УДК 539.3

О.Г. ОСЯЕВ, Ю.А. ТАТУРИН, А.М. КОСТИН, А.В. ЖУКОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЮЩИХ НАГРУЗОК РЕОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложена модель поведения реологического тела (вязкоупругого материала, конструкции или системы) при управляющем воздействии нагрузки, действующей по заданному закону в течение некоторого времени.

Ключевые слова: *модель реологической среды, наследственные уравнения, полимерные композитные материалы.*

Введение. Для моделирования поведения сложных динамических систем необходимо вводить соответствующие сложные функции безразмерных параметров, отражающих весь комплекс действующих на объект нагрузок. Чтобы получить такие зависимости, целесообразно использовать методы масштабного моделирования, подробно описанные в литературе [1].

Постановка задачи. В качестве управляющей нагрузки удобно рассмотреть функцию гармонического изменения действующих напряжений $\sigma(t)$, в качестве управляемой функции отклика системы – соответствующую ей функцию деформаций, также изменяющуюся по гармоническому закону с запаздыванием по фазе, равным углу механических потерь $\Delta\varphi$.

Моделирование поведения реологической среды. Универсальной моделью поведения реологической среды являются наследственные уравнения типа Больцмана и Вольтерра для полимерных композитных материалов и подобных им реологических сред. Однако наиболее наглядно поведение систем при данных условиях можно описать с помощью динамических моделей вязкоупругости на основе трехпараметрического дифференциального операторного уравнения.

Примем закон гармонического нагружения реологического тела в виде функции:

$$\ddot{\varepsilon} + 2\frac{E}{\eta}\dot{\varepsilon} + 4\pi^2 f_0^2 \varepsilon = \Psi(t), \tag{1}$$

где $\Psi(t)$ – функция внешней нагрузки; ε – деформация тела; E/η – коэффициент затухания (отношение модуля упругости к коэффициенту вязкости); f_0 – собственная частота и период незатухающих колебаний.

Функцию внешнего воздействия в правой части уравнения (1) можно представить множеством способов, исходя из удобства рассмотрения задачи. В любом случае функция $\Psi(t)$ – это произведение:

$$\Psi(t) = K\widehat{N}, \tag{2}$$

где $\widehat{N}$ – параметр нагрузки; K – константы, характеризующие объект воздействия нагрузки.

Наиболее удобными можно считать следующие способы выражения функции $\Psi(t)$, используя основные положения теории размерностей [1]:

$$\Psi(t) = \frac{D}{Em}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{EV\rho}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{\lambda\eta V\rho}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{\eta V\rho}t_p\widehat{\sigma}(t); \tag{3}$$

$$\Psi(t) = \frac{E}{Dmt_p}\widehat{p}(t) = \frac{E}{DV\rho t_p}\widehat{p}(t) = \frac{E}{DV\rho t_p}\widehat{p}(t) = \frac{E\lambda}{DV\rho}\widehat{p}(t); \tag{4}$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{Sm}\widehat{W}(t) = \frac{1}{SV\rho}\widehat{W}(t) = \frac{1}{SV\rho}\widehat{Q}(t) = \frac{1}{\widehat{\alpha}SV\rho}\Delta\widehat{S}(t); \tag{5}$$

$$\Psi(t)=\frac{k}{Sm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{R}{S}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{k}{SV\rho}\Delta\widehat{T}(t); \qquad (6)$$

$$\Psi(t)=\frac{C}{Sm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{c_m}{S}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{S}}{Sm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{S}}{SV\rho}\Delta\widehat{T}(t); \qquad (7)$$

$$\Psi(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda ESm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda ESV\rho}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda\eta Sm}t_p\Delta\widehat{T}(t); \qquad (8)$$

$$\Psi(t)=\frac{\eta}{ESm}\widehat{P}(t)=\frac{\eta}{ESV\rho}\widehat{p}(t)=\frac{t_p}{SV\rho}\widehat{P}(t)=\frac{1}{\lambda SV\rho}\widehat{P}(t); \qquad (9)$$

$$\Psi(t)=\frac{1}{S}\widehat{D}(t)=\frac{t_p}{S}\dot{\widehat{D}}(t)=\frac{\eta}{ES}\dot{\widehat{D}}(t)=\frac{1}{\lambda S}\dot{\widehat{D}}(t); \qquad (10)$$

$$\Psi(t)=\frac{D}{Em}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{EV\rho}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{\lambda EV\rho}\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{EV\rho}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t); \qquad (11)$$

$$\Psi(t)=\frac{D}{\lambda Em}t_p\ddot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{\lambda EV\rho}t_p\ddot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D\eta}{\lambda E^2V\rho}\ddot{\widehat{\sigma}}(t). \qquad (12)$$

