МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 004.942 DOI 10.12737/22161

Автомодельность задачи тепловой конвекции, осредненной по тонкому слою*

Л. В. Сахарова**

Ростовский государственный экономический университет, г. Ростов–на-Дону, Российская Федерация

Self-similarity problem of thermal convection averaged over a thin layer ***

L. V. Sakharova**

Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russian Federation

В работе получены три типа автомодельных замен для задачи тепловой конвекции, осредненной по тонкому слою испаряющейся жидкости и являющейся моделью высыхания невязкой, нетемпературопроводной протяженной капли. Для построения автомодельных решений в работе выполнен переход к инвариантам Римана. Автомодельные решения представляют собой функции времени и координаты, определяющие высоту капли, а также скорость массопереноса и тепловой поток, осредненные по толщине капли. Осуществлена классификация найденных автомодельных решений на основании поведения функции, описывающей высоту капли в процессе испарения-конденсации. Выявлена область применимости различных автомодельных решений к моделированию различных ситуаций высыхания капель и пленок.

Three types of self-simulated replacements for the problem of thermal convection averaged over a thin layer of the vaporizing liquid are presented. It is a model of the drying non-viscous extended droplet specified by the non-thermal diffusivity. For the construction of self-simulated solutions, a transition to the Riemann invariants is performed. Self-simulated solutions are functions of time and position determining the drop height, the mass-transfer rate and the heat flow averaged over the drop thickness. The found self-simulated solutions are classified on the basis of the behavior of the function that describes the drop height under the evaporation-condensation. The domains of applicability of various self-simulated solutions to the simulation of different situations of drying drops and films are identified.

Ключевые слова: математическая модель, автомодельные решения, капля, испарение-конденсация.

Keywords: mathematical model, self-simulated solutions, drop, evaporation- condensation.

Введение. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса при испарении-конденсации капель жидкостей применимо в настоящее время во множестве современных технологий: медицинской диагностике [1], фармакологических исследованиях [2], кристаллографии белка [3], для растягивания ДНК и РНК [4], полиграфии [5], создании структурированных поверхностей [6], производстве наноструктур [7], микроматриц, в том числе однокристальных лабораторий (labs-on-a-chip) [8]. В связи с этим в последние годы разработано большое количество моделей, описывающих высыхание капель, либо пленок жидкостей. Для математического моделирования процессов в испаряющейся капле применяются различные подходы: в первую очередь, те или иные следствия системы уравнений Навье-Стокса, а также метод осреднения трехмерных задач по высоте пленки, либо капли испаряющейся жидкости.

Метод осреднений (аналог уравнений мелкой воды) для моделирования высыхающих капель и пленок использован в работах [9–12]. Несмотря на существенные успехи при моделировании конкретных ситуаций в физике, медицине и биологии, используемый подход имеет ряд дефектов, таких как необходимость задания плотности пара на поверхности капли (на основе эмпирических предположений), потребность во множестве локальных допущений, понижающих уровень общности модели, а также преимущественно численный подход к исследованию получающихся начально-краевых задач. Процесс осреднения, используемый в перечисленных работах также проводится на основе упрощающих предположений и при отсутствии четких математических обоснований.

В работе [13] разработан универсальный математический аппарат для исследования процессов тепло- и

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

** E-mail: Sakharova@mail.ru

*** The research is done within the frame of the independent R&D.

массопереноса в испаряющихся каплях и жидкостях. Введен в рассмотрение оператор осреднения, на основании свойств которого осуществлено осреднение и замыкание приближения Обербека-Буссинеска, наиболее часто используемого для описания гравитационной конвекции в жидкости. Построен ряд математически корректных моделей высокого уровня общности, среди которых наиболее существенной является задача тепловой конвекции, осредненная по тонкому слою испаряющейся жидкости:

$$h_t + div(h^2 s) = -V_0 \varphi; \tag{1}$$

$$s_t - \frac{2}{3} hs div s + \frac{4}{3} hs \nabla s = 0; \tag{2}$$

$$\varphi_t - \frac{2}{3} h\varphi div s + \frac{4}{3} hs \nabla \varphi = 0; \tag{3}$$

$$c_t + hs \nabla c = D \Delta c. \tag{4}$$

Здесь: h — переменная во времени высота капли, зависящая от координат; s, φ и c — осредненные по толщине капли скорость массопереноса, тепловой поток и концентрация твердой примеси в капле. Величина V_0 — безразмерный параметр. Система (1)–(4), описывающая процесс испарения в общем случае, должна быть дополнена начально-краевыми условиями, определяемыми из физических допущений для каждого конкретного случая. Начальные условия могут определять начальную форму либо высоту капли, а также осредненные значения скорости массопереноса, теплового потока и концентрации примеси в начальный момент времени. Выбор краевых условий существенно зависит от физических предположений, положенных в основу конкретной модели. В зависимости от степени гладкости основания, может иметь место пиннинг границы трехфазного контакта (ее фиксация на шероховатом основании), либо депиннинг (ее отрыв на гладком основании — например, слюде, тефлоне). Угол смачивания поверхности будет острым для смачиваемой (гидрофильной) поверхности и тупым — для несмачиваемой (гидрофобной); кроме того, во втором случае изначально будет иметь место «опрокидывание» профиля капли, что существенно усложняет решение задачи. В случае, когда капля примыкает к жесткой стенке, на ней также необходимо задать угол смачивания или (и) условия теплоизолированности и непроницаемости для потока жидкости.

