

УДК 519.87:519.178:339.5

Т.А. МЕДВЕДЕВА

АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ В МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

Используя теорию графов в рамках модели международной торговли, рассматривали условия существования и способы расчета точного сбалансированного решения.

Ключевые слова: взвешенный ориентированный граф, сильно связанные компоненты, модель международной торговли, структурная матрица торговли, сбалансированность модели, вектор торговых бюджетов, матричное уравнение.

Введение. Бездефицитные, взаимовыгодные торговые отношения между разными странами являются одними из важнейших составляющих международных отношений. Рассматриваемая модель международной торговли или модель обмена позволяет решить задачу о том, каковы должны быть соотношения госбюджетов торгующих между собой стран, чтобы не было существенного дефицита торгового баланса каждой из стран-участниц, чтобы торговля была взаимовыгодной. Данная проблема является достаточно важной, так как торговый дефицит в международном масштабе порождает таможенные пошлины, квоты, лицензии и даже торговые войны.

Постановка задачи. Рассмотрим n стран-участниц торговли с государственными бюджетами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Рассматривая госбюджет каждой страны, имеем в виду ту его часть, которая тратится на закупку товаров внутри страны или на импорт из других стран в течение некоторого временного периода. Пусть A – структурная матрица торговли, ее элементы a_{ij} – часть госбюджета, которую j -я страна тратит на закупки товаров i -й страны. Матрица A и вектор госбюджетов связаны матричным уравнением. Определим, каким условиям должна удовлетворять данная неотрицательная матрица, чтобы существовал положительный вектор x , т.е. существовало такое соотношение между торговыми бюджетами стран-участниц, которое бы обеспечивало сбалансированность международной торговли (бездефицитность торгового бюджета).

Структурная матрица торговли $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – доля импорта из страны i в бюджет страны j , – обладает некоторыми свойствами: она неотрицательная ($A \geq 0$), квадратная, и сумма элементов в каждом ее столбце равна 1.

Пусть структурная матрица торговли имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор бюджетов стран-участниц торговли.

Тогда при подведении итогов торговли за некоторый временной период (например, за год) i -я страна имеет выручку $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны: $p_i \geq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Можно доказать [3], что условием бездефицитной торговли являются равенства: $p_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $p_i > x_i$, тогда для всех $i = 1, 2, \dots, n$ имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &> x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &> x_2; \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &> x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Суммируя неравенства (1), получаем:

$$(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})x_1 + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2})x_2 + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn})x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (2)$$

В левой части выражения (2) все суммы в скобках, как суммы элементов столбцов матрицы A , равны 1. Тогда получаем противоречивое неравенство:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Следовательно, предположение о том, что $p_i > x_i$ не верно, т.е.

$$p_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

или выручка должна равняться бюджету, чтобы торговля была сбалансированной.

В матричной форме полученную систему уравнений (3) можно представить в виде

$$A\vec{x} = \vec{x}. \quad (4)$$

Тогда $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A , принадлежащий собственному значению 1. Существование такого собственного вектора вытекает из следующей теоремы [3].

ТЕОРЕМА. Если в матрице A сумма элементов каждого столбца равна единице, то существует собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1.

Докажем, что 1 является максимальным собственным значением неотрицательной матрицы A . Используем для этого теорему Фробениуса – Перрона [3, 5], нередко применяемую для исследования линейных экономических моделей.

ТЕОРЕМА Фробениуса – Перрона. Пусть A – неотрицательная квадратная матрица ($A \geq 0$) и λ_A – максимальное по модулю собственное значение матрицы A (число Фробениуса). Тогда справедливы следующие утверждения:

1. λ_A – действительное неотрицательное число. Существует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A$, соответствующий данному собственному значению (вектор Фробениуса).

2. Если $A > 0$, то $\lambda_A > 0$, и существует положительный собственный вектор матрицы A , определенный однозначно с точностью до умножения на положительное число.

Теперь, докажем, что 1 является числом Фробениуса матрицы A [3].

Пусть $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ – n -мерный единичный вектор. Так как в матрице A все суммы по столбцам равны 1, то $A^T \vec{e} = \vec{e}$. Пусть λ_A – число Фробениуса, тогда найдется такой неотрицательный ненулевой вектор $\vec{y}$, что $A\vec{y} = \lambda_A \vec{y}$.

