УДК 519.1

Я.М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, Н.Н. ВОДОЛАЗОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК В СЕТИ

В представленной работе рассматривается нестационарный поток в сети. Даны определения нестационарного потока, величины потока за время T , средней величины потока. Найдено ограничение на среднюю величину потока.
Ключевые слова: *граф, стационарный поток, нестационарный поток, величина потока.*

Введение. В работах [1, 2] рассмотрены задачи нахождения максимального потока на динамических периодических графах. Для обыкновенных ориентированных графов вводится дискретное время T , и рассматриваются динамические графы. Динамическим графом в [1] называется ориентированный граф вида $G(X,U,f,\tau)$, множество дуг которого представляет собой объединение двух непустых непересекающихся подмножеств, называемых множеством обычных и множеством временных дуг, τ – функция активности. Временные дуги графа доступны для прохождения не в любой момент времени, а только в периоды активности.

В данной статье рассматриваются нестационарный поток на графе, который представляет собой обобщение динамических графов, и ограничения на величину максимального нестационарного потока. Приведен пример, который показывает, что величина нестационарного потока может в некоторые моменты времени превосходить величину максимального стационарного потока.

Постановка задачи. Пусть дан граф $G(V,E,\varphi)$, где V – множество вершин; E – множество дуг; $\phi : E \to V\times V$. Обозначим $\Theta_-(v)$ – множество дуг, входящих в вершину v ; $\Theta_+(v)$ – множество дуг, выходящих из вершины v . Пропускная способность каждой дуги $c(e)$.

Определение 1. Стационарным потоком на графе $G(V,E,\varphi)$ называется отображение $f : E \to R^+$, удовлетворяющее условиям [3]:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e) = \sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e), & \forall v\in V, v\ne s, v\ne r,\\ 0\le f(e)\le c(e), & \forall e\in E, \end{cases} \qquad (1)$$

где s – источник; r – сток.

В нестационарном потоке добавляется дискретное время $t\in Z^+$. Считаем, что суммарный поток, выходящий из вершины в момент времени $t+1$, равен суммарному потоку, входящему в вершину в момент времени t .

Дадим определения нестационарного потока и величины нестационарного потока за время T .

Определение 2. Нестационарным потоком назовем отображение $f : E\times Z^+ \to R^+$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e,t) = \sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,t+1), & \forall v\in V, v\neq s, v\neq r, \quad \forall t\in Z^+ \\ 0\leq f(e,t)\leq c(e), & \forall e\in E, \quad \forall t\in Z^+, \end{cases} \tag{2}$$

где s – источник; r – сток; t – время.

Определение 3. Величиной потока f за время T назовем величину $V(f,T)=\sum\limits_{t=0}^{T}\sum\limits_{e\in\Theta_-(r)} f(e,t)$.

Ограничение на величину нестационарного потока. Возьмем произвольное $T\in N$. Покажем, что по нестационарному потоку f величины $V(f,T)$ можно построить стационарный поток f_2 величины $\frac{V(f,T)}{T}$. Сначала по нестационарному потоку f построим нестационарный поток f_1, имеющий ту же величину потока за время T и равный нулю в момент времени T. Затем по нестационарному потоку f_1 построим стационарный поток f_2, имеющий величину $\frac{V(f_1,T)}{T}$.

Рассмотрим любой нестационарный поток до момента T. Он удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{array}{lll}
t=T & \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e,T)=\sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,T+1), & \forall v\in V, v\neq s, v\neq r, \\
t=T-1 & \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e,T-1)=\sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,T), & \forall v\in V, v\neq s, v\neq r, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
t=1 & \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e,1)=\sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,2), & \forall v\in V, v\neq s, v\neq r, \\
t=0 & 0=\sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,1), & \forall v\in V, v\neq s, v\neq r.
\end{array} \tag{3}$$

Вытекающий поток представлен в (3) $f(e,t)$, $e\in\Theta_-(r)$, поэтому величин $f(e,T)$, $e\in\Theta_-(r)$ нет в системе равенств (3) для $t=T$ (вытекающий на шаге $T-1$ поток не втекает ни в одну вершину на шаге T). Положим $f_1(e,T)=f(e,T)$, $e\in\Theta_-(r)$, $f_1(e,T)=0$, $e\notin\Theta_-(r)$.

