

УДК 539.3: 534.11

Т.А. АНИКИНА, И.В. БОГАЧЁВ, А.О. ВАТУЛЬЯН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БАЛОК

Предложено решение задачи об определении неоднородных реологических свойств балок на основе акустического метода и анализа амплитудно-частотных зависимостей. Получены операторные соотношения, связывающие искомые и заданные функции. Построен итерационный процесс, приведены результаты вычислительных экспериментов по определению неоднородных реологических свойств материалов для различных законов распределения искомым характеристик.

Ключевые слова: реологические свойства, балка, комплексный модуль, акустические методы, идентификация.

Введение. Материалы со сложными, в том числе неоднородными механическими свойствами [1-3] (полимер- и пьезокомпозиты, функционально-градиентные материалы и т.д.), широко распространены в различных отраслях (точное машиностроение, авиастроение, измерительная техника, биоинженерия и т.д.). Поэтому при производстве элементов конструкций из таких материалов и контроле качества их изготовления определение законов изменения теплофизических и механических свойств является весьма важной и актуальной задачей. Традиционные экспериментальные методы оценки реологических свойств таких материалов в рамках гипотезы однородности являются достаточно грубыми, следовательно, необходима разработка альтернативных неразрушающих методов идентификации неоднородных характеристик, позволяющая уточнить структуру неоднородности.

Предложенный метод исследования основан на аппарате обратных коэффициентных задач в механике деформируемого твердого тела и позволяет восстанавливать неизвестные одномерные функции по данным акустического зондирования, измеренным в некоторых точках исследуемого объекта [4]. Описание реологических свойств, как правило, осуществляется по модели стандартного вязкоупругого тела и ее обобщения на неоднородные материалы. В данной работе рассмотрен ряд задач о восстановлении комплексной функции, характеризующей неоднородные вязкоупругие свойства стержня при возбуждении изгибных колебаний для различных способов нагружения. Рассматриваемые задачи решаются с помощью итерационного алгоритма, основанного на аппарате интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода.

Постановка задачи и построение общей схемы исследования. Исследуется задача об изгибных колебаниях неоднородной вязкоупругой балки длиной l при различных способах возбуждения колебаний. Неоднородность механических свойств моделируется зависимостью мгновенного и длительного модулей упругости от продольной координаты x .

Уравнение установившихся колебаний в безразмерном виде после отделения временного множителя будет иметь вид [5]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(G(x, i\kappa) \frac{d^2 w(x, \kappa)}{dx^2} \right) - \kappa^4 w(x, \kappa) = q, \quad (1)$$

где $G(x, i\kappa) = \frac{i\tau\kappa g(x) + h(x)}{1 + i\tau\kappa}$ – неизвестная функция, характеризующая неоднородные реологические свойства, $E(x) = H(0)g(x)$, $H(x) = H(0)h(x)$ – мгновенный и длительный модули

упругости соответственно, которые могут быть как гладкими положительными функциями, так и иметь конечное число разрывов первого рода (что моделирует слоистые структуры).

Здесь также введены параметры: $\kappa^4 = \frac{\rho \omega^2 Fl^4}{JH(0)}$ - безразмерная частота и $\tau = n \sqrt{\frac{JH(0)}{\rho Fl^4}}$ -

безразмерное время релаксации.

Для уравнения (1) рассмотрены три задачи, отличающиеся как способом нагружения, так и дополнительной информацией, используемой для процедуры идентификации.

Граничные условия для различных способов нагружения можно представить в следующей форме:

$$1) w(0, \kappa) = 0, \quad w'(0, \kappa) = 0, \quad G(1, i\kappa)w''(1, \kappa) = 0, \quad (G(1, i\kappa)w''(1, \kappa))' = 1 \quad (2)$$

для консольно закрепленной балки, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой при отсутствии поперечной нагрузки ($q = 0$);

$$2) w(0, \kappa) = 0, \quad w'(0, \kappa) = 0, \quad G(1, i\kappa)w''(1, \kappa) = 1, \quad (G(1, i\kappa)w''(1, \kappa))' = 0 \quad (3)$$

для консольно закрепленной балки, нагруженной на свободном конце сосредоточенным моментом при отсутствии поперечной нагрузки ($q = 0$);

$$3) w(0, \kappa) = 0, \quad w(1, \kappa) = 0, \quad w''(0, \kappa) = 0, \quad w''(1, \kappa) = 0 \quad (4)$$

для шарнирно опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой $q = q_0 \delta(x - x_0)$.