В соотношениях (3)-(12) введены следующие обозначения: D – жесткость тела; $\widehat{D}$ – поглощенная доза излучения; $\dot{\widehat{D}}$ – мощность поглощенной дозы излучения; $\widehat{\sigma}(t)$ – нагрузка, выраженная через напряжения; $\widehat{p}(t)$ – нагрузка, выраженная через механический импульс; $\widehat{W}(t),\widehat{Q}(t)$ – соответственно механическая энергия и тепловая; $\Delta\widehat{T}(t)$ – изменение температуры при нагреве тела; $\widehat{P}(t)$ – мощность механического воздействия; $\widehat{S},\Delta\widehat{S}(t)$ – энтропия и изменение энтропии; C,c_m – темплоемкости соответственно атомная и массовая; $\widehat{\alpha},\widehat{\lambda}_T$ – тепловое расширение и теплопроводность; S,V,ρ,m – площадь, объем, плотность и масса тела; λ,t_p – эмпирическая константа и время релаксации; $\dot{\widehat{\sigma}}(t),\ddot{\widehat{\sigma}}(t)$ – первая и вторая производные от действующей нагрузки; η – коэффициент вязкости.

Функцию нагрузки $\Psi(t)$ можно определить также с помощью операторного уравнения:

$$\Psi(t)=p_0\sigma+p_1\dot{\sigma}+p_2\ddot{\sigma}=K(p)\sigma(t). \qquad (13)$$

Преобразуем общую форму записи операторного уравнения к виду, соответствующему уравнению (1), используя коэффициенты:

$$p_2^*\ddot{\sigma}+2\frac{E}{\eta}p_1^*\dot{\sigma}+4\pi^2f_0^2p_0^*\sigma=\Psi(t). \qquad (14)$$

Выразим искомые коэффициенты через вспомогательные величины:

$$p_2=p_2^*, \qquad (15)$$

$$p_1=2\frac{E}{\eta}p_1^*, \qquad (16)$$

$$p_0=4\pi^2f_0^2p_0^*. \qquad (17)$$

Тогда:

$$p_2=p_2^*=\frac{D\eta}{\lambda E^2m}, \qquad (18)$$

$$p_1=2\frac{E}{\eta}p_1^*=\frac{D}{\lambda Em}, \qquad (19)$$

$$p_1^* = \frac{D\eta}{2\lambda E^2 m}, \tag{20}$$

$$p_0 = 4\pi^2 f_0^2 p_0^* = \frac{D}{Em}, \tag{21}$$

$$p_0^* = \frac{D}{Em\omega_0^2}. \tag{22}$$

Подставим полученные коэффициенты в (14):

$$\frac{D\eta}{\lambda E^2 m}\ddot{\sigma} + \frac{D}{\lambda Em}\dot{\sigma} + \frac{D}{Em}\sigma = \Psi(t). \tag{23}$$

Полученное уравнение показывает, что приведения ее к наиболее компактному виду удобно использовать в качестве функции нагрузки первое выражение в (3).

Выполним подстановку и преобразования уравнения (23):

$$\ddot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\dot{\sigma} + \frac{\lambda E}{\eta}\sigma = \frac{\lambda E}{\eta}\widehat{\sigma}(t) \tag{24}$$

или

$$\ddot{\sigma} + \lambda\dot{\sigma} + \lambda^2\sigma = \lambda^2\widehat{\sigma}(t). \tag{25}$$

Выразим функцию нагружения через параметры системы, соответствующие левой части уравнения (25), и уравнения для функции напряжений и ее производных, получим:

$$\ddot{\sigma} = \beta\lambda^2\sigma_0 e^{-\lambda t}. \tag{26}$$

Упростим выражение:

$$(1 - e^{\lambda t}) = \frac{1}{\beta\sigma_0 e^{-\lambda t}}\widehat{\sigma}(t), \tag{27}$$

согласно которому определим:

$$\widehat{\sigma}(t) = \beta\sigma_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t}). \tag{28}$$

Полученное уравнение характеризует релаксацию нагрузки после ее установления. В случае, когда нагрузка изменяется по некоторому временному закону, полное выражение функции нагружения примет вид:

$$\Psi(t) = \sigma(t) - \beta\sigma_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t}). \tag{29}$$

Такой вид функции нагружения наиболее компактен и удобен для анализа вязкоупругой среды. В большинстве случаев нагрузка $\Psi(t)$ изменяется по гармоническому закону. Обозначим максимальное значение возмущающей силы Ψ_m, тогда, при гармоническом законе изменения и в соответствии с условиями (3), можем записать:

$$\ddot{\varepsilon} + 2\lambda\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \Psi_m \frac{D}{Em}\cos\omega t \tag{30}$$

или в другом виде:

$$\ddot{\varepsilon} + 2\frac{E}{\eta}\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \Psi_m \frac{\omega_0^2}{\lambda\eta}\cos\omega t, \tag{31}$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/\widetilde{T}$ – угловая частота возмущающей силы и установившихся колебаний системы; $f, \widetilde{T}$ – частота и период нагружения.