Далее рассмотрим равенства при $t=T-1$.

$$\sum_{e\in\Theta_-(v)} f_1(e,T-1)=\sum_{e\in\Theta_+(v)} f_1(e,T), \quad \forall v\in V, v\neq s, v\neq r. \tag{4}$$

Нам нужно найти $f_1(e,T-1)$. Если вместо $f(e,T)$ в правую часть равенств (3) подставить $f_1(e,T)$, то получим неравенства:

$$\sum_{e\in\Theta_-(v)} f(e,T-1)\geq\sum_{e\in\Theta_+(v)} f_1(e,T), \quad \forall v\in V, v\neq s, v\neq r. \tag{5}$$

Величин $f_1(e,T-1)$, $e\in\Theta_-(r)$ нет в левой части (4), поэтому мы можем присвоить им любые значения без нарушения (4). Положим $f_1(e,T-1)=f(e,T-1)$, $e\in\Theta_-(r)$.

Все $f_1(e,T-1)$, входящие в равенства для вершин $\upsilon\in V:\ \sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,T)=0$, положим равными 0.

Если $f_1(e,T-1)$ входит в равенства для вершин $\upsilon\in V:\ \sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,T)\neq 0$, то $0<\sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,T)\le \sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f(e,T)=\sum\limits_{e\in\Theta_-(\upsilon)} f(e,T-1)$. Тогда положим $K(\upsilon)=\dfrac{\sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,T)}{\sum\limits_{e\in\Theta_-(\upsilon)} f(e,T-1)}$.

Из (5) следует $K(\upsilon)\le 1$. Так как $f_1(e,T)\ge 0$ и $f(e,T-1)\ge 0$, следовательно, $K(\upsilon)\ge 0$. Тогда положим $f_1(e,T-1)=K(\upsilon)f(e,T-1)$. Так как $K(\upsilon)\le 1$, то из $0\le f(e,T-1)\le c(e)$ следует, что $0\le f_1(e,T-1)\le c(e)$.

Из построения ясно, что для $f_1(e,T-1)$ выполнены равенства (4).

Аналогичным образом построим поток в моменты времени $t=T-2$, $t=T-3,\dots,t=0$, который удовлетворяет условию $f_1(e,T+1)=0$, $\forall e\in E$. На каждом шаге значение $f(e,t)$, $e\in\Theta_-(r)$ не изменялось, следовательно, величина потока f_1 равна величине потока f, $V(f,T)=V(f_1,T)$.

При этом f_1 удовлетворяет системе равенств:

$$
\begin{array}{lll}
t=T & \sum\limits_{e\in\Theta_-(\upsilon)} f_1(e,T)=0, & \forall\,\upsilon\in V,\upsilon\neq s,\upsilon\neq p,\\
t=T-1 & \sum\limits_{e\in\Theta_-(\upsilon)} f_1(e,T-1)=\sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,T), & \forall\,\upsilon\in V,\upsilon\neq s,\upsilon\neq p,\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
t=1 & \sum\limits_{e\in\Theta_-(\upsilon)} f_1(e,1)=\sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,2), & \forall\,\upsilon\in V,\upsilon\neq s,\upsilon\neq p,\\
t=0 & 0=\sum\limits_{e\in\Theta_+(\upsilon)} f_1(e,1), & \forall\,\upsilon\in V,\upsilon\neq s,\upsilon\neq p.
\end{array}
\qquad (6)
$$

Просуммируем равенства (6) по T и разделим на T. Получим поток $f_2(e)=\dfrac{\sum\limits_{t=0}^{T} f_1(e,t)}{T}$, $\forall e\in E$, удовлетворяющий ограничениям, накладываемым на стационарный поток, т.е. поток f_2 удовлетворяет системе равенств (1) и ограничениям $0 \le f_2(e) \le c(e)$.

Итак, величина стационарного потока равна величине потока f_1 за время T и величине потока f за время T. Таким образом, для любого нестационарного потока f, имеющего величину $V(f,T)$ за время T, можно построить стационарный поток величины $V_{стац} = \dfrac{V(f,T)}{T}$.

Пусть величина максимального стационарного потока $V_{\max}$, тогда $V_{\max} \ge \dfrac{V(f,T)}{T}$.

Определение 4. Назовем $\dfrac{V(f,T)}{T}$ – средней величиной нестационарного потока f за время T.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 1. Средняя величина нестационарного потока f в сети G за время T не может превосходить величины максимального стационарного потока.

$$\frac{V(f,T)}{T} \le V_{\max}.$$

Построим пример.

Пример 1. Пусть дан граф (рис.1). Пропускная способность всех дуг равна 1.