Соответствующие краевые задачи при заданных законах неоднородности могут быть решены лишь численно. Для этого был использован метод предварительного сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Введем вспомогательную функцию $v(x)$ следующим образом: $v(x, \kappa) = G(x, i\kappa) \frac{d^2 w(x, \kappa)}{dx^2}$.

Перейдем от исходного уравнения (1) к системе уравнений второго порядка относительно функций w и v с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{d^2 w(x, \kappa)}{dx^2} = \frac{v(x, \kappa)}{G(x, i\kappa)}, \\ \frac{d^2 v(x, \kappa)}{dx^2} = \kappa^4 w(x, \kappa) + q. \end{cases} \quad (5)$$

Интегрируя уравнения (5) два раза по переменной x , получаем:

$$\begin{cases} w(x, \kappa) = \int_0^x (x - \xi) \frac{v(\xi, \kappa)}{G(\xi, i\kappa)} d\xi + A_1 x + A_2, \\ v(x, \kappa) = \kappa^4 \int_0^x (x - \xi) w(\xi, \kappa) d\xi + q + B_1 x + B_2. \end{cases} \quad (6)$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 находим из граничных условий (2)-(4). Подставляя выражение для функции $v(x)$ и меняя порядок интегрирования, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения функции $w(x, \kappa)$:

$$w(x, \kappa) = \kappa^4 \int_0^1 w(\eta, \kappa) K(x, \eta) d\eta + f(x, \kappa). \quad (7)$$

В зависимости от граничных условий, ядро и правая часть имеют различный вид; для упругого случая этот вид представлен в работе [6].

Для решения интегрального уравнения (7) использован метод коллокаций [7], с помощью которого задача сведена к решению линейной алгебраической системы относительно узловых неизвестных. На основе такого подхода проведен ряд вычислительных экспериментов по

решению прямой задачи для различных способов нагружения (2)-(4) и различных типов неоднородности; получены необходимые для решения обратной задачи амплитудно-частотные зависимости.

При постановке обратной задачи считаем известной дополнительную информацию в некотором частотном диапазоне $[\kappa_1, \kappa_2]$: 1) о функции смещения свободного конца балки $w(1, \kappa) = f_1(\kappa)$; 2) об угле поворота свободного конца $w'(1, \kappa) = f_2(\kappa)$; 3) о функции смещения в точке приложения нагрузки $x_0 \in [0, 1]$ $w(x_0, \kappa) = f_3(\kappa)$.

Сформулированные математические задачи на основе (1)-(4) об определении комплекснозначной функции $G(x, i\kappa)$ по описанной дополнительной информации представляют собой нестандартные обратные коэффициентные задачи, являются нелинейными и некорректными проблемами и при их решении необходимо использовать регуляризованные подходы. Нестандартность изучаемых обратных задач состоит в том, что требуется определять комплексные функции координаты по заданной комплексной функции частоты колебаний; существующие современные способы анализа подобных задач существенно зависят от вещественности определяемых функций [4].

Для построения комплексных операторных соотношений, которые связывают искомую и заданную функции, рассмотрим слабую постановку задачи. Пусть $v(x, \kappa) = \overline{w(x, \kappa)}$ – гладкая функция, сопряженная к $w(x, \kappa)$ [8]. Умножим ее на уравнение (1) и проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[0, 1]$. Далее, осуществляя интегрирование по частям и используя граничные условия, получаем общее нелинейное операторное уравнение, связывающее функции $G(x, i\kappa)$, $w(x, \kappa)$, $f(\kappa)$, где $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$:

$$\int_0^1 (G(x, i\kappa) w''(x, \kappa) \overline{w''(x, \kappa)} - \kappa^4 w(x, \kappa) \overline{w(x, \kappa)}) dx = \overline{f(\kappa)}. \quad (8)$$

Пусть известно некоторое начальное приближение $G_0(x, i\kappa)$ решения уравнения (8). Осуществим процедуру линеаризации [9], представив функции в виде

$$g(x, i\kappa) = g_0(x, i\kappa) + \varepsilon g_1(x, i\kappa), \quad h(x, i\kappa) = h_0(x, i\kappa) + \varepsilon h_1(x, i\kappa),$$

$$G(x, i\kappa) = G_0(x, i\kappa) + \varepsilon G_1(x, i\kappa), \quad w(x, \kappa) = w_0(x, \kappa) + \varepsilon w_1(x, \kappa),$$

где ε – формальный параметр.