Рассмотрим скалярное произведение $\vec{e}$ и $A\vec{y}$:

$$\vec{e}^T \cdot A\vec{y} = \vec{e}^T \cdot \lambda_A \vec{y} = \lambda_A (\vec{e}^T \cdot \vec{y}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}^T \cdot A\vec{y} &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n) + \dots \\ &+ (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n) = (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})y_1 + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2})y_2 + \dots \\ &+ (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn})y_n = A^T \vec{e} \cdot \vec{y} = \vec{e}^T \cdot \vec{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как $\vec{e}^T \cdot \vec{y} = y_1 + y_2 + \dots + y_n > 0$, то из уравнений (5), (6) получаем:

$$\lambda_A = \frac{\vec{e}^T \cdot \vec{y}}{\vec{e}^T \cdot \vec{y}} = 1.$$

Таким образом, 1 – максимальное собственное значение матрицы A . По теореме Фробениуса – Перрона существует неотрицательный вектор $\vec{x}_A$, соответствующий данному собственному значению, т.е. уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет ненулевое неотрицательное решение $\vec{x}$.

Так как бюджет любой страны $x_i > 0$, то интерес представляет только положительное решение $\vec{x} > 0$. Для $A > 0$ существование положительного решения следует из теоремы Фробениуса – Перрона. Но в более общем случае, если какая-то j -я страна не импортирует товары из страны i ($a_{ij} = 0$), то матрица A не является положительной ($A \geq 0$). Возникает вопрос о существовании положительного решения уравнения (4) в случае, когда матрица A неотрицательна.

Представим структурную матрицу A как матрицу весов взвешенного ориентированного графа, в котором каждой вершине поставлена в соответствие страна-участница международной торговли. Доля госбюджета a_{ij} ставится в соответствие дуге (i, j) орграфа. Если $a_{ij} = 0$, то дуга из вершины i в вершину j отсутствует. Ненулевым диагональным элементам матрицы a_{ii} , т.е. долям госбюджета, затраченным на закупку товаров внутри страны, соответствуют петли графа.

Докажем теорему, которая дает ответ на поставленный ранее вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Если, в модели международной торговли, структурную матрицу $A \geq 0$ представить как матрицу весов орграфа, в котором вершинам соответствуют страны-участницы торговли, и если данный орграф является сильно связным, то уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет единственное положительное решение $\vec{x} > 0$ с точностью до умножения на положительное число.

Доказательство. Так как орграф сильно связный, то для любых двух вершин орграфа i и j ($i \neq j$) существует (i, j) -маршрут и (j, i) -маршрут.

Согласно известному из теории графов утверждению [4], в графе с n вершинами (i, j) -маршрут ($i \neq j$) существует тогда и только тогда, когда (i, j) -й элемент матрицы $A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ не равен нулю.

Следовательно, учитывая, что матрица $A \geq 0$, имеем:

$$(A + A^2 + \dots + A^{n-1})_{ij} > 0,$$

т.е. в матрице $A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ вне главной диагонали все элементы положительны.

Сложив эту матрицу с единичной E , получим положительную матрицу:

$$B = E + A + A^2 + \dots + A^{n-1} > 0.$$

Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ . Тогда

$$B\vec{x} = (E + A + A^2 + \dots + A^{n-1})\vec{x} = \vec{x} + \lambda\vec{x} + \lambda^2\vec{x} + \dots + \lambda^{n-1}\vec{x} = (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1})\vec{x}.$$

Таким образом, вектор $\vec{x}$ одновременно является и собственным вектором матрицы B .

Доказано, что 1 является числом Фробениуса матрицы A , следовательно, уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет неотрицательное решение $\vec{x}$. Всякое такое решение $\vec{x} \geq 0$ является и собственным вектором матрицы B . Но так как матрица B положительна, то, по теореме Фробениуса – Перрона, собственный вектор матрицы B , соответствующий числу Фробениуса,

положителен и определен однозначно с точностью до умножения на положительное число, т.е. $\vec{x} > 0$. Следовательно, уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет положительное решение $\vec{x}$, единственное с точностью до умножения на положительное число. Теорема доказана.