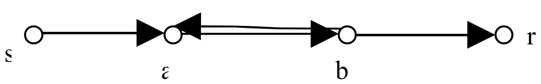

Рис.1. Пример графа

Рассмотрим граф до момента времени, равного 5. Построим вспомогательный граф (рис.2) по следующим правилам:

- каждой вершине исходного графа $v \in V$ поставим в соответствие T вершин $v_1, v_2, \dots, v_T$;

- каждой дуге исходного графа (u,v) поставим в соответствие $T-1$ дугу вида (u_i, v_{i+1}), $i = 1,\dots,T-1$;

- пропускную способность каждой дуги (u_i, v_{i+1}) положим равной пропускной способности дуги (u,v) исходного графа.

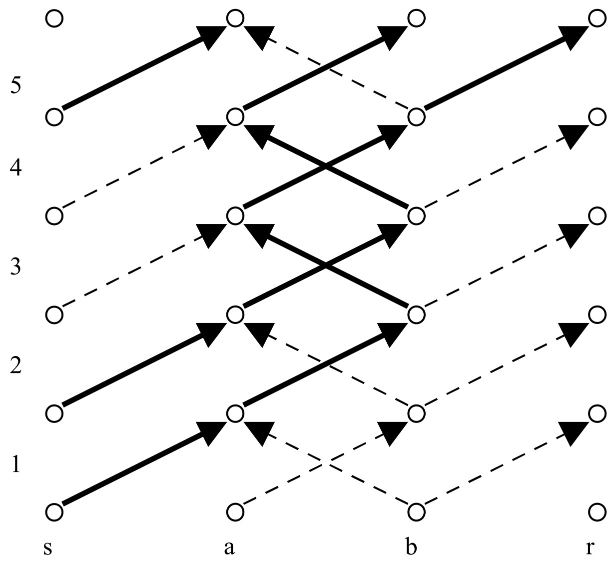

Рис.2. Исходный поток на вспомогательном графе:

- ненагруженные дуги;

- насыщенные дуги

Из рис.2 видно, что поток за 5 шагов равен 1.

Построим новый поток f_1 таким образом, чтобы в момент времени 5 весь поток, за исключением выходящего в сток, обращался в 0.

Положим $f_1((b,p),5) = f((b,p),5) = 1$, $f_1((a,b),5) = 0$, $f_1((s,a),5) = 0$, $f_1((b,a),5) = 0$.

В момент времени 4 в вершине a должно выполняться соотношение

$$f_1((b,a),4) + f_1((s,a),4) = f_1((a,b),5) = 0.$$

Положим $f_1((b,a),4) = 0$, $f_1((s,a),4) = 0$. В вершине b выполняется равенство

$$f_1((a,b),4) = f_1((b,a),5) + f_1((b,p),5) = 0 + 1 = 1.$$

Получаем $f_1((a,b),4) = 1$.

В момент времени 3 в вершине b должно выполняться соотношение:

$$f_1((a,b),3) = f_1((b,a),4) + f_1((b,p),4) = 0.$$

Положим $f_1((a,b),3) = 0$. В вершине a выполнено соотношение

$$f_1((b,a),3) + f_1((s,a),4) = f_1((a,b),4) = 1.$$

Пусть $K(a) = \dfrac{f_1((b,a),4) + f_1((b,p),4)}{f((a,b),3)} = \dfrac{1+0}{1} = 1$,

отсюда

$$f_1((b,a),3) = K(a) f((b,a),3) = 1;$$

$$f_1((s,a),3) = K(a)f((s,a),3) = 0 \,.$$

Аналогично получаем $f_1((s,a),2) = 0$.

Поток f_1 по остальным дугам положим равным f . Тогда поток f_1 (рис.3) удовлетворяет ограничениям, накладываемым на поток, и в момент времени 5 весь поток, за исключением выходящего в сток, обращается в 0.

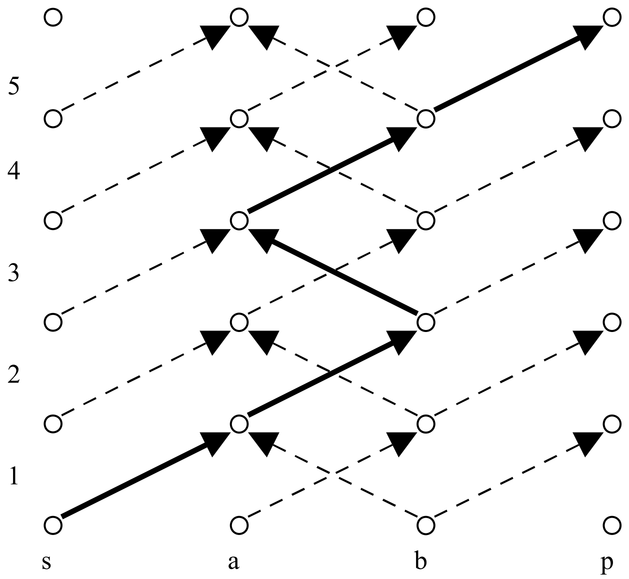

Рис.3. Поток f_1 на вспомогательном графе

Так как поток f_1 по выходящим дугам равен потоку f , то величина $V(f_1,5) = V(f,5) = 1$.