Как отмечается в работе [13], одним из вариантов упрощения процедуры получения решений является рассмотрение пространственно-одномерных моделей — для вращательно-симметричной капли или «протяженной капли», бесконечно вытянутой в одном из горизонтальных направлений. Оба случая соответствуют общепринятым упрощениям при моделировании капель и тонких пленок. Вращательно-симметричная модель капли отвечает случаю небольших по размеру капель (то есть радиус капли соразмерим с ее тощиной), принимающих под влиянием сил поверхностного натяжения осесимметричную форму. В этом случае в уравнениях модели отсутствует зависимость функций от полярного угла и размерность задачи понижается. Это позволяет построить аналитические решения задачи для осевого сечения капли. Модель «протяженной» капли соответствует случаю тонкой пленки, обладающей относительно большой протяженностью и однородностью в одном из направлений (например, в направлении оси Oy). Предполагается, что все физические и геометрические характеристики капли зависят только от переменной x, а решения рассматриваются в сечении капли, перпендикулярном оси Oy. Следует отметить, что все краевые эффекты на линии трехфазного контакта (жидкость-воздух-твердое основание), возникающие при испарении капли, должны иметь качественное соответствие для обоих моделей.

В работе осуществлено решение задачи (1)–(4) для вращательно-симметричной капли методом характеристик в сочетании с численными методами. Установлен ряд интересных эффектов, в том числе зависимость от времени формы профиля поверхности капли в окрестности точки трехфазного контакта. Установлено, что в начальный момент времени форма профиля близка к линейной; однако с течением времени наблюдается ее искривление, а в некоторый фиксированный момент времени происходит «опрокидывание» профиля капли. В работе [13] показано также, что сингулярности решений, возникающих при $h \to 0$ для осредненных решений, являются мнимыми и устраняются предельным переходом.

Соответственно, актуальной проблемой является получение аналитических решений для задачи (1)–(4), в первую очередь, ее автомодельных решений [14–15]. В соответствии с [14], явление рассматривается как автомодельное, если распределения его характеристик в различные моменты времени получаются друг из друга преобразованием подобия. Обнаружение автомодельности упрощает вычисления и представление характеристик явления, развивающегося во времени.

Целью настоящей работы является построение автомодельных решений задачи тепловой конвекции и их исследования с точки зрения применимости к моделированию различных ситуаций испарения-конденсации жидкости. Для построения автомодельных решений в работе выполнен переход к инвариантам Римана. Получены определяющие соотношения, позволившие построить три типа автомодельных замен, понижающих размерность задачи и сводящих ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для каждой из систем ОДУ найдены различные аналитические решения, определяющие высоту капли h, осредненные по толщине капли скорость массопереноса s и тепловой поток φ как функции времени t и координаты x. Классификация найденных автомодельных решений осуществлена на основании поведения функции h, описывающей поведение поверхности капли в процессе испарения-конденсации. Выявлена область применимость различных автомодельных решений к моделированию различных ситуаций, таких как пиннинг (закрепленние границы трехфазного контакта, вызванное шероховатостью основания) либо депиннинг (отрыв границы на идеально гладком основании, на котором располагается капля), различная геометрическая форма поверхности капли (линейная, выпуклая, вогнутая) и т.п.

Задача для протяженной волны в инвариантах Римана. Для протяженной капли, то есть бесконечно вытянутой в одном из горизонтальных направлений, задача тепловой конвекции (1)–(4), принимает одномерный вид:

$$h_t + 2hsh_x + h^2 s_x = -V_0\varphi; \tag{5}$$

$$s_t + \frac{2}{3}hss_x = 0; \tag{6}$$

$$\varphi_t - \frac{2}{3}h\varphi s_x + \frac{4}{3}hs\varphi_x = 0. \tag{7}$$

Осуществим переход к инвариантам Римана R, P, Q, связанным со старыми переменными соотношениями:

$$h = RP^{-3/4}; \qquad s = P; \qquad \varphi = QP. \tag{8}$$

В результате система (5)–(7) принимает следующий вид:

$$R_t + 2RP^{1/4}R_x = -V_0 PQ; \tag{9}$$

$$P_t + \frac{2}{3}RP^{1/4}P_x = 0; \tag{10}$$

$$Q_t + \frac{4}{3}RP^{1/4}Q_x = 0. \tag{11}$$

Для построения автомодельных замен выполним переход к функциям $\overline{R}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$:

$$R = \alpha\overline{R}, \qquad P = \beta\overline{P}, \qquad Q = \gamma\overline{Q}, \qquad t = \delta\overline{t}, \qquad x = \varepsilon\overline{x}, \tag{12}$$

где α, β, γ, δ, ε — параметры. При подстановке соотношений (12) в систему (9)–(11) она приводится к следующему виду:

$$\frac{\alpha}{\delta}\overline{R}_t + 2\frac{\alpha^2\beta^{1/4}}{\varepsilon}\overline{R}\cdot\overline{P}^{1/4}\cdot\overline{R}_x = -V_0\beta\gamma\overline{P}\cdot\overline{Q}; \tag{13}$$

$$\frac{\beta}{\delta}\overline{P}_t + \frac{2}{3}\frac{\alpha\beta^{5/4}}{\varepsilon}\overline{R}\cdot\overline{P}^{1/4}\cdot\overline{P}_x = 0; \tag{14}$$

$$\frac{\gamma}{\delta}\overline{Q}_t + \frac{4}{3}\frac{\alpha\beta^{1/4}\gamma}{\varepsilon}\overline{R}\cdot\overline{P}^{1/4}\cdot\overline{Q}_x = 0. \tag{15}$$