Далее приведем пример расчета соотношения между торговыми бюджетами шести стран-участниц, для которых структурная матрица торговли имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,290 & 0,159 & 0,000 & 0,000 & 0,186 & 0,000 \\ 0,307 & 0,174 & 0,257 & 0,000 & 0,307 & 0,316 \\ 0,169 & 0,000 & 0,273 & 0,278 & 0,254 & 0,000 \\ 0,204 & 0,350 & 0,227 & 0,393 & 0,253 & 0,306 \\ 0,030 & 0,050 & 0,000 & 0,329 & 0,000 & 0,378 \\ 0,000 & 0,267 & 0,243 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Так как матрица $A \geq 0$, то, используя теорему 1, выясним, существует ли положительное решение уравнения $A\vec{x} = \vec{x}$.

Для этого торговые связи между странами представим в графическом виде (рис.1). Чтобы не загромождать рисунок, веса дуг (доли госбюджетов) на данном орграфе не обозначены.

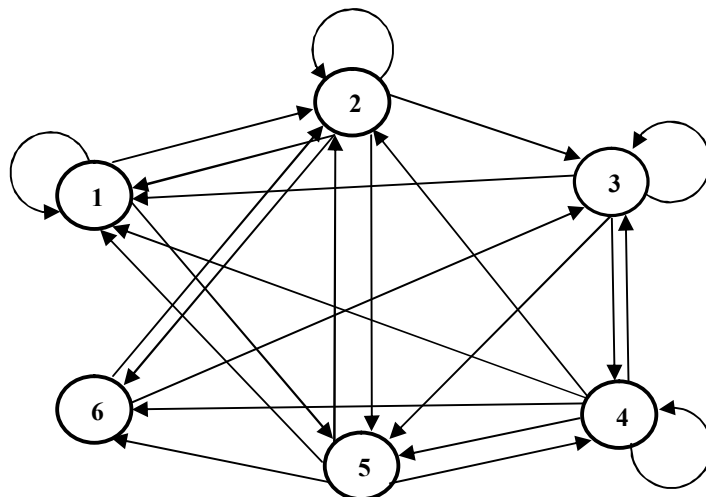


Рис.1. Ориентированный граф, соответствующий структурной матрице A

Рассматривая сильную связность орграфа, условимся петли, если они есть, не брать во внимание.

Для того, чтобы проверить, является ли орграф сильно связным, был реализован алгоритм выделения сильно связных компонент орграфа, использующий поиск в глубину, который применяется в самом графе и в транспонированном [1, 2]. Разработано программное средство в среде Turbo Pascal 7.0, входными данными в котором является орграф с n вершинами, представленный массивом ребер, а выходными данными – количество сильно связных компонент орграфа и массив номеров соответствующих компонент.

С помощью данной программы установлено, что орграф, соответствующий примеру модели обмена (рис.1), является сильно связным, и все его вершины принадлежат одной сильно связанной компоненте.

Следовательно, по теореме 1 уравнение $A\vec{x} = \vec{x}$ имеет положительное решение. Для нахождения этого решения воспользуемся математической системой MathCAD.

На рис.2 приведен пример расчета соотношения между торговыми бюджетами 6 стран-участниц для матрицы (7), обеспечивающего сбалансированность торговой модели. Ответ дается в нормализованном виде.

$$A := \begin{pmatrix} 0.290 & 0.159 & 0.000 & 0.000 & 0.186 & 0.000 \\ 0.307 & 0.174 & 0.257 & 0.000 & 0.307 & 0.316 \\ 0.169 & 0.000 & 0.273 & 0.278 & 0.254 & 0.000 \\ 0.204 & 0.350 & 0.227 & 0.393 & 0.253 & 0.306 \\ 0.030 & 0.050 & 0.000 & 0.329 & 0.000 & 0.378 \\ 0.000 & 0.267 & 0.243 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{rows}(A) \quad i := 1 \dots r$$

$$r = 6 \quad S_i := \sum A^{(i)}$$

$S^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ – суммы элементов матрицы A по столбцам
 $\lambda := \text{eigenvals}(A)$ – вычисление собственных значений матрицы A
 $\lambda^T = (1 \ -0.132 + 0.146i \ -0.132 - 0.146i \ 0.254 \ 0.07 + 0.247i \ 0.07 - 0.247i)$
 $x := \text{eigenvec}(A, 1)$ – вычисление собственного вектора матрицы A для $\lambda = 1$
 $x^T = (0.176 \ 0.4 \ 0.421 \ 0.691 \ 0.332 \ 0.209)$ – вектор соотношений торговых бюджетов
 $(A \cdot x)^T = (0.176 \ 0.4 \ 0.421 \ 0.691 \ 0.332 \ 0.209)$ – проверка
 $m := \min(x) \quad m = 0.176 \quad x1 := \frac{x}{m}$
 $x1^T = (1 \ 2.266 \ 2.387 \ 3.916 \ 1.880 \ 1.185)$ – нормализованный вектор