Решением уравнений вида (30)-(31) является уравнение [2]:

$$\varepsilon = \Psi_m \cos(\omega t - \breve{\alpha}), \tag{32}$$

где $\breve{\alpha}$ – фазовый сдвиг резонатора (реологического тела) относительно возмущающей силы,

$$\breve{\alpha}=\mathrm{arctg}\frac{\omega\tilde{\beta}}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=\mathrm{arctg}\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2-\omega^2}=\mathrm{arctg}\frac{2\omega\lambda}{\frac{D}{m}-\omega^2}. \qquad (33)$$

Таким образом, если нагрузка выражается через напряжения тела, то запаздывание колебаний составляет определенную выше величину угла механических потерь $\Delta\varphi$, причем в большой степени зависящую от частоты вынуждающей силы ω и коэффициента затухания $\tilde{\beta}=\delta=\lambda=\frac{E}{\eta}=\frac{1}{t_p}$, $t_p>0$.

Следовательно, в данном случае $\breve{\alpha}=\Delta\varphi$. Тогда [3]:

$$\breve{\alpha}=\Delta\varphi=\mathrm{arctg}\frac{E''}{E'}=\mathrm{arctg}\frac{\sigma_0^*}{\varepsilon_0^*}. \qquad (34)$$

Преобразуя уравнения (33) и (28), получаем:

$$\Delta\varphi=\mathrm{arctg}\frac{2\omega E}{\eta\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=\mathrm{arctg}\frac{E}{\lambda t_p}\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)=\mathrm{arctg}\frac{\eta}{t_p}\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right). \qquad (35)$$

Согласно теории колебаний [2], амплитуда колебаний реологического тела изменяется от частоты возмущающей силы ω и коэффициента вязкого трения $\tilde{\beta}$:

$$Y_m(\hat{\sigma})=\Psi_m\left[m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\tilde{\beta}^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad (36)$$

или

$$Y_m(\hat{\sigma})=\frac{\Psi_m}{m}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\left(\frac{E}{\eta}\omega\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (37)$$

Запишем это выражение с учетом эмпирического коэффициента:

$$Y_m(\hat{\sigma})=\frac{\Psi_m}{m}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (38)$$

Анализ уравнений (36), (37) показывает, что при $\omega\to\omega_0$ и при $\tilde{\beta}\to 0$ амплитуда может превысить допустимые для реологического тела значения, определяющие прочность тела. Динамические условия разрушения можно получить из условий прочности. При заданной возмущающей силе $\Psi(t)$ и коэффициенте вязкого трения $\tilde{\beta}$ амплитуда $Y_m(\hat{\sigma})$ является функцией только угловой частоты нагрузки. При $\omega\approx\omega_0$ достигается резонанс. Для определения резонансной частоты необходимо найти максимум функций (36)-(38) и приравнять первую производную нулю, тогда

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\tilde{\beta}^2}{2m^2}}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}. \qquad (39)$$

Используя эмпирические константы и выражения связи с вязкоупругими характеристиками полимерных материалов, получаем:

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\frac{E^2}{\eta^2}}=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}=\sqrt{\frac{D}{m}-\frac{2}{t_p^2}}. \qquad (40)$$

Параметром вязкого трения является коэффициент затухания δ. При малых значениях δ величина $Y_m(\hat{\sigma})$ резко возрастает. Уравнения (36)-(38) справедливы и для случая статического нагружения тела при условии $\Psi_m\ (\omega = 0)$.

Чтобы найти выражение для резонансной амплитуды, подставим (40) в (36)-(38):

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}}\left(\omega_0^2 - \frac{\tilde{\beta}^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}\omega} = \frac{\Psi_m}{2m\delta\omega}, \qquad (41)$$

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}}\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}}\left(\frac{D}{m} - \frac{E^2}{\eta^2}\right), \qquad (42)$$

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{2m\lambda\omega} = \frac{\Psi_m}{2m\delta\omega} = \frac{\Psi_m\eta}{2mE\omega}. \qquad (43)$$

Величина угла механических потерь $\Delta\varphi$ характеризует основные свойства реологического тела, материала или системы, а ее выражения (34)-(35) позволяют получить обобщенную связь между характеристиками тела и параметрами нагрузки.

Выводы. Полученная динамическая модель вязкоупругого материала, конструкции или системы при управляющем воздействии нагрузки, действующей по заданному закону в течение некоторого времени, позволяет осуществить эффективный анализ поведения реологического тела в целях оценки изменения его напряженно-деформированного состояния.