Инвариантность системы (13)–(15) по отношению к (9)–(11) обеспечивается выполнением равенств:

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha^2\beta^{1/4}}{\varepsilon} = \beta\gamma; \qquad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha\beta^{5/4}}{\varepsilon}; \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\beta^{1/4}\gamma}{\varepsilon}, \tag{16}$$

На основании (16) получим два определяющих соотношения:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha\beta^{1/4}}; \qquad \alpha = \beta\gamma\delta. \tag{17}$$

Соотношения (17) позволяют получить автомодельные замены, понижающие размерность исходной задачи (5)–(7) и приводящие ее к системам ОДУ. Рассмотрим основные три типа автомодельных замен и соответствующих им автомодельных решений задачи тепловой конвекции.

Автомодельная замена 1. Полагая $\alpha = \beta = 1$, из уравнений (17) получим:

$$\delta = \varepsilon, \qquad \gamma = \frac{1}{\delta}. \tag{18}$$

Соотношения (18) указывают на существование автомодельных замен задачи:

$$\frac{x}{t} = z, \qquad Qt = u, \tag{19}$$

где u и t — новые переменные. Действительно, применение (19) к (9)–(11) сводит систему дифференциальных уравнений в частных производных к следующей системе ОДУ:

$$R_z\left(2RP^{1/4} - z\right) = -V_0 Pu; \tag{20}$$

$$P_z\left(\frac{2}{3}RP^{1/4} - z\right) = 0; \tag{21}$$

$$-u + u_z\left(-z + \frac{4}{3}RP^{1/4}\right) = 0; \tag{22}$$

Система (20)–(22) имеет два решения, определяемых уравнением (21).

Решение 1.1. Пусть

$$RP^{1/4} = \frac{3}{2}z. \tag{23}$$

Подстановка (23) в уравнение (22) приводит к решению вида:

$$u = C_1 z, \tag{24}$$

C_1 — константа интегрирования, а подстановка (24) в (20) позволяет получить решение системы в инвариантах Римана:

$$R = \left(C_2 - \frac{81}{32}C_1 V_0 z^5\right)^{1/5}, \tag{25}$$

$$P = \frac{81}{16}z^4\left(C_2 - \frac{81}{32}C_1 V_0 z^5\right)^{-4/5}, \tag{26}$$

$$Q = C_1\frac{z}{t}. \tag{27}$$

Вернемся от инвариантов к обычным переменным, и на основании (25)–(27) получим решение исходной системы (5)–(7):

$$h = \frac{8}{27tx^3}\left(C_2 t^5 - \frac{81}{16}C_1 V_0 x^5\right)^{4/5}, \tag{28}$$

$$s = \frac{81}{16}x^4\left(C_2 t^5 - \frac{81}{16}C_1 V_0 x^5\right)^{-4/5}, \tag{29}$$

$$\varphi = \frac{81}{16}C_1\frac{x^5}{t^2}\left(C_2 t^5 - \frac{81}{16}C_1 V_0 x^5\right)^{-4/5}. \tag{30}$$

Функция h, определяющая тощину капли, ведет себя по-разному в зависимости от знаков констант C_1, C_2. Пусть $C_1, C_2 > 0$ ($V_0 > 0$). Тогда из (28) видно, что функция h обращается в ноль при

$$x_k = \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{3C_2}{2V_0 C_1}}t. \tag{31}$$

Точка (31) соответствует краю капли, причем это значение увеличивается с возрастанием t. Из формулы (28) следует, что при $C_1, C_2 > 0$, если $0 < x < x_k$, то $h'_x < 0$, $h'_t > 0$ то есть имеет место убывание функции по x и возрастание t (конденсация). Если $x > x_k$, то $h'_x > 0$, $h'_t < 0$, что означает возрастание функции по x и убывание t (испарение). Таким образом, решение (28)–(30) может быть использовано непосредственно для описания испаряющейся капли, если в качестве начального момента времени положить $t = t_0 > 0$. Предполагается, что левый край капли (стенка, к которой примыкает капля) находится в точке $x = x_0 > x_k$. Тогда константы C_1, C_2 можно определить, например, задавая значения $h(x_0) = h_0$, $s(x_0) = s_0$ при $t = t_0$. Если в качестве левого края капли взять точку $x = 0$, то формулы (28)–(30) определяют конденсацию капли. Однако их нельзя использовать целиком из-за сингулярности. Используем сшивку полученного решения с константой (рис.1):