Рис.2. Расчет в системе MathCAD соотношений торговых бюджетов 6 стран-участниц

Таким образом, сбалансированность торговли данных стран (торговой модели) может быть достигнута только в том случае, когда их государственные бюджеты находятся в соотношении 1 : 2,266 : 2,387 : 3,916 : 1,880 : 1,185.

Выводы. Модель международной торговли представлена в удобном и наглядном графическом виде.

С применением теории графов сформулирована и доказана теорема, позволяющая определить существование и единственность точного сбалансированного решения для общего случая неотрицательной структурной матрицы торговли. Разработана программа, использующая алгоритмы теории графов и позволяющая для каждого конкретного примера проверить существование такого решения. С помощью компьютерного пакета MathCAD рассчитано искомое соотношение между торговыми бюджетами стран-участниц.

Библиографический список

1. Землянухин В.Н. Задачи оптимизации на графах / В.Н. Землянухин, Л.Н. Землянухина. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2009. – С.23-43.
2. Кормен Т.Х. Алгоритмы: построение и анализ / Т.Х. Кормен [и др.] – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – С.622-640.
3. Солодовников А.С. Математика в экономике / А.С. Солодовников [и др.] – М.: Финансы и статистика, 2007. – С.126-180.

4. Судоплатов С.В. Дискретная математика / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – С.107-122.
5. Черняк А.А. Математика для экономистов на базе MathCAD / А.А. Черняк [и др.] – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – С.63-81.

References

1. Zemlyanuhin V.N. Zadachi optimizatsii na grafah / V.N. Zemlyanuhin, L.N. Zemlyanuhina. – Rostov n/D: Izdatel'skii centr DGTU, 2009. – S.23-43. – in Russian.
2. Kormen T.H. Algoritmy: postroyeniye i analiz / T.H. Kormen [i dr.] – M.: Izdatel'skii dom «Vil'yams», 2005. – S.622-640. – in Russian.
3. Solodovnikov A.S. Matematika v ekonomike / A.S. Solodovnikov [i dr.] – M.: Finansy i statistika, 2007. – S.126-180. – in Russian.
4. Sudoplatov S.V. Diskretnaya matematika / S.V. Sudoplatov, E.V. Ovchinnikova. – M.: INFRA-M; Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2007. – S.107-122. – in Russian.
5. Chernyak A.A. Matematika dlya ekonomistov na baze MathCAD / A.A. Chernyak [i dr.] – SPb.: BHV-Peterburg, 2003. – S.63-81. – in Russian.

Материал поступил в редакцию 04.10.2010.

T.A. MEDVEDEVA

THEORY OF GRAPHS ALGORITHMS IN THE INTERNATIONAL TRADE MODEL

Existence conditions and calculation modes of the exact balanced solution within the limits of international trade model are considered with the theory of graphs application.

Key words: weighted oriented graph, strongly connected components, international trade model, structural matrix of trade, model balance, vector of trading budgets, matrix equation.

МЕДВЕДЕВА Татьяна Александровна, доцент (2008) кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем (ПОВТиАС)» ДГТУ. Кандидат технических наук (2004). Окончила механико-математический факультет РГУ (1984).

Область научных интересов: математическое моделирование, теория графов, математическая экономика, динамические задачи теории упругости.

Автор 21 публикации.

baykov_da@aaanet.ru

Tatyana A. MEDVEDEVA, Associate professor of the Computer Software and Automated Systems Department, Don State Technical University (2008). Candidate of Science in Engineering (2004). She graduated from the Faculty of Mechanics and Maths, Rostov State University (1984).

Research interests – mathematical simulation, theory of graphs, mathematical economics, dynamic problems of the theory of elasticity.

Author of 21 scientific publications.