Собирая слагаемые при одинаковых степенях ε и интегрируя полученные равенства по частям с сохранением главного по порядку слагаемого, получаем:

$$\int_0^1 G_1(x, i\kappa) w_0''(x, \kappa) \overline{w_0''(x, \kappa)} dx = \overline{f(\kappa)} - \overline{f_0(\kappa)}, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \quad (9)$$

где $\int_0^1 [G_0(x, i\kappa) w_0''(x, \kappa) \overline{w_0''(1, \kappa)} - \kappa^4 w_0(x, \kappa) \overline{w_0(1, \kappa)}] dx = \overline{f_0(\kappa)}.$

Таким образом, сформулировано комплексное операторное соотношение (9), связывающее заданные и искомые поправки. Полученное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с гладким ядром относительно неизвестных функций первого приближения.

Отделяя вещественную и мнимую части для функции первого приближения комплексного модуля, получаем из интегрального уравнения (9) систему вещественных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^1 (g_1(x)z_2(\kappa) + h_1(x)z_1(\kappa))w_0''(x, \kappa)\overline{w_0''(x, \kappa)}dx = \operatorname{Re}(\overline{f(\kappa)} - \overline{f_0(\kappa)}), \\ \int_0^1 (g_1(x) - h_1(x))z_3(\kappa)w_0''(x, \kappa)\overline{w_0''(x, \kappa)}dx = \operatorname{Im}(\overline{f(\kappa)} - \overline{f_0(\kappa)}), \end{cases} \quad (10)$$

где введены обозначения $z_1(\kappa) = \frac{1}{1 + \tau^2 \kappa^4}$, $z_2(\kappa) = \frac{\tau^2 \kappa^4}{1 + \tau^2 \kappa^4}$, $z_3(\kappa) = \frac{\tau \kappa^2}{1 + \tau^2 \kappa^4}$.

На основе системы операторных соотношений (10) может быть построен итерационный процесс уточнения неизвестных функций, основанный на приближенном решении уравнений (10) с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова [10].

В соответствии с этим для различных типов граничных условий i -й шаг итерационного процесса описывается следующими операторными уравнениями:

$$\begin{cases} \int_0^1 (g_1^i(x)z_2(\kappa) + h_1^i(x)z_1(\kappa))w_0^{i''}(x, \kappa)\overline{w_0^{i''}(x, \kappa)}dx = \operatorname{Re}(\overline{f(\kappa)} - \overline{f_0^i(\kappa)}), \\ \int_0^1 (g_1^i(x) - h_1^i(x))z_3(\kappa)w_0^{i''}(x, \kappa)\overline{w_0^{i''}(x, \kappa)}dx = \operatorname{Im}(\overline{f(\kappa)} - \overline{f_0^i(\kappa)}), \end{cases} \quad (11)$$

причем $h_0^{i+1}(x) = h_0^i(x) + h_1^i(x)$, $g_0^{i+1}(x) = g_0^i(x) + g_1^i(x)$.

Начальное приближение $G_0(x, i\kappa)$ построено в классе линейных комплексных ограниченных функций, коэффициенты которых определены из условия минимума функционала невязки:

$$\Phi = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |w(x_0, \kappa) - f(\kappa)|^2 d\kappa, \quad (12)$$