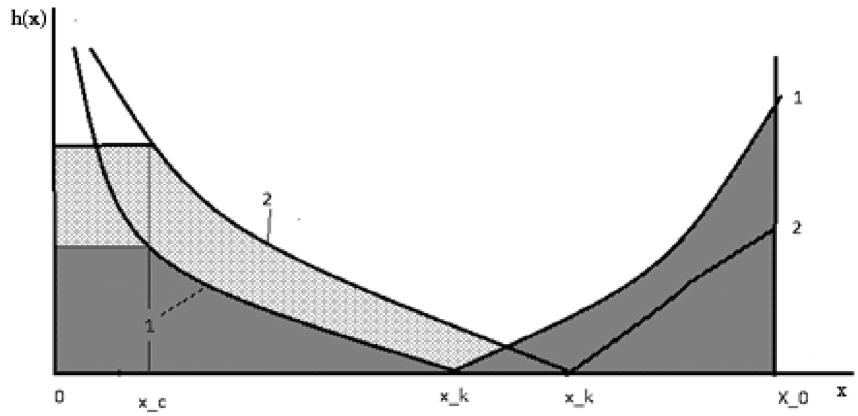

Рис.1. Поверхность капли, описываемая Решением 1.1, $C_1, C_2 > 0$ ($V_0 > 0$).
x_k — точка трехфазного контакта. Левая область — конденсация капли; $x = 0$ (начало кооординат) соответствует жесткой стенке, к которой примыкает капля. Правая область — испарение; $x = x_0$ — жесткая стенка.
Кривые (1) и (2) соответствуют различным моментам времени $t_1 < t_2$;

$$h = \begin{cases} \dfrac{8}{27tx_c^3}\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x_c^5\right)^{4/5}, & 0 < x < x_c, \\ \dfrac{8}{27tx^3}\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x^5\right)^{4/5}, & x_c \le x < x_k. \end{cases} \tag{32}$$

$$s = \begin{cases} \dfrac{81}{16}x_c^4\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x_c^5\right)^{-4/5}, & 0 < x < x_c, \\ \dfrac{81}{16}x^4\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x^5\right)^{-4/5}, & x_c \le x < x_k. \end{cases} \tag{33}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{81}{16}C_1\dfrac{x_c^5}{t^2}\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x_c^5\right)^{-4/5}, & 0 < x < x_c, \\ \dfrac{81}{16}C_1\dfrac{x^5}{t^2}\left(C_2t^5 - \dfrac{81}{16}C_1V_0x^5\right)^{-4/5}, & x_c \le x < x_k. \end{cases} \tag{34}$$

Таким образом, при $0 < x < x_c$ функции h, s, ϕ представляют собой константы, зависящие от времени. Соотношения между константами, входящими в (32)–(34) можно получить, задавая $h(0,t_0) = h_0$, $s(0,t_0) = s_0$, $\phi(0,t_0) = \phi_0$. Следовательно, *Решение 1.1* при $C_1, C_2 > 0$, определяемое формулами (32)–(34), в различных областях задания может быть использовано для описания как конденсирующейся, так и испаряющейся капли.

Если же $C_1, C_2 < 0$, то, области при $x < x_k$ и $x > x_k$ меняются ролями: левая часть отвечает за испарение, а правая — за конденсацию. Если $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ (либо $C_1 > 0$, $C_2 < 0$), то подкоренная функция в ноль не обращается. Однако у функции h имеется минимум в точке $x_{ext} = -\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{\dfrac{9C_2}{2V_0C_1}}t$. Можно предположить, что функция h в этом случае описывает испарение (конденсацию) пленки жидкости, расположенной неравномерным слоем между двумя твердыми стенками.

Решение 1.2. Рассмотрим второе решение уравнения (21), соответствующее $P_z = 0$:

$$P = D_1^4, \tag{35}$$

где D_1 — константа интегрирования. Тогда оставшиеся уравнения системы преобразуются к виду:

$$R_z\left(2RD_1 - z\right) = -V_0 D_1^4 u; \tag{36}$$

$$-u + u_z\left(-z + \frac{4}{3}RD_1\right) = 0. \tag{37}$$

Система (36)–(37) допускает построение асимптотического решения в виде рядов. Возвращение к исходным переменным приводит к квадратичной асимптотике автомодельного решение системы (5)–(7):

$$h - \left(R_0 + \frac{2D_1^4 V_0}{R_1}\right) = -2V_0 D_1^2 u_0 \left(R_1\right)\left(\frac{x}{t} + \frac{D_1 R_0}{R_1}\right)^2, \qquad R_1 = 5R_0 + 2V_0 D_1^4 u_0. \tag{38}$$

$$s = D_1^4, \tag{39}$$

$$\varphi = \frac{D_1^4}{t}\left(u_0 + \frac{3u_0}{4R_0 D_1}\frac{x}{t} + \frac{9}{8}R_0^{-2}D_1^{-2}\left(u_0 + \frac{V_0 D_1^4 u_0}{3R_0}\right)\frac{x^2}{t^2}\right). \tag{40}$$

Исходя из требования неотрицательности функции толщины капли h в начальный момент времени, будем считать, что $D_1 R_0 > 0$. Предположим для определенности: $D_1 > 0$, $R_0 > 0$. Парабола (38) имеет вершину в точке $B\left(-tD_1R_0/R_1; R_0 + 2D_1^4 V_0/R_1\right)$, и пересечение с осью OX в точке $x_k = t/R_1\left(-D_1R_0 \pm \sqrt{\frac{R_0R_1 + 2V_0D_1^4}{V_0D_1^2u_0}}\right)$.

Таким образом, с течением времени высота капли, описываемой (38)–(40) возрастает, а площадь ее увеличивается. Следовательно, автомодельное Решение 1.2 соответствует конденсации капли (Рис.2). Неизвестные константы u_0 и R_0 могут быть найдены, например, из задания углов смачивания в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ точках $x = 0$ и $x = x_k$: $h'_x(x=0) = tg\alpha_1$, $h'_x(x = x_k) = tg\alpha_2$.

