

УДК 539.32

А.О. ВАТУЛЯН, А.Ю. БУРЬЯН, А.В. ОСИПОВ

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ АНАЛИЗЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Представлен метод нахождения амплитудной характеристики для консольно закрепленной балки переменной жесткости на основе анализа интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, предложен метод определения закона изменения жесткости на основе решения задачи Коши.

Ключевые слова: балка переменной жесткости, коэффициентная обратная задача, интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, сплайн-аппроксимация.

Введение. Коэффициентные обратные задачи теории упругости – относительно новый и значимый раздел математической теории упругости, применяемый в теории неоднородных покрытий, фундаментостроении, сейсмологии, био- и наномеханике и других областях. Для этого класса задач можно выделить модели, в которых идентифицируемые дифференциальные операторы имеют постоянные коэффициенты (линейная теория анизотропного упругого тела, линейная теория вязкоупругого тела при дифференциальной форме определяющих уравнений), и модели, в которых требуется идентифицировать неоднородные свойства (например, в геофизике при описании деформирования литосферных плит и при разведке полезных ископаемых, в горной механике при анализе напряженного состояния в окрестности выработок и особенно предварительного напряженного состояния при изучении наноразмерных объектов, в биомеханике при исследовании различных тканей и вибрационных воздействий на них в целях идентификации) [1].

Методы определения жесткости важны для процедуры идентификации объектов в различных областях естествознания. Главная проблема при исследовании задач подобного типа – это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и известными (измеренными) функциональными зависимостями. Представлены результаты исследования обратной задачи для дифференциального оператора 4-го порядка, описывающего колебания балки переменной жесткости.

Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания упругой балки длины l переменной жесткости EI с частотой ω . Уравнение имеет вид [2]:

$$(EI(x_1)w''(x_1))'' - \rho\omega^2 Fw(x_1) = 0, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга; I – момент инерции; ρ – плотность; F – площадь поперечного сечения.

Считаем, что балка на конце $x_1 = 0$ жестко закреплена, а на конце $x_1 = l$ – действует нагрузка. Рассмотрим два варианта нагружения на конце –

задача 1: нагружение сосредоточенным моментом;

задача 2: нагружение сосредоточенной силой.

Соответствующие граничные условия имеют вид –

задача 1:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad EI(l) \cdot w''(l) = M; \quad (EI(x_1) \cdot w''(x_1))'|_{x_1=l} = 0;$$

задача 2:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad EI(l) \cdot w''(l) = 0; \quad (EI(x_1) \cdot w''(x_1))'|_{x_1=l} = P. \quad (2)$$

Приведем краевую задачу (1), (2) к безразмерному виду, введя безразмерную координату

$$x = \frac{x_1}{l}, \text{ а также безразмерные параметры и функции: } B(x) = \frac{EI}{E_0 I_0}, \quad k^4 = \frac{\rho\omega^2 \cdot F}{E_0 I_0} l^4.$$

Таким образом, краевая задача (1), (2) в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$(B(x)w''(x))'' - k^4 w(x) = 0. \quad (3)$$

Поскольку решение задач 1, 2 пропорционально нагрузке, то примем следующие модельные граничные условия –

$$\text{задача 1: } w(0) = w'(0) = 0; \quad B(1) \cdot w''(1) = 1; \quad (B(x) \cdot w''(x))'|_{x=1} = 0;$$

$$\text{задача 2: } w(0) = w'(0) = 0; \quad B(1) \cdot w''(1) = 0; \quad (B(x) \cdot w''(x))'|_{x=1} = 1. \quad (4)$$

Основная цель исследования:

1) разработка метода построения функции $w(x, k)$ при различных значениях параметра k при произвольных законах изменения жесткости $B(x)$ (монотонных, немонотонных, кусочно-непрерывных);

2) разработка метода построения решения обратной задачи, которая состоит в нахождении функции $B(x)$ по информации о функции $w(x, k)$ при некотором значении k_0 ;

3) проведение серии вычислительных экспериментов, позволяющих оценить эффективность предлагаемых методов.