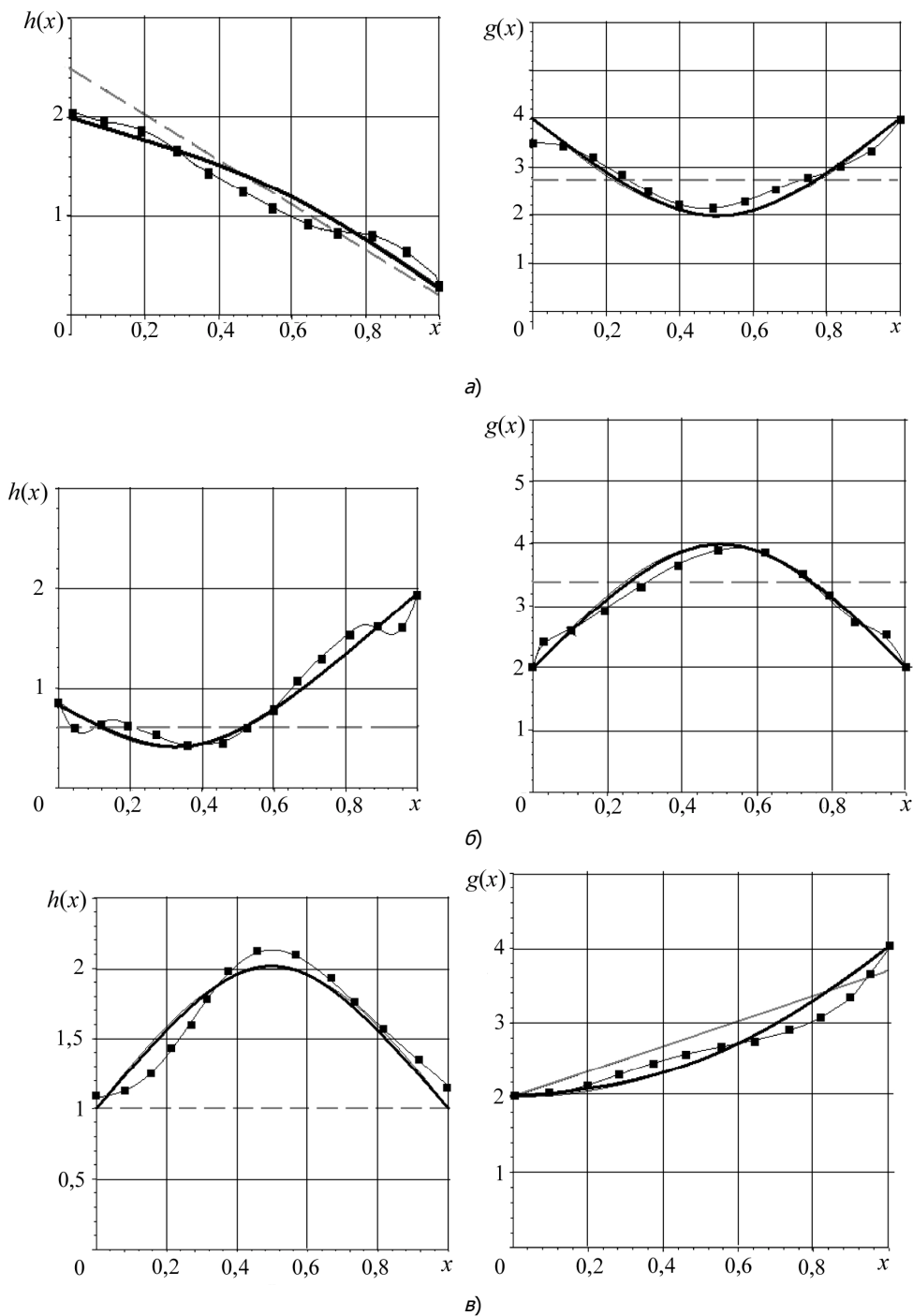
на некотором компактном множестве в четырехмерном пространстве, где $w(x_0, \kappa)$ – функция смещения в заданной точке стержня при некотором законе изменения комплексного модуля. Процедура минимизации функционала невязки осуществлена с использованием эволюционного алгоритма [11]. На каждом шаге построенного процесса посредством решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода было найдено новое значение w_0^i , с помощью которого вычислена правая часть интегрального уравнения Фредгольма первого рода и его ядро в уравнениях (11). Результатом решения этого уравнения стала поправка к неизвестной функции, и с ее учетом был проведен следующий этап итерационного процесса; процесс останавливался при достижении необходимой точности в функционале (12).

Численные результаты исследования. На основе предложенной схемы исследования для различных типов краевых задач по заданной амплитудно-частотной характеристике проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению функций $g(x)$, $h(x)$, характеризующих законы изменения мгновенного и длительного модулей. Расчеты проведены для стержня из вязкоупругого материала в случае монотонных и немонотонных законов изменения реологических свойств [7, 11, 12].

Для краевой задачи (1), (2): $h(x) = 3 - e^x$, $g(x) = 2 \cos(\pi(x + 0,5)) + 4$, начальное приближение $h_0(x) = 0,6 + x$, $g_0(x) = 1,75x + 0,75$.

По рассчитанным амплитудно-частотным характеристикам частотный диапазон выбран следующим образом: $[\kappa_1; \kappa_2] = [2,5; 5,6]$.

Для достижения точности $1 \cdot 10^{-4}$ при минимизации функционала (12) потребовалось 42 итерации. Значение параметра регуляризации на последнем шаге: $\alpha = 6,1625 \cdot 10^{-6}$ (см. рисунок, а).



