

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.982.274+517.983.22

А.В. БРАТИЩЕВ

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЕВА И ПОЛИНОМЫ БРЕНКЕ

Обнаружена естественная связь операторов обобщенного дифференцирования (ООД) Гельфонда – Леонтьева и последовательностей полиномов Бренке. Получен критерий расширения оператора, коммутирующего с ООД, до непрерывного на всем пространстве $H(G)$. Описан класс областей, для которых характеристическая функция оператора комплексной свертки всегда имеет нулевой тип. Доказана гиперцикличность и хаотичность обобщенной комплексной свертки.

Ключевые слова: обобщенная производная Гельфонда – Леонтьева; полиномы Бренке; производная Данкла; коммутация; обобщенная комплексная свертка; гиперциклические и хаотические операторы.

Введение. В работе Бренке [1] дано обобщение понятия полиномов Аппеля (1880 г.), позже названное *полиномами Бренке*. Затем А. Гельфонд и А. Леонтьев [2] ввели понятие обобщенного дифференцирования, названное *производной Гельфонда – Леонтьева*. Мы пытаемся установить естественную связь между этими обобщениями (теоремы 2, 3).

В терминах полиномов Бренке установлен критерий расширения коммутирующего с ООД линейного оператора до непрерывного в пространстве $H(G)$ аналитических в односвязной области G функций (теорема 4). Ю.М. Царьков [3] и ряд других авторов [4] получили представление оператора, коммутирующего с оператором классического дифференцирования, в виде дифференциального оператора бесконечного порядка. В настоящей статье выделены все те области, для которых возможно такое представление (теорема 6). Мы доказали [5] гиперцикличность и хаотичность операторов, коммутирующих с оператором дифференцирования Данкла. Этот результат устанавливается для более широкого класса операторов обобщенного дифференцирования (теорема 7).

Представление операторов обобщенного дифференцирования. Пусть G – односвязная область, и последовательность ограниченных расширяющихся областей $\{G_n\} \uparrow G$ исчерпывает G . $H(G)$ – пространство аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Под оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда – Леонтьева понимаем линейный непрерывный в $H(G)$ оператор, действующий на последовательности степеней по правилу

$$Dz^n := d_{n-1}z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 := 0.$$

При этом функция $e(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$, $e_n := \frac{1}{d_0 \dots d_{n-1}}$, $e_0 := 1$, называется обобщенной экспонентой, а функция $d(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ – порождающей функцией ООД. Мы получили [6] такую характеристику и представление ООД.

ТЕОРЕМА 1. Определенное на последовательности степеней $\{z^n\}$ отображение $D: Dz^n := d_{n-1}z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $D1 := 0$, расширяется до линейного непрерывного в $H(G)$ тогда и только тогда, когда ряд $d(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ сходится в окрестности начала координат, и функцио-

нальный элемент $d\left(\frac{z}{t}\right)$, $|t| > \frac{1}{\varepsilon}$, $|z - z_0| < \varepsilon$, аналитически продолжается в каждую односвязную область $G_n \times G'_{N(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Имеет место такое интегральное представление:

$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(t) \frac{1}{t^2} d\left(\frac{z}{t}\right) dt.$$

ПРИМЕР. Оператор обобщенного дифференцирования

$$[\Lambda_{\alpha, \beta} y](z) := y'(z) + \alpha \frac{y(z) - y(0)}{z} - \beta \frac{y(-z) - y(0)}{z}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \frac{\beta - \alpha}{2} \notin \mathbb{N},$$

на $H(G)$ (где G – центрально-симметричная область относительно начала координат) обобщает оператор Данкла, у которого $\alpha = \beta$ [напр., 7].

Связь полиномов Бренке и операторов обобщенного дифференцирования. Пусть даны два формальных степенных ряда:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n.$$

Их произведение $a(w)\psi(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n$ порождает последовательность полиномов Бренке

$$(ПББ) \quad p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \psi_k z^k, \quad n = 0, 1, \dots \quad [1].$$

В частном случае, когда $\psi(z) = e^z$, получается последовательность полиномов Аппеля:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)! k!} z^k, \quad n = 0, 1, \dots,$$

связанных равенствами $\frac{d}{dx} p_n(z) = p_{n-1}(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

Оказывается, между классом полиномов Бренке и классом ООД Гельфонда – Леонтьева существует тесная связь.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность полиномов Бренке $\{p_n(z)\}$ (где $\forall n \geq 0 \quad \psi_n \neq 0$) порождает ООД D на пространстве многочленов $span\{z^n\}$ по следующему правилу:

$$Dz^n := \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n} z^{n-1}, \quad D1 := 0, \quad \text{причем}$$

$$Dp_n(z) = p_{n-1}(z), \quad [Dp_n](0) = \frac{a_{n-1} \psi_0}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad e(z) \equiv \frac{1}{\psi_0} \psi(z).$$