Исследование прямой задачи. Прямая задача состоит в нахождении функции w , удовлетворяющей краевым условиям при заданном законе изменения $B(x)$ в некотором диапазоне изменения k . Поскольку коэффициенты дифференциальных операторов переменны, то в аналитическом виде найти решение нельзя, возможно только численное решение задачи. Чаще для этого используют метод конечных разностей или метод сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода [3].

Предлагая способ сведения краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, опишем процедуру сведения на примере задачи 2.

Для построения интегрального уравнения введем функцию:

$$u(x) = B(x)w''(x).$$

Далее перейдем от краевой задачи (3), (4) к системе дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно функций $u(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{cases} u''(x) - k^4 w(x) = 0, \\ w''(x) - \frac{u(x)}{B(x)} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Соответствующие граничные условия приобретают вид

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) &= 0, \\ u(1) = 0, \quad u'(1) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя уравнения (5) дважды по переменной x , находим представления функций $u(x)$ и $w(x)$ в следующей форме:

$$\begin{cases} u(x) = k^4 \int_0^x (x - \xi) w(\xi) d\xi + A_1 x + A_2, \\ w(x) = \int_0^x (x - \xi) \frac{u(\xi)}{B(\xi)} d\xi + B_1 + B_2. \end{cases} \quad (7)$$

Постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 находим из граничных условий (6):

$$B_1 = B_2 = 0, \quad A_1 = 1 - k^4 \int_0^1 w(\xi) d\xi, \quad A_2 = k^4 \int_0^1 w(\xi) d\xi - 1 - k^4 \int_0^1 (1 - \xi) w(\xi) d\xi = k^4 \int_0^1 \xi w(\xi) d\xi - 1.$$

Таким образом, имеем соотношения для определения искомых функций:

$$w(x) = \int_0^x (x-\xi) \frac{u(\xi)}{B(\xi)} d\xi,$$

$$u(x) = k^4 \int_0^x (x-\xi) w(\xi) d\xi + x - k^4 x \int_0^1 w(\xi) d\xi + k^4 \int_0^1 \xi w(\xi) d\xi - 1 = (x-1) + k^4 \int_0^x (x-\xi) w(\xi) d\xi -$$

$$- k^4 \int_0^1 (x-\xi) w(\xi) d\xi = (x-\xi) - k^4 \int_x^1 (x-\xi) w(\xi) d\xi.$$

Объединив эти представления, получим:

$$w(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)(\xi-1)}{B(\xi)} d\xi - k^4 \int_0^x \frac{(x-\xi)}{B(\xi)} \int_{\xi}^1 (\xi-s) w(s) ds d\xi. \quad (8)$$

Поменяем порядок интегрирования в двойном интеграле в представлении (8), переписав его в виде интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$w(x) = k^4 \int_0^1 K(x,s) w(s) ds + f(x), \quad (9)$$

причем его ядро непрерывно для широкого класса функций $B(x)$ и представимо в форме

$$K(x,s) = \begin{cases} \int_0^s \frac{(x-\xi)(s-\xi)}{B(\xi)} d\xi, & 0 \leq s \leq x, \\ \int_0^x \frac{(x-\xi)(s-\xi)}{B(\xi)} d\xi, & 0 \leq x \leq s, \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)(\xi-1)}{B(\xi)} d\xi.$$

Для задачи 1 соответствующее уравнение получается аналогично и имеет вид (9), но с другой правой частью, а именно:

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)}{B(\xi)} d\xi.$$

Уравнения вида (9) можно исследовать либо методом последовательных приближений, либо численно. Наиболее распространенным методом является метод коллокаций. Дискретизацией на равномерной сетке $h = 1/N$, $x_k = kh$, $k = 0, \dots, N$, $x_N = 1$, заменой интеграла квадратурной формулой Симпсона [5] и использованием метода коллокаций уравнение (9) приводится к исследуемой численно системе линейных алгебраических уравнений:

$$w(x_i) - k^4 \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) w(x_j) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Анализ конечномерного оператора (10) позволяет эффективно строить численное решение и определять как резонансные частоты, так и амплитудно-частотные характеристики для балок переменной жесткости.