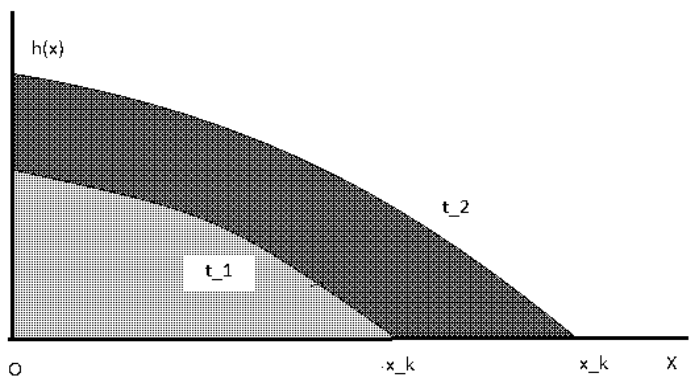

Рис.2. Поверхность капли, описываемая Решением 1.2, конденсация, $D_1 > 0$, $R_0 > 0$; $x = 0$ — жесткая стенка, к которой примыкает капля, $x = x_k$ — точка трехфазного контакта.

Автомодельная замена 2. Пусть $\beta = \gamma = 1$. Тогда из (17) следует, что

$$\delta = \alpha, \qquad \varepsilon = \delta^2. \tag{41}$$

Следовательно, на основании (41) применимы автомодельные замены:

$$z = \frac{x}{t^2}, \qquad R = tV, \tag{42}$$

приводящие систему (9)–(11) к виду:

$$V + 2V_z\left(-z + VP^{1/4}\right) = -V_0 PQ; \tag{43}$$

$$P_z\left(-2z+\frac{2}{3}VP^{1/4}\right)=0; \qquad (44)$$

$$Q_z\left(-2z+\frac{4}{3}VP^{1/4}\right)=0. \qquad (45)$$

Из уравнения (44) следует, что

$$P_z=0, \qquad (46)$$

или

$$VP^{1/4}=3z, \qquad (47)$$

а из уравнения (45) — что

$$Q_z=0, \qquad (48)$$

либо

$$VP^{1/4}=\frac{3}{2}z. \qquad (49)$$

Рассмотрим решения, соответствующие различным комбинациям (46) – (49).

Решение 2.1. Пусть выполняются (46) и (48), следовательно,

$$P=P_1^4, \qquad (50)$$

$$Q=Q_1, \qquad (51)$$

где P_1, Q_1 — константы. Тогда решение системы (43)–(45) имеет вид:

$$x+t^2\left(V_0P_1^5Q_1+\frac{P_1}{V_1}\right)=P_1V_1\left(hP_1^3+t\left(V_0P_1^4Q_1+\frac{1}{V_1}\right)\right)^2, \qquad (52)$$

$$s=P_1^4, \qquad (53)$$

$$Q=Q_1P_1^4, \qquad (54)$$

где P_1, Q_1, V_1 — константы. Кривая (52) есть парабола с вершиной в точке

$$B\left(-t^2P_1K;-\frac{Kt}{P_1^3}\right), \qquad K=\frac{V_0P_1^5Q_1+1}{V_1}, \qquad (55)$$

и пересечением с осью OX в точке $C(t^2P_1^6KV_0Q_1;0)$. Если, например, $P_1K<0$, то вершина расположена в первой координатной четверти, а ветви параболы повернуты влево. Таким образом, в соответствии с (55), в начальный момент времени $t=0$ получаем параболу с вершиной в начале координат: $x=P_1^7V_1h^2$. При увеличении времени вершина парболы смещается вправо и вверх. Таким образом, наблюдается опрокидывание профиля капли, а затем высота капли увеличивается. Следовательно, Решение 2.1, определяемое формулами (52)–(54), соответствует конденсации капли на вертикальной стенке, совпадающей с осью ординат (рис. 3).

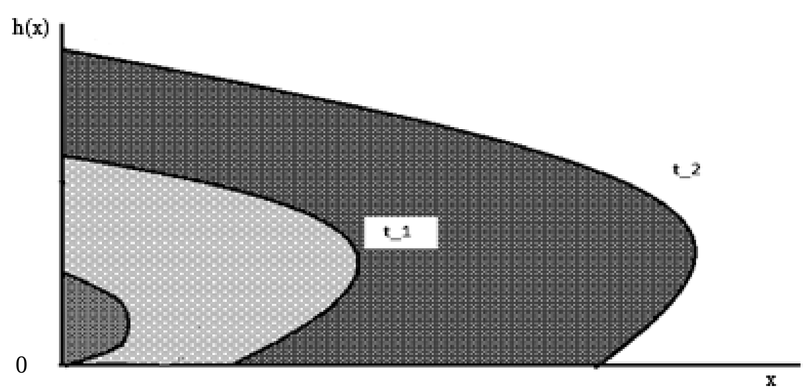

Рис. 3. Поверхность капли, описываемая Решением 2.1, конденсация капли на вертикальной стенке. Линии соответствуют различным моментам времени $t_1<t_2$

Решение 2.2. Пусть теперь выполняются (46) и (49). Следовательно, $P = P_1^4$, $V = \dfrac{3z}{2P_1}$, где P_1 — константа. В этом случае получим второе решение системы (43)–(45):

$$h = \frac{3x}{2P_1^4 t}, \qquad s = P_1^4, \qquad \varphi = -\frac{3x}{V_0 P_1 t^2}. \tag{56}$$

Решение 2.2., определяемое уравнениями (56) соответствует случаю испарения, когда поверхность капли линейна, жидкость уменьшается со временем. В данном решении по смыслу задачи $D_1 > 0$; в противном случае формула (56) описывает «перевернутую» каплю.