Обратно, ООД D , $\forall n \geq 0 \quad d_n \neq 0$, на $span\{z^n\}$ и формальный ряд $a(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} w^n$ порождают ПББ $\{p_n(z)\}$ с порождающей функцией $a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n$, причем

$$Dp_n(z) = p_{n-1}(z), \quad [Dp_n](0) = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По условию

$$[Dp_n](z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \psi_k Dz^k = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \psi_{k-1} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-1-k}}{(n-1-k)!} \psi_k z^k = p_{n-1}(z),$$

$$e(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Psi_0}{\Psi_1} \dots \frac{\Psi_{n-1}}{\Psi_n} \right)^{-1} z^n = \frac{1}{\Psi_0} \Psi(z).$$

$$\text{Обратно, положим } \psi(z) := e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_0 \dots d_{n-1}} z^n.$$

По этой функции и $a(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} w^n$ построим порождающую функцию

$$a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n.$$

В соответствии с определением $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{d_0 \dots d_{n-1}} z^k$, $n = 0, 1, \dots$ Остается подействовать на это равенство оператором D .

ПРИМЕР. Введенная выше обобщенная производная Данкла $\Lambda_{\alpha, \beta} z^n := (n + \alpha + (-1)^{n-1} \beta) z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $D1 := 0$, порождает последовательность полиномов Бренке вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)! (1 + \alpha + \beta) \dots (k + \alpha + (-1)^{k-1} \beta)} z^k, \quad n = 0, 1, \dots$$

Обозначим $\mathcal{L}_D$ множество линейных операторов на пространстве многочленов, которые коммутируют с ООД D .

ТЕОРЕМА 3. Между классом линейных операторов $\mathcal{L}_D$ и множеством всех последовательностей полиномов Бренке с порождающими функциями вида

$$a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n, \quad \forall n \geq 1 \quad e_n \neq 0, \quad e_0 = 1$$

(где $e(z)$ – обобщенная экспонента ООД D) существует изоморфизм, задаваемый правилом: $L(e_n z^n) = p_n(z)$, $n \geq 0$.

При этом (формально) $L(e(\lambda z)) = a(\lambda) e(\lambda z)$.

Доказательство. Положим $p_n(0) = e_n \cdot [Lz^n](0) =: \frac{a_n}{n!}$.

Так как $D^{n+1} p_n(z) = L(D^{n+1} e_n z^n) = 0$, то $\deg p_n \leq n$.

Найдем коэффициенты этого многочлена $p_n(z) := \sum_{k=0}^n x_k z^k$. $[D^k p_n(z)](0) = x_k d_{k-1} \dots d_0$.

С другой стороны,

$$[D^k p_n(z)](0) = [LD^k e_n z^n](0) = e_n d_{n-1} \dots d_{n-k} [Lz^{n-k}](0) = e_{n-k} [Lz^{n-k}](0) = \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Приравнявая правые части, получаем последовательно

$$x_k = \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{d_0 \dots d_{k-1}} \Rightarrow p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{d_0 \dots d_{n-1}} z^k \text{ – многочлен Бренке.}$$

Обратно, каждая ППБ с порождающей функцией $a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n$ определяет линейный оператор по правилу $L(e_n z^n) = p_n(z)$. Операторы L и D коммутируют, так как

$$L(D e_n z^n) = L(e_n d_{n-1} z^{n-1}) = L(e_{n-1} z^{n-1}) = p_{n-1}(z),$$

$$DL(e_n z^n) = D p_n(z) = p_{n-1}(z), \quad n \geq 0.$$

Последнее равенство следует из предыдущей теоремы.

Критерий непрерывности операторов обобщенного дифференцирования. Сопоставим

целой функции экспоненциального типа $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ [8] с помощью обобщенной экспоненты

$e(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$ степенной ряд

$$B_e \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{e_n} \frac{1}{t^{n+1}},$$

называемый обобщенным преобразованием Бореля этой функции.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ООД D непрерывен в $H(G)$, $0 \in G$, $e(z)$ является целой функцией экспоненциального типа. Оператор $L \in \mathcal{L}_D$ расширяется до непрерывного в $H(G)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{| [Lz^n](0) \cdot e_n | n!} < \infty;$$

$$2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} \sqrt[n]{| [Lz^k](0) \frac{e_{n-k} e_k}{e_n} |} < \infty, \text{ откуда следует аналитичность суммы ряда } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}} \text{ как}$$