Результат восстановления $h(x)$ и $g(x)$:

а – для задачи (1), (2); б – для задачи (1), (3); в – для задачи (1), (4); — — исходная функция;
 - - - - начальное приближение; -♦- - восстановленная функция.

Время релаксации $\tau = 0,1$

Для краевой задачи (1), (3): $h(x) = 1,4 - \cos(\pi x - 1)$, $g(x) = 2 \cos(\pi(x + 1,5)) + 2$, начальное приближение $h_0(x) = 0,6$, $g_0(x) = 3,4$. По рассчитанным амплитудно-частотным характеристикам частотный диапазон выбран следующим образом: $[\kappa_1; \kappa_2] = [3; 5,5]$. Для достижения точности $1 \cdot 10^{-4}$ при минимизации функционала (12) потребовалось 32 итерации. Значение параметра регуляризации на последнем шаге: $\alpha = 3,9812 \cdot 10^{-6}$ (см. рисунок, б).

Для краевой задачи (1), (4): $x_0 = 0,25$, $h(x) = 1 + \cos((x + 1,5)\pi)$, $g(x) = 2 + 2x^2$, начальное приближение $h_0(x) = 1$, $g_0(x) = 1,7x + 2$, частотный диапазон $[\kappa_1; \kappa_2] = [4,4; 7,6]$. Для достижения точности $1 \cdot 10^{-4}$ в функционале (9) потребовалось 20 итераций. Значение параметра регуляризации на последнем шаге: $\alpha = 1,4946 \cdot 10^{-5}$ (см. рисунок, в).

Выводы. На основе сформулированной строгой постановки обратной задачи для дифференциального оператора четвертого порядка с помощью анализа колебаний балки решена задача об определении функций, характеризующих неоднородные реологические свойства материала. Представлены операторные соотношения, связывающие искомые и заданные функции при анализе установившихся колебаний. Получено решение поставленной задачи на основе итерационного процесса, сочетающего на каждом шаге решение прямой задачи и определение поправок на основе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Представлены примеры определения реологических свойств для различных законов изменения комплексного модуля по длине стержня (экспоненциальных и немонотонных), для различных типов граничных условий. Для монотонных законов максимальная погрешность реконструкции не превышает 5%, а для немонотонных законов максимальная погрешность реконструкции достигает 15%, причем максимальное отклонение восстановленной функции от точного решения наблюдалось на незакрепленном конце в задачах (1), (2) и (1), (3), и в точке приложения нагрузки в задачах (1), (4). Представленные численные результаты определения неизвестных функций по данным частотного зондирования, основанные на формулировке итерационного процесса, позволяют говорить о работоспособности предложенного метода в достаточно большой серии вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института (Владикавказ).

Библиографический список

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
2. Жаркан М. Упругие константы трехмерного тела трансверсально-армированного слоистого композиционного материала / М. Жаркан // Вопр. проектирования и пр-ва конструкций летат. аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. – Вып.2(58), Т.Х. – С.16-24.
3. Бардзоказ Д.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзоказ, А.И. Злобин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
4. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.
5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

6. Аникина Т.А. Акустические методы контроля регенерации костной ткани / Т.А. Аникина, А.О. Ватульян // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2007. – №3. – С.10-17.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 632 с.
8. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости / А.О. Ватульян // Докл. Рос. акад. наук. – 2005. – Т.405(3). – С.343-345.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. – 512 с.
10. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
11. Баранов И.В. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред / И.В. Баранов, А.О. Ватульян, А.Н. Соловьёв // Вычисл. технологии. – 2006. – №3. – С.14-26.
12. Аникина Т.А. Об идентификации характеристик костной ткани на основе акустических методов / Т.А. Аникина, И.В. Богачёв, А.О. Ватульян // X всерос. конф. по биомеханике «Биомеханика – 2010». – Саратов, 2010. – С.24-25.

Материал поступил в редакцию 01.11.10.