Решение 2.3. Пусть теперь выполняются (47) и (48), $Q = Q_1$; $P = \dfrac{81z^4}{V^4}$. В этом случае уравнение (43) приобретает линейную форму:

$$\frac{dV}{dz} + \frac{V}{4z} = -V_0 \frac{81 Q_1 z^3}{4V^4}. \tag{57}$$

Решив (57), получим третье решение системы (43)–(45):

$$R = tz^{-1/4} q, \qquad q = 5\left(A_1 - \frac{27}{7} V_0 Q_1 z^{21/4}\right)^{1/5}, \tag{58}$$

$$P = 81 z^5 q^{-4}, \tag{59}$$

$$Q = Q_1. \tag{60}$$

После возвращения к исходным переменным (8) в (58)–(59), имеем автомодельное решение исходной задачи:

$$h = \frac{t^{4/5} x^{1/5}}{27} 5^{4/5} \left(A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4}\right)^{4/5}, \tag{61}$$

$$s = \frac{81 x^{4/5}}{t^{9/5}} 5^{-4/5} \left(A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4}\right)^{-4/5}, \tag{62}$$

$$\varphi = Q_1 \frac{81 x^{9/5}}{t^{4/5}} 5^{-4/5} \left(A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4}\right)^{-4/5}. \tag{63}$$

Функция h, определяемая формулой (61) не имеет сингулярностей ни по x, ни по t. При фиксированном t функция имеет пересечения с осью OX в точках $x_n = 0$, и $x_k = \left(\dfrac{7A_1}{27 V_0 Q_1}\right)^{4/21} t^2$ и максимум в точке

$$x_m = \left(\frac{28 A_1}{675 V_0 Q_1}\right)^{4/21} t^2, \ (0 < x_m < x_k).$$

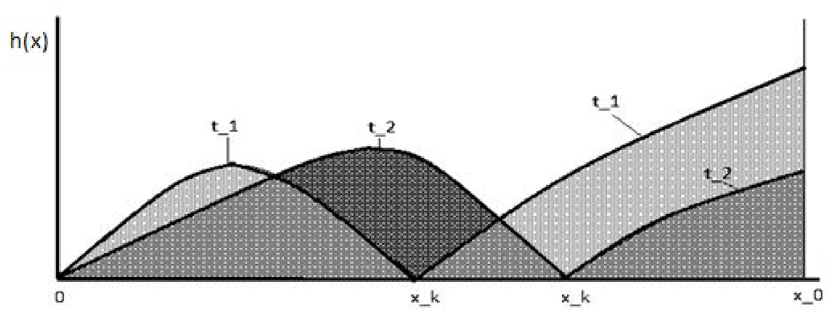

Рис.4. Поверхность капли, описываемая Решением 2.3. x_k — точка трехфазного контакта.
Левая область — конденсация капли; $x = 0$ — фиксированный левый край капли; $x = x_k$ — движущийся правый край.
Правая область — испарение; $x = x_0$ — жесткая стенка, к которой примыкает капля. Кривые (1) и (2) соответствуют различным моментам времени $t_1 < t_2$

Таким образом, решение (61)–(63) может быть использовано в области $x_0 < x < x_k$ для описания конденсирующейся капли в условиях пиннинга ее левого края, а в области $x_k < x < x_0$ — испаряющейся капли (x_0 — жесткая стенка, к которой примыкает капля) (рис.7). Соотношения между константами, входящими в (61)–(63) можно получить, задавая $h(x_m, t_0) = h_0$, $s(x_m, t_0) = s_0$. Следовательно, *Решение 2.3* в различных областях задания может быть использовано для описания как конденсирующейся, так и испаряющейся капли.

Автомодельная замена 3. Пусть $\alpha = \gamma = 1$. Тогда из (17) следует, что

$$\beta = \frac{1}{\delta}, \qquad \varepsilon = \delta^{3/4}. \tag{64}$$

Следовательно, на основании (64) применимы автомодельные замены:

$$z = \frac{x}{t^{3/4}}, \qquad P = W/t, \tag{65}$$

где z и W — новые неизвестные переменные. Применение формул (65) к системе (13)–(15) приводит ее виду:

$$R_z\left(-\frac{3}{4}z + 2RW^{1/4}\right) = -V_0 WQ; \tag{66}$$

$$-W + W_z\left(-\frac{3}{4}z + \frac{2}{3}RW^{1/4}\right) = 0; \tag{67}$$

$$Q_z\left(-\frac{3}{4}z + \frac{4}{3}RW^{1/4}\right) = 0. \tag{68}$$

Из (68) следует, что

$$Q_z = 0, \tag{69}$$

или

$$RW^{1/4} = \frac{9}{16}z. \tag{70}$$

Система (66)–(68) имеет два решения, определяемых уравнениями (69) и (70).