Для оценки точности предложенной схемы вычислений сравним численное решение, полученное в результате использования составленной программы, и точное решение, полученное аналитически при $B = 1$, которое выражается через функции Крылова [2].

Расчеты показывают, что относительная погрешность между этими решениями не превосходит 0.5% в диапазоне частот до первого резонанса, что свидетельствует о достаточно эффективной вычислительной схеме.

Результаты расчетов амплитудно-частотной характеристики представлены в виде графиков.

На рис.1 результаты решения задачи 2 изображены сплошной линией при $k = 5$, а ромбиками – при $k = 1$ для $B(x) = 1 + x^2$.

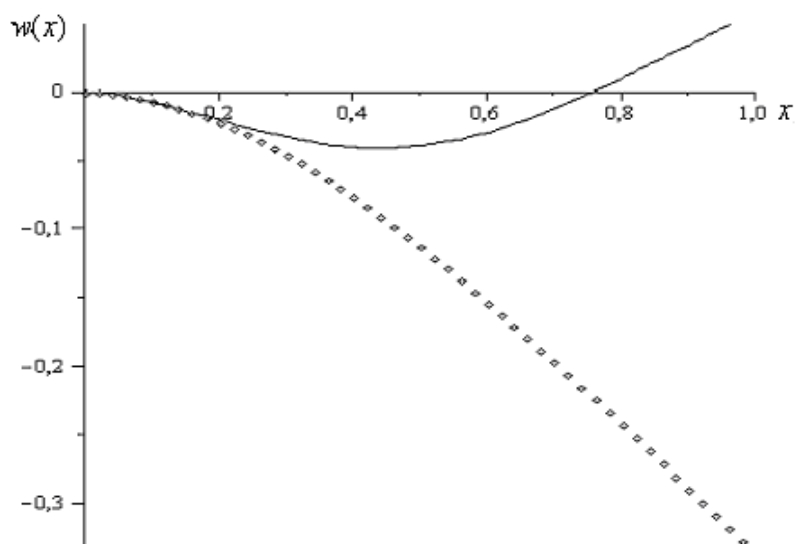


Рис.1. Решение прямой задачи 2

На рис.2 изображен результат решения задачи 1, сплошной линией показано решение при $k = 5$, а ромбиками – при $k = 1$ для $B(x) = 1 + \sin^2(10\pi x)$.

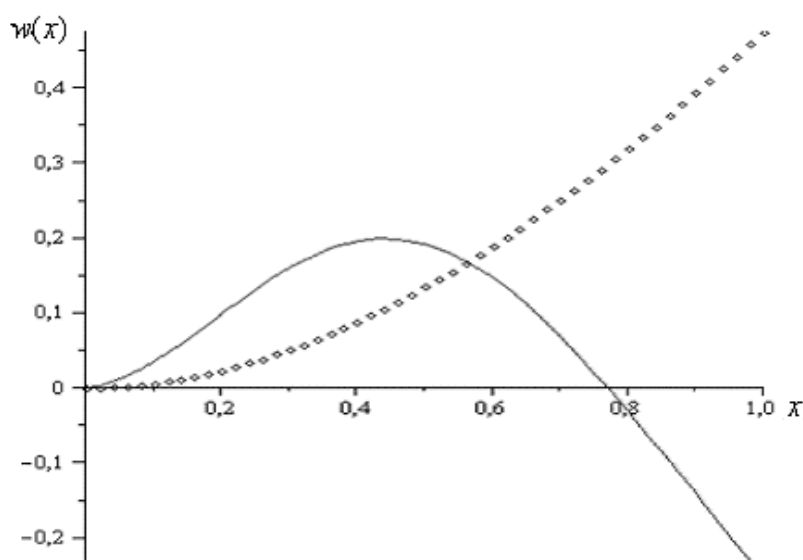


Рис.2. Решение прямой задачи 1

Обратная задача. Целью решения обратной задачи является восстановление функции $B(x)$ по известным в наборе точек значениям функции $w(x, k_0)$. При этом рассмотрены варианты постановки обратной задачи:

задача 3: Восстановление функции $B(x)$ по значениям функции $w(x, k_0)$ (которая в рамках вычислительного эксперимента взята из решения прямой задачи 1);

задача 4: Восстановление функции $B(x)$ по значениям функции $w(x, k_0)$ (которая в рамках вычислительного эксперимента взята из решения прямой задачи 2).

Заметим, что подобные обратные задачи рассмотрены и в другой постановке [6, 7]. В данном случае дифференциальное уравнение (3) относительно функции $B(x)$ имеет 2-й порядок и для ее определения необходимо решать задачу Коши. Некорректность обратной задачи в этой постановке состоит в том, что необходимо находить вторые производные от функции, заданной в наборе точек. Поэтому на *первом этапе* аппроксимируем функцию $w(x)$ сплайнами 5-й степени [5], что позволяет находить вторую производную с достаточной степенью точности. На *втором этапе* построим операторное соотношение, связывающее функции $B(x)$ и $w(x)$. Осуществим это построение на примере задачи 4. Дважды интегрируя уравнение (3) от 1 до x , получаем:

$$\int_1^x (B(x)w''(x))'' d\xi = \int_1^x (B(x)w''(x))' - 1 = k^4 \int_1^x w(\xi) d\xi,$$

и далее имеем:

$$B(x) = \frac{x - 1 - k^4 \int_1^x (x - \xi) w(\xi) d\xi}{w''(x)}. \quad (11)$$

Для задачи 3 аналогичное соотношение запишется в виде

$$B(x) = \frac{1 - k^4 \int_1^x (x - \xi) w(\xi) d\xi}{w''(x)}. \quad (12)$$

Дискретизация позволяет найти значения искомой функции:

$$B(x_k) = \frac{1}{w''(x_k)} \left[x_k - 1 - k^4 \int_{x_k}^1 (x_k - \xi) w(\xi) d\xi \right]. \quad (13)$$

Для вычисления определенного интеграла $\int_{x_k}^1 (x_k - \xi) w(\xi) d\xi$ заменим подынтегральную

функцию на каждом отрезке разбиения многочленом Лагранжа 1-й степени с узлами 1 и x [5]. Это соответствует замене на каждом отрезке разбиения кривой на секущую. В результате получаем известную формулу трапеций:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^1 (x_k - \xi) w(\xi) d\xi = h & [(x_k - x_{k+1})w(x_{k+1}) + (x_k - x_{k+2})w(x_{k+2}) + \dots + \\ & + (x_k - x_{N-1})w(x_{N-1}) + 1/2 (x_k - x_N)w(x_N)] \end{aligned}$$

Применение этой формулы к (11) дает расчетные зависимости.

$$B(x_k) = \frac{1}{w''(x_k)} \left[x_k - 1 - k^4 h \left[(x_k - x_{k+1}) w(x_{k+1}) + (x_k - x_{k+2}) w(x_{k+2}) + \dots + (x_k - x_{N-1}) w(x_{N-1}) + \frac{1}{2} (x_k - x_N) w(x_N) \right] \right].$$

Путем аналогичных построений получаем расчетные формулы для задачи 3:

$$B(x_k) = \frac{1}{w''(x_k)} \cdot \left[1 - k^4 h \left[(x_k - x_{k+1}) w(x_{k+1}) + (x_k - x_{k+2}) w(x_{k+2}) + \dots + (x_k - x_{N-1}) w(x_{N-1}) + \frac{1}{2} (x_k - x_N) w(x_N) \right] \right].$$

Как видно из представления (11), задача 4 хуже обусловленная, нежели задача 3, так как на конце $x=1$ имеет место неопределенность, поэтому в этой точке необходимо либо задавать значение функции $B(x)$, либо экстраполировать функцию из области $x < 1$. Этому факту есть простое объяснение в рамках рассмотрения задачи Коши. Для задачи 3 граничные условия (4) дают два необходимых условия в задаче Коши, а для задачи 4 – только одно, поскольку из условия $B(1) \cdot w''(1) = 0$ и положительности $B(x)$ следует $w''(1) = 0$, и второе условие пропадает.