функции двух переменных в некотором бикруге $D(0, \varepsilon) \times D(\infty, \varepsilon)$;

$$3) \forall n \exists N = N(n) > n \text{ сумма ряда } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}} \text{ аналитически продолжается в бицилиндри-$$

ческую область $G_n \times G'_N$. При этом L представим в виде оператора обобщенной комплексной свертки

$$[Ly](z) = \int_C y(t) B_e[a(\lambda) e(\lambda z)](t) dt.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как оператор L непрерывен в $H(G)$, то по предыдущей теореме

$$Le(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Le_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{k=0}^n [Lz^{n-k}](0) e_{n-k} e_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} [Lz^n](0) e_n \lambda^n \sum_{n=0}^{\infty} e_n (\lambda z)^n =: a(\lambda) e(\lambda z).$$

$$\forall n \exists N = N(n) > n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad |a(\lambda)| \max_{z \in G_n} |e(\lambda z)| = \max_{z \in G_n} |Le(\lambda z)| \leq C \max_{z \in G_N} |e(\lambda z)| \leq A \exp\{B|\lambda|\},$$

откуда целая функция $a(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, т.е. условие 1 имеет место.

$$\text{Так как } \frac{p_k(z)}{e_k} = Lz^k, \text{ то } \max_{z \in G_n} \left| \frac{p_k(z)}{e_k} \right| \leq C \max_{z \in G_N} |z^k| = CR_N^k.$$

Отсюда, в частности, следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}}$ в некотором бикруге $D(0, \varepsilon) \times D(\infty, \varepsilon)$. Далее

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq n} \sqrt[n]{| [Lz^k](0) e_{n-k} e_k |} &= \max_{0 \leq i \leq k} \left| \frac{p_k^{(k-i)}(0)}{(k-i)!} \right| = \max_{0 \leq i \leq k} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{p_k(t)}{t^{k-i+1}} dt \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq k} \left(\max_{z \in G_n} |p_k(t)| \frac{2\pi l_n}{r_n^{k-i+1}} \right) \leq \frac{2\pi CR_N^k l_n}{r_n^{k+1}} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq k} \sqrt[k]{| [Lz^i](0) \frac{e_{k-i} e_i}{e_k} |} \leq \frac{R_N}{r_n} < \infty. \end{aligned}$$

Оператор L имеет такое интегральное представление [9]:

$$\forall z \in G_n \quad [Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{N+1}} y(t) k(t, z) dt,$$

где ядро $k(t, z)$ – аналитическое в каждой области $G_n \times G'_N$.

$$\forall |t| > R \quad k(t, z) = \left[L_{\zeta} \frac{1}{t - \zeta} \right] (z) = \left[L_{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{t^{n+1}} \right] (z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[L_{\zeta} \zeta^n](z)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}},$$

т.е. сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}}$ аналитически продолжается в каждую область $G_n \times G'_N$.

$\Leftarrow$ Первое условие равносильно тому, что функция $a(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} [Lz^n](0) e_n \lambda^n$ является целой и экспоненциального типа. В силу второго условия

$$\max_{z \in G_n} \left| \frac{p_k(z)}{e_k} \right| = \max_{z \in G_n} \left| \sum_{i=0}^k [Lz^i](0) \frac{e_{k-i} e_i}{e_k} z^i \right| \leq CD^k R_n^k \max_{z \in G_n} \sum_{i=0}^k |z^i| = (k+1)C(DR_n)^k.$$

Отсюда следует, что функция $k(t, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}}$ аналитическая в области $G_n \times D(\varepsilon, \infty)$.

По третьему условию она аналитически продолжается в каждую область $G_n \times G'_N$.

По теореме Кете определяемый функцией $k(t, z)$ оператор $[L_0 y](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{N+1}} y(t) k(t, z) dt$

непрерывен в $H(G)$.

Так как

$$[L_0 t^n](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} t^n k(t, z) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{e_n t^{n+1}} dt = \frac{p_n(z)}{e_n} = [Lt^n](z),$$

то L по определению расширяется до непрерывного оператора на $H(G)$, коммутирующего с ООД D . Его представление очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

При $D = \frac{d}{dz}$ имеем $e(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$. Первое условие теоремы принимает вид

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[Lz^n](0)|} < \infty$ и равносильно тому, что характеристическая функция оператора

$a(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{n!} \lambda^n$ является целой экспоненциального типа. Из второго условия следует, что двойной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! p_n(z)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^n [Lz^{n-k}](0) C_n^k z^k$$

абсолютно сходится в бикруге $D(0, \varepsilon) \times D(\infty, \varepsilon)$. Поэтому можно менять порядок суммирования:

$$\begin{aligned} k(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! p_n(z)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^n [Lz^k](0) \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Lz^k](0)}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Lz^k](0)}{k!} \frac{k!}{(t-z)^{k+1}} =: A(t-z), \end{aligned}$$

где $A(t)$ – классическое преобразование Бореля функции $a(z)$.