Решение 3.1. Рассмотрим вначале случай (70). Система сводится к виду:

$$R_z \frac{3}{8}z = -V_0 WQ; \tag{71}$$

$$W_z\left(-\frac{3}{8}z\right) = W. \tag{72}$$

Решение уравнения (72) имеет вид:

$$W = B_1 \exp\left(-\frac{4}{3}z^2\right), \tag{73}$$

B_1 — константа интегрирования. Тогда из уравнений (70), (71) и (73) получим:

$$R = \frac{9z}{16B_1}\exp\left(\frac{1}{3}z^2\right); \tag{74}$$

$$Q = -\frac{27z}{144B_1^{5/4}V_0}\left(1 + \frac{2}{3}z^2\right)\exp\left(\frac{5}{3}z^2\right). \tag{75}$$

Вернемся в (74)–(75) от инвариантов к обычным переменным (8), получим:

$$h = \frac{9x}{16B_1}\exp\left(\frac{4x^2}{3\sqrt{t^3}}\right), \tag{76}$$

$$s = \frac{B_1}{t}\exp\left(-\frac{4x^2}{3\sqrt{t^3}}\right), \tag{77}$$

$$\varphi = -\frac{27z}{144B_1^{1/4}V_0 t}\left(1+\frac{2x^2}{3\sqrt{t^3}}\right)\exp\left(\frac{x^2}{3\sqrt{t^3}}\right). \qquad (78)$$

Из формул (76)–(78) следует, что функция h возрастает по x, убывает по t; функция s убывает по x, убывает по t; функция φ возрастает по x, убывает по t (рис.5). Константа B_1 может быть найдена из задания, например, угла смачивания при $x = 0$.

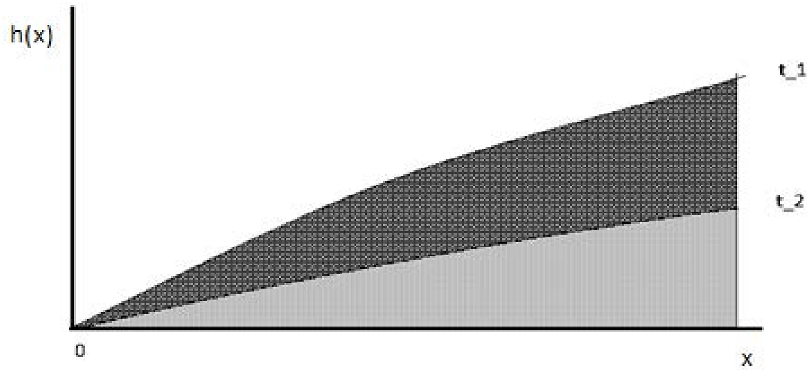

Рис. 5. Поверхность капли, описываемая Решением 3.1, конденсация капли в условиях пиннинга. Линии соответствуют различным моментам времени $t_1 < t_2$

Таким образом, Решение 3.1. соответствует испарению в условиях пиннинга, то есть неподвижной границы трехфазного контакта в точке $x = 0$.

Решение 3.2. Наконец, на основании (69) получим частное решение задачи:

$$h = \frac{3}{B^4}x^{1/5}t^{3/5}, \qquad s = B^4\frac{x^{4/5}}{t^{8/5}}, \qquad \varphi = -\frac{63}{5V_0 B}\frac{x^{4/5}}{t^{8/5}}, \qquad (79)$$

где B есть произвольная постоянная. Решение 3.2, определяемое (79), соответствует конденсации капли в условиях пиннинга (рис.5).

Заключение. Как следует из представленного материала, задача тепловой конвекции обладает большим количеством автомодельных решений, получаемых при переходе к инвариантам Римана. С помощью подбора констант, соответствующих краевым условиям, данные автомодельные решения можно применять для моделирования различных практических ситуаций, таких как испарение капли и ее конденсация в различных геометрических конфигурациях: пиннинг-депиннинг (в том числе только на части границы); задание различных форм поверхности капли и начальных точек трехфазного контакта; задания начального угла смачивания и т.д.

Библиографический список

1. Гольбрайх, Е. О. формировании узора трещины в свободно высыхающей пленке водного раствора белка / Е. Гольбрайх, Е. Г. Рапис, С. С. Моисеев // Журнал технической физики, 2003. — Т. 73, вып. 10. — С. 116–121.

2. Способ оценки общетоксического действия лекарственных средств на организм : патент 2232387 Рос. Федерация : G01N33/15, G01N33/49 / А. А. Ющенко, А. Д. Даудова, А. К. Аюпова, Н. Г. Урляпова , С. Н. Шатохина. — № 2002129685/15 ; заявл. 04.11.2002 ; опубл. 10.07.2004. — 7 с.

3. Рапис, Е. Белок и жизнь (самосборка и симметрия наноструктур белка) / Е. Рапис. — Иерусалим; Москва : ЗЛ. Милта-ПКП ГИТ, 2002. — 257 с.

4. Abramchuk S.S., Khokhlov A.R., Iwataki T., Oana H., Yoshikawa K. Direct observation of DNA molecules in a convection flow of a drying droplet // Europhys. Lett. 2001. – Vol. 55. P. 294–300.

5. Harris D. J., Hu H., Conrad J. C., Lewis J. A. Patterning Colloidal Films via Evaporative Lithography // Physical Review Letters. 2007. – Apr. Vol. 98, no. 14. P. 148301.