На основе описанного метода проведены эксперименты по реконструкции различных видов неоднородностей: гладкой монотонно возрастающей функции, гладкой монотонно убывающей функции, гладкой немонотонной функции, функции, имеющей на отрезке $[0, 1]$ несколько стационарных точек, кусочно-разрывной функции.

На графиках представлены вычислительные эксперименты для различных видов неоднородности.

Рис.3 иллюстрирует результат задачи 4 по восстановлению функции $B(x) = 1 + x^2$ (гладкой монотонно возрастающей функции) при $k = 1$:

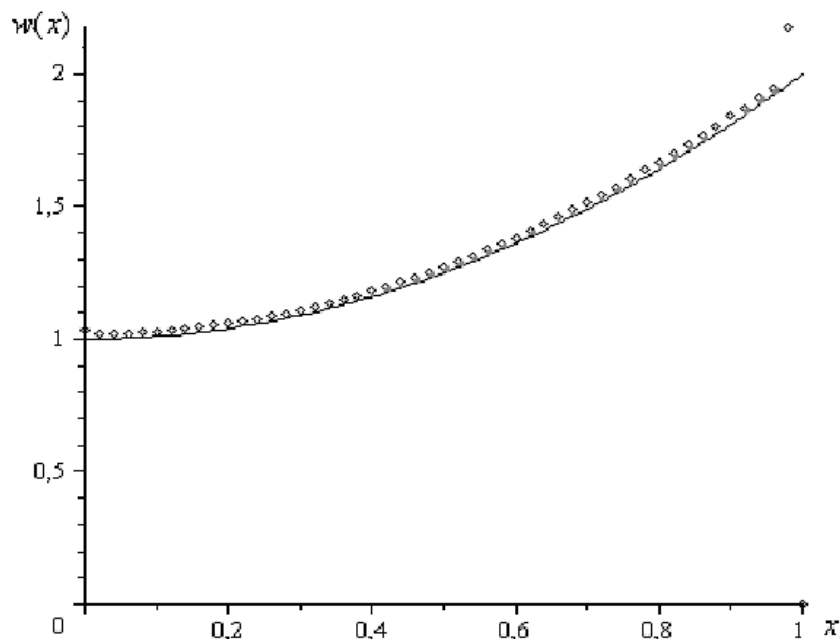


Рис.3. Решение обратной задачи 4

В качестве примера на рис.4 изображен результат восстановления функции $B(x) = 1 + \sin^2(10\pi x)$ (функции, имеющей несколько стационарных точек) в задаче 3 с входными данными, зашумленными аддитивным образом с амплитудой $\delta = 10^{-5}$.