Оно аналитически продолжается до аналитической и многозначной функции в областях $G'_N - G_n$.

Более простой по форме критерий расширения оператора, коммутирующего с ООД, получается для круговой области $D(0, R) := \{z : |z - 0| < R\}$, если воспользоваться критерием М.Г. Хапланова [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть ООД D непрерывен в $H(D(0, R))$, $R \in (0, \infty)$, т.е. его порождающая функция $d(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ аналитическая $D(0, 1)$. Оператор $L \in \mathcal{L}_D$ расширяется до непрерывного в $H(D(0, R))$ тогда и только тогда, когда коэффициенты его полиномов Бренке удовлетворяют условию:

$$\forall r < R \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|e_n|} \max_{0 \leq k \leq n} |[Lz^{n-k}](0) e_{n-k} e_k| r^k} < R.$$

Следующая теорема дает описание класса непрерывных линейных операторов, коммутирующих с оператором обобщенного дифференцирования Данкла. Доказательство сводится к нахождению эквивалентных операторов, коммутирующих с оператором классического дифференцирования, описание которых известно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – односвязная центрально-симметричная область, $D = \Lambda_{\alpha, \beta}$, $L \in \mathcal{L}_{\Lambda_{\alpha, \beta}}$. Равносильны утверждения:

1) L расширяется до линейного непрерывного в $H(G)$ и коммутирует с обобщенным оператором Данкла: $L\Lambda_{\alpha, \beta} = \Lambda_{\alpha, \beta}L$ на $H(G)$.

2) функция $a(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{(1 + \alpha + \beta) \dots (n + \alpha + (-1)^{n-1} \beta)} \lambda^n$ является целой экспоненциального типа, и функция –

$$A(t-z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Lz^k](0) k!}{(1 + \alpha + \beta) \dots (n + \alpha + (-1)^{n-1} \beta)} \frac{1}{(t-z)^{k+1}}$$

аналитически продолжается в каждую область $G_n \times G'_N$ как функция двух переменных.

Доказательство. Покажем сначала, что определенный на $\{z^n\}$ диагональный оператор $Jz^n := \frac{(1 + \alpha + \beta) \dots (n + \alpha + (-1)^{n-1} \beta)}{n!} z^n$ расширяется до линейного непрерывного на всем $H(G)$.

Для этого преобразуем его порождающую функцию.

$$\begin{aligned} d_J(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + \alpha + \beta) \dots (k + \alpha + (-1)^{n-1} \beta)}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2}\right)_k \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} z^{2k} + \\ &+ (1 + \alpha + \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3 + \alpha + \beta}{2}\right)_k \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!} z^{2k+1} = {}_2F_1\left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2}, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}; \frac{1}{2}; z^{2k}\right) + \\ &+ (1 + \alpha + \beta) z \cdot {}_2F_1\left(\frac{3 + \alpha + \beta}{2}, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}; \frac{3}{2}; z^{2k}\right). \end{aligned}$$

Аналогично для обратного диагонального оператора:

$$d_{J^{-1}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1 + \alpha + \beta) \dots (k + \alpha + (-1)^{n-1} \beta)} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}{\left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2}\right)_k \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)_k} z^{2k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1+\alpha+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}{\left(\frac{3+\alpha+\beta}{2}\right)_k \left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)_k} z^{2k+1} = {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1+\alpha+\beta}{2}, 1+\frac{\alpha-\beta}{2}; z^{2k}\right) + \\
& + \frac{z}{1+\alpha+\beta} \cdot {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{3+\alpha+\beta}{2}, 1+\frac{\alpha-\beta}{2}; z^{2k}\right).
\end{aligned}$$

Обобщенная гипергеометрическая функция ${}_{q+1}F_q(a_1, \dots, a_{q+1}; b_1, \dots, b_q; z)$ является решением уравнения типа Фукса с правильными особыми точками $0, 1, \infty$ [11]. Она голоморфна в единичном круге и аналитически продолжается по любому пути, не проходящему через точки ветвления $0, 1, \infty$, на бесконечнолистную риманову поверхность. Отсюда следует, что для любой односвязной области G , $0 \in G$, функция ${}_{q+1}F_q\left(a_1, \dots, a_{q+1}; b_1, \dots, b_q; \frac{z}{t}\right)$ аналитически продолжается в каждую область $G_n \times G'_N$, $n < N$.