Библиографический список

1. Шапалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций / Л.А. Шапалов. – М.: Машиностроение; 1990. – 288 с.

2. Кухлинг Х. Справочник по физике; пер. с нем. / Х. Кухлинг. – М.: Мир, 1982. – 520 с.

3. Колотилов А.В. Руководство к лабораторным работам по физико-механическим свойствам твердых топлив / А.В. Колотилов, А.Л. Бугримов, В.И. Добридень. – М.: МО, 1993. – 190 с.

References

1. Shapalov L.A. Modelirovanie v zadachah mehaniki elementov konstrukcii / L.A. Shapalov. – M.: Mashinostroenie; 1990. – 288 s. – in Russian.

2. Kuhling H. Spravochnik po fizike; per. s nem. / H. Kuhling. – M.: Mir, 1982. – 520 s. – in Russian.

3. Kolotilov A.V. Rukovodstvo k laboratornym rabotam po fiziko-mehanicheskim svoistvam tverdyh topliv / A.V. Kolotilov, A.L. Bugrimov, V.I. Dobriden'. – M.: MO, 1993. – 190 s. – in Russian.

Материал поступил в редакцию 15.-67.2010.

O.G. OSYAYEV, Y.A. TATURIN, A.M. KOSTIN, A.V. ZHUKOV

DYNAMIC MODELS OF RHEOLOGICAL SYSTEMS CONTROL LOADS

A behavioral model of rheological bodies (viscoelastic material, configuration or system) under load control action, operating in the predetermined fashion for a time, is offered.

Key words - rheological ambient model, hereditary equations, composite polymers.

ОСЯЕВ Олег Геннадьевич (р. 1963), старший преподаватель кафедры материаловедения Ростовского военного института ракетных войск, кандидат технических наук (1995), доцент (2003). Окончил Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск (1985).
Область научных интересов – численные и экспериментальные методы исследования прочностной надежности несущих конструкций летательных аппаратов.
Имеет 10 патентов на изобретение.
Автор более 100 публикаций.

osyevog@mail.ru

ТАТУРИН Юрий Александрович (р.1962), начальник факультета Ростовского военного института, соискатель Донского государственного технического университета (2008). Окончил Серпуховский военный институт ракетных войск (1985).
Область научных интересов – экспериментальные методы исследования прочностной надежности несущих конструкций летательных аппаратов.
Автор 20 публикаций.

Taturin@mail.ru

КОСТИН Алексей Михайлович (р. 1963), начальник отдела испытательного центра, соискатель Донского государственного технического университета (2008). Окончил Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск (1985).
Область научных интересов – методы исследования прочностной надежности несущих конструкций летательных аппаратов.
Имеет 1 патент на изобретение.
Автор 10 публикаций.

Renkel@mail.ru

ЖУКОВ Артур Владимирович (р. 1986), офицер отделения анализа результатов испытаний испытательного центра, соискатель Донского государственного технического университета (2009). Окончил Ростовский военный институт ракетных войск (2008).
Область научных интересов – оценка эксплуатационного ресурса летательных аппаратов.
Имеет 1 патент на изобретение.
Автор 3 публикаций.

Renkel@mail.ru, Тел. 8-962-661-20-41

Oleg G. OSYAYEV (1963), Senior lecturer of the Science of Materials Department, Rostov Military Institute of Rocket Forces. Candidate of Science in Engineering (1995), associate professor (2003). He graduated from Rostov Higher Military Command-Engineering School of Rocket Forces (1985).
Research interests - numerical and experimental research methods of aircraft load-carrying structures reliability.
Author of more than 100 scientific publications and 10 patents.

Yury A. TATURIN (1962), Head of the faculty, Rostov Military Institute of Rocket Forces. Ed.D. Candidate in Science, Don State Technical University. He graduated from Serpukhov Military Institute of Rocket Forces (1985).
Research interests - experimental methods of aircraft load-carrying structures reliability.
Author of 20 scientific publications.

Alexey M. KOSTIN, (1963), Head of the Test Centre Department, Ed.D. Candidate in Science, Don State Technical University. He graduated from Rostov Higher Military Command-Engineering School of Rocket Forces (1985).
Research interests - methods of aircraft load-carrying structures reliability.
Author of 10 scientific publications and 1 patent.

Arthur V. ZHUKOV (1986), officer of the Test Results Analysis Department, Test Centre, Ed.D. Candidate in Science, Don State Technical University. He graduated from Rostov Military Institute of Rocket Forces (2008.)
Author 6 scientific works and inventions.
Research interests - estimation of the working resource of the flying machines.
Author of 3 scientific publications and 1 patent for invention.