Далее сложим поток по каждой дуге для моментов времени от 1 до 5 и поделим на 5, получим стационарный поток $f_2(u) = \dfrac{1}{5}$, $\forall\, u \in U$.

Тогда величина потока $f_2 = \dfrac{1}{5} = \dfrac{V(f_1,5)}{5} = \dfrac{V(f,T)}{5}$.

Расширенный нестационарный поток. Обобщим задачу, будем считать, что не весь поток должен выходить из вершины на каждом шаге. Тогда поток будет определен на дугах и в вершинах $f:(V \cup E)\times Z^+ \to R^+$.
Условия (2) заменим на следующие:

$$\begin{cases} f(v,t) + \sum\limits_{e\in\Theta_-(v)} f(e,t) = f(v,t+1) + \sum\limits_{e\in\Theta_+(v)} f(e,t+1), & \forall\, v\in V, v\neq s, v\neq r, \quad \forall\, t\in Z^+ \\ 0 \le f(e,t) \le c(e), \quad \forall\, e\in E, \quad \forall\, t\in Z^+. \end{cases} \tag{7}$$

Дадим определение расширенного нестационарного потока.

Определение 5. Назовем отображение $f:(V \cup E)\times Z^{+} \rightarrow R^{+}$ расширенным нестационарным потоком, если для него выполнены условия (7).

Задачу о нахождении ограничения на максимальный расширенный нестационарный поток можно свести к уже рассмотренной ранее, добавив к графу для каждой вершины v дугу (v,v) неограниченной пропускной способности. Тогда величины всех разрезов не изменятся, и доказанное выше ограничение (теорема 1) на максимальный поток останется в силе.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 2. Средняя величина расширенного нестационарного потока f в сети G за время T не может превосходить величины максимального стационарного потока.

Пример 2. Отметим, что в некоторые моменты времени поток на графе может превосходить величину максимального нестационарного потока. Рассмотрим пример графа (рис.4).

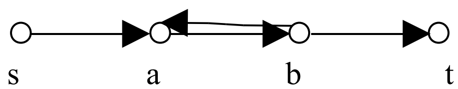

Рис. 4. Поток, превышающий пропускную способность:
– источник; – сток

Пусть пропускная способность дуги (s,a) равна 1, пропускная способность остальных дуг равна 2. Тогда возможен следующий поток (таблица).

Поток на графе в моменты времени от 0 до 4

Момент времени	Дуги			
	(s,a)	(a,b)	(b,a)	(b,t)
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
3	1	2	1	0
4	1	2	0	2

Из таблицы видно, что втекающий в сток поток в момент времени 4 равен 2, при том что величина максимального стационарного потока равна 1.

Выводы. Доказана теорема о том, что средняя величина нестационарного потока не может превышать величины стационарного потока. Однако из построенного примера ясно, что нестационарный поток в определенные моменты времени может превосходить максимальную величину стационарного потока.

Библиографический список

1. Ерусалимский Я.М. Динамические периодические графы. / Я.М. Ерусалимский, М.В. Кузьминова. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тр. III-й всероссийской школы-семинара. – Ростов н/Д: Терра Принт, 2007. – С. 39-40.

2. Кузьминова М.В. Динамические периодические графы. Задача о максимальном потоке. / М.В. Кузьминова. // Сборник материалов докладов 5-й всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь XXI века – будущее российской науки». В 2 т. – Т.1. – Ростов н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – С. 99-100.

3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход; пер. с англ. / Н. Кристофидес. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

Материал поступил в редакцию 2.06.09.

Y.M. ERUSALIMSKY, N.N. VODOLAZOV

NON-STATIONARY NETWORK FLOW

Non-stationary network flow is considered. Definitions of non-stationary network flow, amount of flow in T time, average amount of flow are given. Limitation on the average amount of flow is found.

ЕРУСАЛИМСКИЙ Яков Михайлович (р. 1947), кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета. Окончил механико-математический факультет РГУ (1970).
Сфера научных интересов: операторы мультипликативной дискретной свертки, теория графов и её приложения.
Имеет 87 научных публикаций.

ВОДОЛАЗОВ Николай Николаевич (р. 1984), аспирант второго года обучения факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Окончил магистратуру ЮФУ (2007).
Научные интересы: теория графов и ее приложения.
Имеет 3 научных публикации.

Nickolay_Vodolazov@rambler.ru