Тогда в случае центрально-симметричной области G функция ${}_{q+1}F_q\left(a_1, \dots, a_{q+1}; b_1, \dots, b_q; \frac{z^2}{t^2}\right)$ аналитически продолжается в соответствующие $G_n \times G'_N$, и поэтому оба диагональных оператора J, J^{-1} непрерывны в $H(G)$ [11].

J является оператором преобразования дифференцирования Данкла $\Lambda_{\alpha, \beta}$ в классическое дифференцирование $\frac{d}{dz}$, т.е. $J \circ \Lambda_{\alpha, \beta} = \frac{d}{dz} \circ J$.

Пусть теперь выполнено условие 1. Покажем, что оператор $L_d := JLJ^{-1}$ коммутирует с классическим дифференцированием:

$$\frac{d}{dz} L_d = \left(\frac{d}{dz} J\right) L J^{-1} = J(\Lambda_{\alpha, \beta} L) J^{-1} = JL(\Lambda_{\alpha, \beta} J^{-1}) = (JLJ^{-1}) \frac{d}{dz} = L_d \frac{d}{dz}.$$

Так как $L_d e^{\lambda z} := JL(J^{-1} e^{\lambda z}) = J(Le(\lambda z)) = J[a(\lambda)e(\lambda z)] = a(\lambda)e^{\lambda z}$, то эквивалентные операторы L_d, L имеют одну и ту же характеристическую функцию $a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [Lz^n](0) e_n \lambda^n$. Поэтому утверждение 2 следует из замечания 1 к предыдущей теореме.

Пусть теперь выполнено условие 2. По тому же замечанию и теореме Кете оператор комплексной свертки $[L_d y](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(t) A(t-z) dt$ непрерывен в $H(G)$. Непрерывный оператор $J^{-1} L_d J$ коммутирует с $\Lambda_{\alpha, \beta}$ (доказательство аналогично вышеприведенному). Покажем, что он совпадает с L на $\{z^n\}$, т.е. L расширяется до линейного непрерывного в $H(G)$.

$$\begin{aligned}
J^{-1} L_d J z^n &= \frac{1}{e_n} J^{-1} \left(L_d \frac{z^n}{n!} \right) = \frac{1}{e_n} J^{-1} (p_n(z)) = \frac{1}{e_n} \sum_{k=0}^n [Lz^{n-k}](0) \frac{e_{n-k}}{k!} J^{-1} z^k = \\
&= \sum_{k=0}^n [Lz^{n-k}](0) \frac{e_{n-k} e_k}{e_n} z^k = Lz^n.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Представление любого оператора свертки в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка. Назовем вычетом множества G_2 по множеству G_1 множество

$$s(G_1, G_2) := \{z \in \mathbb{C} : z + G_1 \subseteq G_2\}.$$

Впервые такое множество рассматривалось в работе Ю.Ф. Коробейника [12]. В частности, вычетом множества G назовем множество $s(G) := \{z \in \mathbb{C} : z + G \subseteq G\}$.

Докажем основную формулу для вычета множеств: $(G'_2 - G_1)' = s(G_1, G_2)$.

$$\begin{aligned} (G'_2 - G_1)' &= \{t : t \notin G'_2 - G_1 = \bigcup_{z \in G_1} (G'_2 - z) = (\bigcap_{z \in G_1} (G_2 - z))'\} = \\ &= \{t : t \in \bigcap_{z \in G_1} (G_2 - z)\} = \{t : \forall z \in G_1 \quad t + z \in G_2\} = \{t : t + G_1 \subseteq G_2\} =: s(G_1, G_2). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть G есть односвязная область в $\mathbb{C}$. Равносильны утверждения:

1) $s(G) = 0$;

2) характеристическая функция $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{n!} z^k$ каждого непрерывного линейного в

$H(G)$ оператора L , $\frac{d}{dz}L = L\frac{d}{dz}$, является целой функцией экспоненциального типа ноль:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[Lz^n](0)|} = 0.$$

Доказательство.

$\Leftarrow$ По определению $0 \in s(G)$. Пусть $z_0 \neq 0$, $z_0 \in s(G)$. Так как $G + z_0 \subseteq G$, то оператор сдвига $[Ly] := y(z + z_0)$ непрерывен в $H(G)$. Он, очевидно, коммутирует с оператором дифференцирования. Для этого оператора $[Le^{\lambda z}](0) = e^{\lambda(z+z_0)}$, и характеристическая функция $a(\lambda) = e^{z_0\lambda}$ не имеет минимальный тип. Это противоречит условию.