6. Xu J., Xia J., Hong S. W. et al. Self-Assembly of Gradient Concentric Rings via Solvent Evaporation from a Capillary Bridge // Physical Review Letters. 2006.–Feb. Vol. 96, no. 6. P. 066104.

7. Helseth L. E., Fischer T. M. Particle interactions near the contact line in liquid drops // Physical Review E. 2003.– Oct.

Vol. 68, no. 4. P. 042601.

8. Rieger B., van den Doel L. R., van Vliet L. J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells // Physical Review E. 2003.–Sep. Vol. 68, no. 3. P. 036312.

9. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop // Physical Review E. – 2000. – vol. 62. – P. 756–765.

10. Maki K. L., Kumar S. Fast Evaporation of Spreading Droplets of Colloidal Suspensions // Langmuir. 2011. Vol. 27, no. 18. P. 11347– 11363.

11. Widjaja E., Harris M. Particle deposition study during sessile drop evaporation // AIChE J. 2008.–September. Vol. 54, no. 9. P. 2250– 2260.

12. Tarasevich Y. Y., Vodolazskaya I.V., Sakharova L.V. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask // Eur. Phys. J. E. – 2016. – Vol. 39, no. 2.

13. Жуков, М. Ю. Моделирование испарения капли жидкости / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова. — Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. — 208 с.

14. Баренблатт, Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике / Г. И. Баренблатт. — Ленинград : Гидрометиоиздат. — 1982. — 257 с.

15. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — Москва : Наука — 1978.— 687 с.

References

1. Golbraykh, E.O., Rapis, E.G., Moiseev, S.S. O formirovanii uzora treshchiny v svobodno vysykhayushchey plenke vodnogo rastvora belka. [On the formation of the crack pattern in a free drying film of aqueous protein solution.] Technical Physics, 2003, vol. 73, iss. 10, pp. 116–121 (in Russian).

2. Yushchenko, A.A., Daudova, A.D., Ayupova, A.K., Urlyapova, N.G., Shatokhina, S.N. Sposob otsenki obshchetoksicheskogo deystviya lekarstvennykh sredstv na organizm: patent 2232387 Ros. Federatsiya : G01N33/15, G01N33/49. [A method of estimating general toxical action of drugs on the body.] Patent RF, no. 2232387, 2004 (in Russian).

3. Rapis, E. Belok i zhizn' (samosborka i simmetriya nanostruktur belka). [Protein and life (self-assembly and symmetry of protein nanostructures.)] Jerusalem; Moscow: ZL. Milta-PKP GIT, 2002, 257 p. (in Russian).

4. Abramchuk, S.S., Khokhlov, A.R., Iwataki, T., Oana, H., Yoshikawa, K. Direct observation of DNA molecules in a convection flow of a drying droplet. Europhys. Lett., 2001, vol. 55, pp. 294–300.

5. Harris, D. J., Hu, H., Conrad, J. C., Lewis, J. A. Patterning Colloidal Films via Evaporative Lithography. Physical Review Letters, 2007, vol. 98, no. 14, p. 148301.

6. Xu J., Xia J., Hong S.W., et al. Self-Assembly of Gradient Concentric Rings via Solvent Evaporation from a Capillary Bridge. Physical Review Letters, 2006, vol. 96, no. 6, p. 066104.

7. Helseth, L. E., Fischer, T. M. Particle interactions near the contact line in liquid drops. Physical Review E, 2003, vol. 68, no. 4, p. 042601.

8. Rieger, B., van den Doel, L. R., van Vliet, L. J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells. Physical Review E, 2003, vol. 68, no. 3, p. 036312.

9. Deegan, R.D., Bakajin, O., Dupont, T.F., Huber, G., Nagel, S.R., Witten, T.A. Contact line deposits in an evaporating drop. Physical Review E, 2000, vol. 62,pp. 756–765.

10. Maki, K. L., Kumar, S. Fast Evaporation of Spreading Droplets of Colloidal Suspensions. Langmuir, 2011, vol. 27, no. 18, pp. 11347– 11363.

11. Widjaja, E., Harris, M. Particle deposition study during sessile drop evaporation. AIChE J., 2008, vol. 54, no. 9, pp. 2250– 2260.

12. Tarasevich, Y. Y., Vodolazskaya, I.V., Sakharova, L.V. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask. Eur. Phys. J. E, 2016, vol. 39, no. 2.

13. Zhukov, M.Y., Shiryaeva, E.V., Polyakova, N.M. Modelirovanie ispareniya kapli zhidkosti. [Simulation of the liquid drop evaporation.] Rostov-on-Don: SFU Press, 2015, 208 p. (in Russian).

14. Barenblatt, G.I. Podobie, avtomodel'nost', promezhutochnaya asimptotika. Teoriya i prilozheniya k geofizicheskoy

gidrodinamike. [Similarity, self-similarity, intermediate asymptotics. Theory and applications to geophysical hydrodynamics .] Leningrad: Gidrometioizdat, 1982, 257 с. (in Russian).

15. Rozhdenstvenskiy, B.L., Yanenko, N.N. Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike. [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics.] Moscow: Nauka, 1978, 687 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 15.06.2016
Сдана в редакцию 16.06.2016
Запланирована в номер 30.09.2016

Received 15.06.2016
Submitted 16.06.2016
Scheduled in the issue 30.09.2016