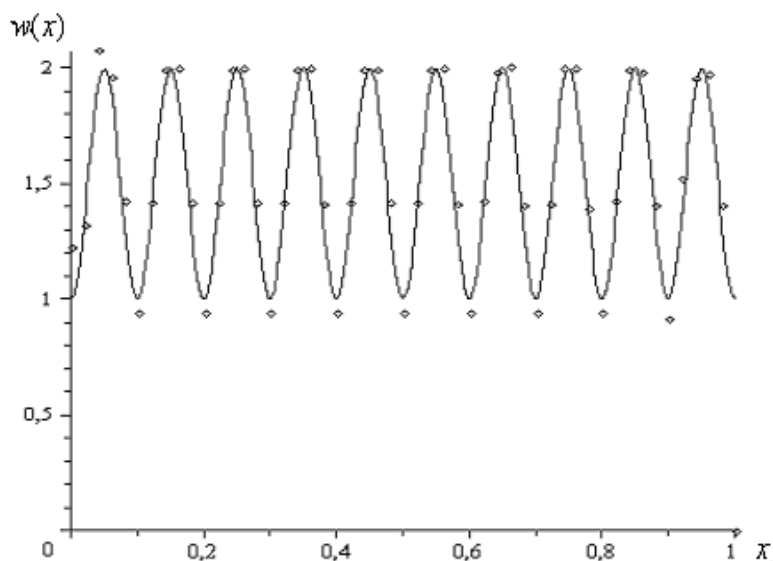


Рис.4. Решение обратной задачи 3 с зашумленными входными данными

В случае разрывных законов неоднородности проведено разработанный метод усовершенствован: входной массив данных исследуется на предмет точек разрыва (рассматривается изменение первой и второй производной функции $w(x)$). При обнаружении точек разрыва в их окрестности проводится экстраполяция функции, что улучшает качество восстановления.

На рис.5 изображен результат восстановления функции:

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, x > \frac{3}{4}, \\ 5 & \text{при } \frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{4}, \end{cases} \quad k = 0,9.$$

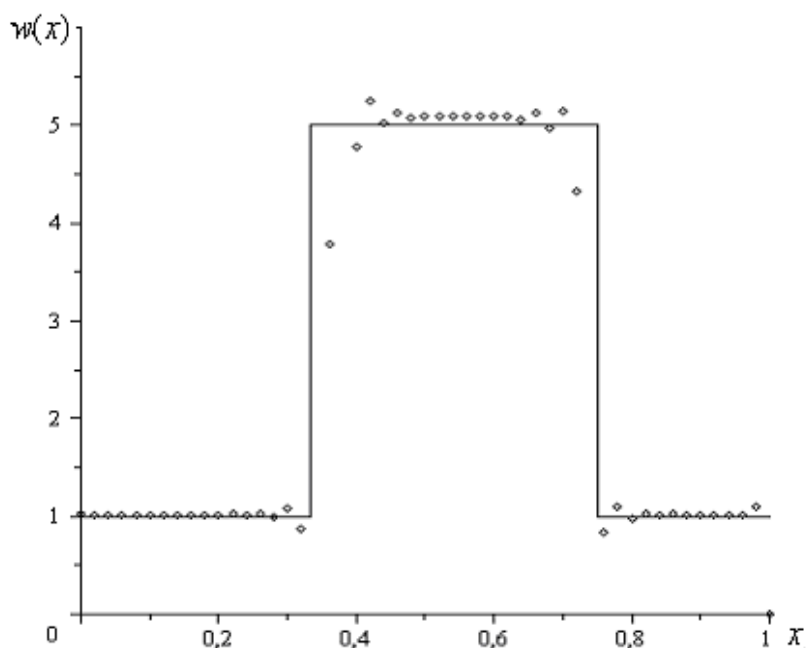


Рис. 5. Решение обратной задачи 4 для кусочно-разрывной функции

Выводы. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции переменной жесткости различных типов. Представлена методика решения коэффициентной обратной задачи при анализе поперечных колебаний балки переменной жесткости. Разработан эффективный метод решения при точных и зашумленных входных данных.

Библиографический список

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Изд. 2-е перераб. / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения (введение в теорию) / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
5. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Гос. изд-во физ.-математ. лит., 1959. – 620 с.
6. Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня / О.В. Бочарова, А.О. Ватульян // Акустический журнал. – 2009. – Т.55. – №3. – С.281-288.
7. Боброва А.Н. Об определении закона изменения модуля Юнга при анализе продольных колебаний стержня / А.Н. Боброва, А.О. Ватульян // Вестник ДГТУ. – 2009. – №4. – С.613-621.