$\Rightarrow$ Ядро оператора L $k(t, z) = A(t - z)$ голоморфно в каждой области $G_n \times \bar{G}'_N$. Отсюда $\forall z \in G_n$ функция $A(\zeta)$ голоморфна в $\bar{G}'_N - z$, и вообще $\forall z \in G \quad \exists N(z)$ она голоморфна в $\bar{G}'_{N(z)} - z$. Эта функция аналитически продолжается из точки $\zeta = \infty$ по лучам в главную звезду (относительно ∞) $D_z \supseteq \bar{G}'_{N(z)} - z$ [13, с.492].

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ функция $A(\zeta)$ аналитически продолжается до голоморфной в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}(0, \varepsilon)$, откуда и будет следовать ее голоморфность в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Из открытого покрытия компакта $\bar{\mathbb{C}} \setminus D(0, \varepsilon)$ множествами $\bar{G}'_{N(z)} - z$, $z \in G$, выберем конечное подпокрытие

$$\bigcup_{k=1}^n (\bar{G}'_{N(z_k)} - z_k) \supseteq \bar{\mathbb{C}} \setminus D(0, \varepsilon).$$

Так как $A(\zeta)$ аналитически продолжается в каждую звезду $D_{z_k} \supseteq \bar{G}'_{N(z_k)} - z_k$, то она аналитически продолжается до голоморфной функции в звезду $\bigcup_{k=1}^n D_{z_k} \supseteq \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}(0, \varepsilon)$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

Нетрудно видеть, что вычет ограниченной односвязной области G равен нулю. Для этого случая было доказано [3, 4] утверждение 2 теоремы. Для неограниченной выпуклой области G $s(G) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.

В случае $s(G) = 0$

$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(t) A(t-z) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{(t-z)^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{n!} y^{(n)}(z),$$

причем ряд равномерно сходится внутри G . Отсюда и из теоремы 4 [12] непосредственно следует такой критерий. Для того чтобы для односвязной области G каждый линейный непрерывный в $H(G)$ оператор L , коммутирующий с оператором дифференцирования, был представим в виде дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы $s(G) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.

В предыдущей теореме для центрально-симметричной односвязной области G показано, что каждый линейный непрерывный в $H(G)$ оператор, коммутирующий с обобщенным дифференцированием Данкла $\Lambda_{\alpha, \beta}$, эквивалентен оператору, коммутирующему с классическим дифференцированием. Так как для обобщенной производной n -го порядка

$$\Lambda_{\alpha, \beta}^{(n)} y = (J^{-1} \frac{d}{dz} J) \circ \dots \circ (J^{-1} \frac{d}{dz} J) y = J^{-1} (Jy)^{(n)},$$

то в случае $s(G) = 0$ такой оператор представим в виде дифференциального оператора бесконечного порядка относительно обобщенного оператора Данкла:

$$\begin{aligned} [Ly](z) &= [J^{-1} L_d Jy](z) = J^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[L_d z^n](0)}{n!} (Jy)^{(n)}(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lz^n](0)}{(1+\alpha+\beta) \dots (n+\alpha+(-1)^{n-1}\beta)} [\Lambda_{\alpha, \beta}^{(n)} y](z). \end{aligned}$$

Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки. Мы показали [5], что операторы обобщенной комплексной свертки, порождаемые оператором дифференцирования Данкла, являются хаотическими и гиперциклическими. Воспользуемся приведенным там условием гиперцикличности в пространстве Фреше, чтобы доказать это свойство для операторов из теоремы 4.

Для непостоянной характеристической функции $a(\lambda)$ множества $A := \{z : |a(z)| < 1\}$, $B := \{z : |a(z)| > 1\}$ открыты в $\overline{\mathbb{C}}$.

Подпространства $V := \text{span}\{e^{\lambda z} : \lambda \in A\}$, $W := \text{span}\{e^{\lambda z} : \lambda \in B\}$ плотны в $H(G)$. Пусть, например, $\{\lambda_k\} \rightarrow \lambda_0$, $\lambda_0, \lambda_k \in A$. Фиксируем произвольный непрерывный функционал на $H(G)$. Он

задается функцией $Y(t) \in H(G')$, $Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{t^{n+1}}$, по правилу $\langle y, Y \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(t) Y(t) dt$.

Покажем, что из равенств $\langle y(\lambda_k t), Y(t) \rangle = 0$, $k = 1, 2, \dots$, следует $Y(t) \equiv 0$, откуда по теореме Банаха V плотно в $H(G)$.

