I. Smetanin, B.V. Sobol'. – M.: Nauka, 1993. – 224 s. – in Russian.
3. Aleksandrov V.M. Neklassicheskie prostranstvennye zadachi mehaniki kontaktnykh vzaimdeistvii uprugih tel / V.M. Aleksandrov, D.A. Pojarskii. – M.: Faktorial, 1998. – 288 s. – in Russian.
4. Galin L.A. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti / L.A. Galin. – M.: Nauka, 1980. – 304 s. – in Russian.
5. Argatov I.I. Osnovy teorii uprugogo diskretnogo kontakta / I.I. Argatov, N.N. Dmitriev. – SPb.: Politehnika, 2003. – 233 s. – in Russian.

Материал поступил в редакцию 25.05.10.

D.A. POZHARSKIY, A.A. MOLCHANOV

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF MIXED PROBLEMS FOR ELASTIC STRIP AND WEDGE

Asymptotic solutions for two new theory elasticity problems with mixed boundary conditions are derived. The first problem is about a shear crack in a strip for different types of boundary conditions on the outer strip faces. The second one is the contact problem for a three-dimensional wedge when a concentrated force is acting outside the contact domain on the wedge edge for sliding support on the other wedge face.

Key words: theory of elasticity, mixed boundary conditions, asymptotics.

ПОЖАРСКИЙ Дмитрий Александрович (р. 1964), зав. кафедрой «Прикладная математика» Донского государственного технического университета, доктор физико-математических наук (1998), профессор (2005). Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета (1986).

Область научных интересов: теория упругости, контактные задачи, трещины, смешанные граничные условия.

Автор более 100 публикаций и 2 монографий.

pozharda@rambler.ru

МОЛЧАНОВ Александр Алексеевич (р. 1986), аспирант кафедры «Математика и механика» Института энергетики и машиностроения Донского государственного технического университета. Окончил факультет автоматики и робототехники Ростовской государственной академии сельскохозяйственного машиностроения (2008).

Область научных интересов: математическая физика, теория упругости, контактные задачи.

Автор более 30 публикаций.

aa_molchanov@mail.ru

Dmitry A. POZHARSKIY (1964), Head (2010) of the Applied Mathematics Department, Institute of Power Engineering and Machinery, Don State Technical University. Ph.D. in Physics and Maths (1998), professor (2005). He graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University (1986).

Research interests: theory of elasticity, contact problems, cracks, mixed boundary conditions.

Author of more than 100 scientific publications and 2 monographs.

pozharda@rambler.ru

Alexander A. MOLCHANOV (1986), postgraduate student (2010) of the Mathematics and Mechanics Department, Institute of Power Engineering and Machinery, Don State Technical University. He graduated from the Faculty of Automatics and Robot-Technology, Rostov State Agricultural Engineering academy (2008).

Research interests: mathematical physics, theory of elasticity, contact problems.

Author of more than 30 scientific publications.

aa_molchanov@mail.ru