References

1. Vatul'yan A.O. Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela / A.O. Vatul'yan. – M.: Fizmatlit, 2007. – 224 s. – in Russian.
2. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruemyyh sistem. – Izd. 2-e pererab. / A.P. Filippov. – M.: Mashinostroenie, 1970. – 736 s. – in Russian.
3. Krasnov M.L. Integral'nye uravneniya (vvedenie v teoriyu) / M.L. Krasnov. – M.: Nauka, 1975. – 303 s. – in Russian.
4. Tihonov A.N. Metody resheniya nekorrektnykh zadach / A.N. Tihonov, V.Ya. Arsenin. – M.: Nauka, 1979. – 285 s. – in Russian.
5. Berezin I.S. Metody vychislenii / I.S. Berezin, N.P. Jidkov. – M.: Gos. izd-vo fiz.-matemat. lit., 1959. – 620 s. – in Russian.
6. Bocharova O.V. O rekonstrukcii plotnosti i modulya Yunga dlya neodnorodnogo sterjnya / O.V. Bocharova, A.O. Vatul'yan // Akusticheskii jurnal. – 2009. – T.55. – №3. – S.281-288. – in Russian.
7. Bobrova A.N. Ob opredelenii zakona izmeneniya modulya Yunga pri analize prodol'nykh kolebaniy sterjnya / A.N. Bobrova, A.O. Vatul'yan // Vestnik DGTU. – 2009. – №4. – S.613-621. – in Russian.

Материал поступил в редакцию 15.05.2010.

A.O. VATULYAN, A.Y. BURYAN, A.V. OSIPOV

ON IDENTIFICATION OF VARIABLE RIGIDITY UNDER THE ANALYSIS OF THE BEAM LATERAL OSCILLATION

The method of amplitude characteristic estimation for the cantilever beam of the variable rigidity on the basis of the analysis of Fredholm integral equation of the second kind is presented. The determination method of rigidity changing on the basis of Cauchy sequence analysis.

Key words: beam of the variable rigidity; coefficient inverse problem; Fredholm integral equation of the second kind; spline approximation.

ВАТУЛЬЯН Александр Ованесович (р. 1953), доктор физико-математических наук (1993), профессор (1995), заведующий кафедрой теории упругости ЮФУ (2001), член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член трех докторских диссертационных Советов (ЮФУ, ДГТУ). Окончил механико-математический факультет РГУ (1975).

Область научных интересов – исследование волновых процессов в телах со сложными механическими свойствами (неоднородность, анизотропия, реология, наличие пьезоэффекта), геометрические и коэффициентные обратные задачи математической физики, численные методы, граничные интегральные уравнения.

Автор более 300 публикаций в различных областях механики деформируемого твердого тела, теории интегральных уравнений, численных методов и обратных задач, в том числе монографии «Обратные задачи в механике твердого деформируемого тела».

БУРЬЯН Алиса Юрьевна, выпускница кафедры «Математика» ДГТУ (2010).

Область научных интересов – обратные и некорректные задачи для дифференциальных операторов, численные методы решения некорректных задач.

ОСИПОВ Алексей Владимирович (р. 1988), выпускник кафедры «Математика» ДГТУ (2010).

Область научных интересов – обратные и некорректные задачи для дифференциальных операторов, численные методы решения некорректных задач.

kukuvz@yandex.ru

Alexander O. VATULYAN (1953), Head of the Elasticity Theory Department, South Federal University (2001). PhD in Physics and Maths (1993), professor (1995), member of the Russian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics. He graduated from the Mechanics and Mathematics Faculty, South Federal University (1975).

Research interests - investigation of wave processes in bodies with complex mechanical properties (heterogeneity, anisotropy, rheology, piezoeffect occurrence), geometric and coefficient inverse problems of mathematical physics, numerical methods.

Author of more than 300 scientific publications, including 1 monograph.

Alisa Y. BURYAN (1989) graduated from the Maths Department, Don State Technical University (2010).

Research interests - inverse and incorrect problems for differential operators, numerical methods of solving incorrect problems.

Alexey V. OSIPOV (1988) graduated from the Maths Department, Don State Technical University (2010).

Research interests - inverse and incorrect problems for differential operators, numerical methods of solving incorrect problems.