Функция $\tilde{y}(\lambda) := \langle e(\lambda t), Y(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} y_n e_n \lambda^n$ является целой функцией экспоненциального типа,

так как такова $e(\lambda)$. Поскольку по условию $\tilde{y}(\lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то по теореме единственности $\tilde{y}(\lambda) \equiv 0$, а значит и $Y(t) \equiv 0$.

Аналогично доказывается плотность W .

Последовательность отображений $\{L^n\}$ поточечно сходится к нулю на V , так как $L^n\left(\sum_{i=1}^m a_i e(\lambda_i z)\right) = \sum_{i=1}^m a_i a^n(\lambda_i) e(\lambda_i z)$ равномерно стремится к нулю внутри G .

Аналогично, для отображения $S(e(\lambda z)) := \frac{1}{a(\lambda)} e(\lambda z)$, $\lambda \in B$, расширенного по линейности

на все W , последовательность $\{S^n\}$ поточечно сходится к нулю. Наконец, композиция LS является тождественным отображением на W :

$$LS\left(\sum_{i=1}^m a_i e(\lambda_i z)\right) = L\left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{1}{a(\lambda_i)} e(\lambda_i z)\right) = \sum_{i=1}^m a_i e(\lambda_i z).$$

Это и доказывает гиперциклическость оператора обобщенной свертки.

Каждая гиперциклическая функция f преобразования L порождает плотное в $H(G)$ многообразие гиперциклических функций (гиперциклическое многообразие) $\{[p(L)](f) : p - \text{многочлен}\}$ в $H(G)$.

Докажем хаотичность, т.е. плотность в $H(G)$ множества периодических элементов оператора L . Имеем импликацию

$$[L^n e^{\lambda z}](z) - e^{\lambda z} = (a^n(\lambda) - 1)e^{\lambda z} = 0 \Rightarrow a(\lambda) = \exp\left\{\frac{2\pi k}{n}i\right\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad k = 0, \dots, (n-1).$$

В силу открытости отображения $a(\lambda)$ множество $\Lambda := \{\lambda : \exists n \in \mathbb{N}, k \leq (n-1) a(\lambda) = \exp\{2\pi ki/n\}\}$ имеет предельную конечную точку.

Рассуждая как и выше и используя теорему единственности, получаем плотность подпространства периодических функций $\text{span}\{e(\lambda z) : \lambda \in \Lambda\}$ в $H(G)$, т.е. оператор L – хаотический.

Нами доказана

ТЕОРЕМА 7. Пусть оператор обобщенной комплексной свертки L удовлетворяет теореме 4 и не является скалярно кратным тождественному преобразование пространства $H(G)$. Тогда L имеет инвариантное относительно Λ_α гиперциклическое многообразие, которое плотно в $H(G)$.

L является также хаотическим оператором.

Библиографический список

1. Brenke W.C. On generating functions of polynomial systems // Amer. Math. Monthly. – 1945, – v.52. – P.297-301.
2. Гельфонд А.О. Об одном обобщении ряда Фурье / А.О. Гельфонд, А.Ф. Леонтьев // Математ. сб. – 1951. – Т.29 (71). – №3. – С.477-500.
3. Царьков Ю.М. Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочных со степенью оператора дифференцирования / Ю.М. Царьков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1970. – Вып.11. – С.86-92.
4. Братищев А.В. Общий вид линейных операторов, перестановочных с операцией дифференцирования / А.В. Братищев, Ю.Ф. Коробейник // Математ. заметки. – 1972. – Т.12. – Вып.2. – С.187-195.
5. Братищев А.В. Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространств аналитических функций / А.В. Братищев // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т.9. – №2. – С.196-207.
6. Братищев А.В. Об одном диагональном операторе / А.В. Братищев, А.В. Моржаков // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения: сб. Вып.8. – Ростов н/Д : Издательский центр ДГТУ, 2008. – С.32-37.

7. Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K. Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$ // *Acta Math. Hungar.* – 2005. – v.106(1 – 2). – P.101-116.
8. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
9. Köthe G. Dualitat in der Funktionentheorie // *J. reine angew. math.* – 1953. – Bd.191. – S.30-49.
10. Хапланов М.Г. Линейные преобразования аналитических пространств // *Докл. АН СССР.* – 1951. – Т.80. – №1. – С.21-24.
11. Бейтман Г. Высшие трансцендентные функции. – Т.1. / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
12. Коробейник Ю.Ф. Линейные операторы, перестановочные с дифференцированием и определенные в пространстве функций, аналитических в бесконечных областях / Ю.Ф. Коробейник: Высшие технические учебные заведения. Математика. – 1973. Т.IX, кн.3. – С.35-44.
13. Маркушевич И.Г. Теория аналитических функций – Т.2. / И.Г. Маркушевич. – М.: Наука, 1968. – 692 с.