References

1. Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov / R. Kristensen. – M.: Mir, 1974. – 338 s. – In Russian.
2. Jarkan M. Uprugie konstanty trehmernogo tela transversal'no-armirovannogo sloistogo kompozicionnogo materiala / M. Jarkan // Vopr. proektirovaniya i pr-va konstrukcii letat. apparatov: sb. nauch. tr. Nac. aerokosm. un-ta im. N.E. Jukovskogo «HAI». – 2009. – Vyp.2(58), T.X. – S.16-24. – In Russian.
3. Bardzokaz D.I. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov v kompozicionnykh materialah periodicheskoi struktury / D.I. Bardzokaz, A.I. Zlobin. – M.: Editorial URSS, 2003. – 376 s. – In Russian.
4. Vatul'yan A.O. Obratnye zadachi v mehanike deformiruемого tverdogo tela / A.O. Vatul'yan. – M.: Fizmatlit, 2007. – 223 s. – In Russian.
5. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruemykh sistem / A.P. Filippov. – M.: Mashinostroenie, 1970. – 736 s. – In Russian.
6. Anikina T.A. Akusticheskie metody kontrolya regeneracii kostnoi tkani / T.A. Anikina, A.O. Vatul'yan // Ekol. vestn. nauch. centrov ChES. – 2007. – №3. – S.10-17. – In Russian.
7. Bahvalov N.S. Chislennye metody / N.S. Bahvalov. – M.: Laboratoriya bazovykh znanii, 2002. – 632 s. – In Russian.
8. Vatul'yan A.O. Integral'nye uravneniya v obratnykh zadachah opredeleniya koefficientov differencial'nykh operatorov teorii uprugosti / A.O. Vatul'yan // Dokl. Ros. akad. nauk. – 2005. – T.405(3). – S.343-345. – In Russian.
9. Mihlin S.G. Variacionnye metody v matematicheskoi fizike / S.G. Mihlin. – M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1970. – 512 s. – In Russian.
10. Tihonov A.N. Metody resheniya nekorrektnykh zadach / A.N. Tihonov, V.Ya. Arsenin. – M.: Nauka, 1979. – 288 s. – In Russian.
11. Baranov I.V. Ob odnom geneticheskome algoritme i ego primenenii v obratnykh zadachah identifikacii uprugih sred / I.V. Baranov, A.O. Vatul'yan, A.N. Solov'ev // Vychisl. tehnologii. – 2006. – №3. – S.14-26. – In Russian.
12. Anikina T.A. Ob identifikacii harakteristik kostnoi tkani na osnove akusticheskikh metodov / T.A. Anikina, I.V. Bogachev, A.O. Vatul'yan // X vseros. konf. po biomehanike «Biomehanika – 2010». – Saratov, 2010. – S.24-25. – In Russian.

T.A. ANIKINA, I.I. BOGACHEV, A.O. VATULYAN

ON DEFINITION OF BEAMS INHOMOGENEOUS RHEOLOGICAL PROPERTIES

The problem solution of the definition of the beams inhomogeneous rheological properties on the basis of the acoustic method and the analysis of amplitude-frequency dependences is presented. The operator equations linking required and prescribed functions are presented. The iterative process is constructed, computational experiments results of the definition of the beams inhomogeneous rheological properties for various laws of distribution of required features are presented.

Key words: *rheological properties, beam, complex module, acoustic methods, identification.*

АНИКИНА Татьяна Александровна, заведующая отделением в Авиационном колледже Донского государственного технического университета. Окончила Ростовский государственный университет (2007).

Область научных интересов: обратные коэффициентные задачи, задачи идентификации механических характеристик твердых тел.

Автор 11 научных публикаций.

ATanusha@mail.ru

БОГАЧЁВ Иван Викторович (р. 1989), студент факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

Область научных интересов: задачи идентификации механических характеристик материалов, вычислительная механика.

Автор 6 научных публикаций.

bogachev89@yandex.ru

ВАТУЛЬЯН Александр Ованесович (р. 1953), заведующий кафедрой «Теория упругости» Южного федерального университета, доктор физико-математических наук (1993), профессор (1995). Окончил Ростовский государственный университет (1975).

Область научных интересов: обратные коэффициентные, граничные и геометрические задачи теории упругости, механика связанных полей, биомеханика.

Автор 310 научных публикаций.

vatulyan@math.rsu.ru

Tatyana A. ANIKINA, Head of the Department, College of Aeronautics, Don State Technical University. She graduated from Rostov State University (2007).

Research interests: inverse coefficient problems, problems of solid mechanical characteristics identification.

Author of 11 publications.

Ivan V. BOGACHEV (1989), student of the Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, South Federal University.

Research interests: problems of solid mechanical characteristics identification, computational mechanics.

Author of 6 publications.

Alexander O. VATULYAN (1953), Head of the Elasticity Theory Department, South Federal University. PhD in Physics and Maths (1993), Professor (1995). He graduated from Rostov State University (1975).

Research interests: inverse coefficient, boundary and geometric problems of elasticity theory, coupled fields mechanics, biomechanics.

Author of 310 publications.