References

1. Brenke W.C. On generating functions of polynomial systems // *Amer. Math. Monthly.* – 1945, – v.52. – P.297-301.
2. Gel'fond A.O. Ob odnom obobschenii ryada Fur'e / A.O. Gel'fond, A.F. Leont'ev // *Matemat. sb.* – 1951. – Т.29 (71). – №3. – S.477-500. – in Russian.
3. Car'kov Yu.M. Izomorfizmy nekotorykh analiticheskikh prostranstv, perestanovochnykh so stepen'yu operatora differencirovaniya / Yu.M. Car'kov // *Teoriya funktsii, funktsional'nyi analiz i ih prilozheniya.* – 1970. – Vyp.11. – S.86-92. – in Russian.
4. Bratishev A.V. Obschii vid lineinykh operatorov, perestanovochnykh s operaciei differencirovaniya / A.V. Bratishev, Yu.F. Korobeinik // *Matemat. zametki.* – 1972. – Т.12. – Vyp.2. – S.187-195. – in Russian.
5. Bratishev A.V. Haotichnost' kommutiruyuschiy s differencirovaniem Dankla preobrazovaniy prostranstv analiticheskikh funktsii / A.V. Bratishev // *Vestnik DGTU.* – 2009. – Т.9. – №2. – S.196-207. – in Russian.
6. Bratishev A.V. Ob odnom diagonal'nom opereatore / A.V. Bratishev, A.V. Morjakov // *Integro-differentsial'nye operatory i ih prilozheniya: sb. Vyp.8.* – Rostov n/D : Izdatel'skii centr DGTU, 2008. – S.32-37. – in Russian.
7. Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K. Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on // *Acta Math. Hungar.* – 2005. – v.106(1 – 2). – P.101-116.
8. Levin B.Ya. Raspredelenie kornei celykh funktsii / B.Ya. Levin. – М.: GITTL, 1956. – 632 s. – in Russian.
9. Köthe G. Dualitat in der Funktionentheorie // *J. reine angew. math.* – 1953. – Bd.191. – S.30-49.
10. Haplanov M.G. Lineinye preobrazovaniya analiticheskikh prostranstv // *Dokl. AN SSSR.* – 1951. – Т.80. – №1. – S.21-24. – in Russian.
11. Beitman G. Vysshie transcendentnye funktsii. – Т.1. / G. Beitman, A. Erdei . – М.: Nauka, 1973. – 296 s. – in Russian.
12. Korobeinik Yu.F. Lineinye operatory, perestanovochnye s differencirovaniem i opredelennyye v prostranstve funktsii, analiticheskikh v beskonечnykh oblastyakh / Yu.F. Korobeinik: Vysshie tehnikeskiy uchebnyy zavedeniya. Matematika. – 1973. Т.IX, кн.3. – S.35-44. – in Russian.
13. Markushevich I.G. Teoriya analiticheskikh funktsii – Т.2. / I.G. Markushevich. – М.: Nauka, 1968. – 692 s. – in Russian.

Материал поступил в редакцию 17.09.2010.

A.V. BRATISHCHEV

GELFOND-LEONTYEV GENERALIZED DERIVATION OPERATORS AND BRENKE POLYNOMIALS

Natural connection between Gelfond-Leontyev generalized derivation operators (GDO) and Brenke polynomials is established. Operator extension criterion commuting with GDO up to continuous $H(G)$ space is derived. Domain class when characteristic function of the complex convolution operator always has zero type, is described. Hypercyclic and random nature of the generalized complex convolution has been proved.

Key words: Gelfond-Leontyev generalized derivative; Brenke polynomials; Dankle derivative; commutation; generalized complex convolution; hypercyclic and chaotic operators.

БРАТИЩЕВ Александр Васильевич (р. 1949), профессор кафедры «Прикладная математика» Донского государственного технического университета. Доктор физико-математических наук (1998), профессор (2001). Окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (1971).

Область научных интересов – теория функций и функциональный анализ в локально выпуклых пространствах, теория управления, компьютерное моделирование.

Автор более 100 публикаций.

avbratishchev@spark-mail.ru

Alexander V. BRATISHCHEV (1949), Professor of the Applied Mathematics Department, Don State Technical University. PhD in Physics and Maths (1998), professor (2001). He graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics, Rostov State University (1971).

Research interests - function theory and complex functional analysis in LCS, control theory, computer simulation.

Author of more than 100 scientific publications.