УДК 621.3: 517.951

**А. П. ПОПОВ, М. Р. ВИНОКУРОВ**

# РАСЧЁТ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОБРАЗЦОВ ФЕРРОМАГНИТНОГО МАТЕРИАЛА

*В настоящей статье приводится решение линейной задачи расчета электромагнитного поля в системе проводника, по которому протекает синусоидальный ток, охваченный ферромагнитной проводящей трубой (кольцом). Приведённые аналитические исследования подтверждены экспериментальными данными, результаты которых позволяют с достаточной степенью точности определять характеристики ферромагитных проводящих сред.*

***Ключевые слова:*** *электромагнитное поле, система «проводник - ферромагнитное кольцо», функции Бесселя, сильно выраженный поверхностный эффект, теорема Умова – Пойнтинга, ЭДС сигнальной обмотки.*

**Введение.** Целью данной работы является решение линейной задачи расчета электромагнитного поля в системе проводника, охваченного ферромагнитной проводящей трубой (кольцом), по которому протекает синусоидальный ток, при этом величина тока достаточно мала, т.е. электромагнитный процесс протекает на начальном участке кривой намагничивания и задачу можно считать линейной [1].

**Постановка задачи**. Решение данной задачи позволяет рассчитать выходное напряжение на обмотке, размещенной на этом кольце, а также значение векторов напряженности электрического и магнитного поля, плотности тока в стенках кольца и активные потери в стали.

Рассматриваемая система представлена на рис.1.

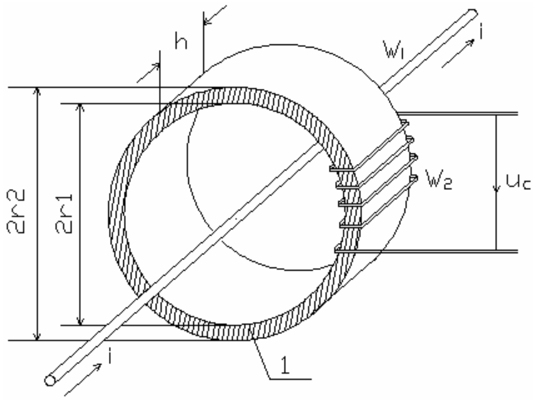



Рис.1. Система «проводник – ферромагнитная проводящая труба»: $W_1$ – первичная обмотка (шина с синусоидальным током); $W_2$ – вторичная или выходная обмотка; $U_c$ – выходной сигнал; 1 – железный (стальной) короткий отрезок трубы (или кольцо), выточенный из прутка обыкновенной стали широкого применения

Рис. 1

Установим связь между выходным напряжением $U_c$ и током $i$, при этом будем полагать, что кольцо имеет однородную структуру и линейную зависимость:

$$B = f\,(H),$$

где $B$ – магнитная индукция; $H$ – напряженность магнитного поля.

Считаем, что магнитная проницаемость кольца $\mu$ = *const*, причем $\mu >> \mu_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума), т.е. полагаем, что перемагничивание материала стенок кольца происходит на начальном участке кривой намагничивания $B = f(H)$.

Сталь обладает электропроводностью $\gamma$ (для стали $\gamma \approx (0{,}7\text{-}0{,}93) \cdot 10^7$ $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ [2, с.731], для чугуна $\gamma \approx (2 \div 2{,}5) \cdot 10^6$ $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$).

Решение проведем в цилиндрической системе координат для случая, когда синусоидально изменяющийся во времени ток направлен по оси *Z* (рис.2).

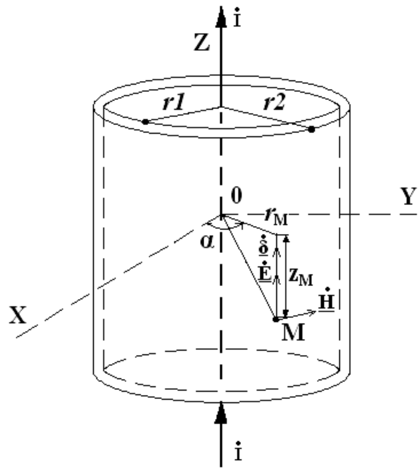


Рис.2. Цилиндрическая система координат к решению задачи

Уравнение квазистатического электромагнитного поля для проводящей среды имеет, как известно [2. С. 651], вид

$$rot\ \underline{\dot{H}} = \underline{\dot{\delta}}, \qquad (1)$$

$$rot\ \underline{\dot{\delta}} = -j\,\omega\gamma\mu\,\underline{\dot{H}}, \qquad (2)$$

где $\underline{\dot{\delta}}$ – вектор плотности тока в проводящей среде.

Из (1) и (2) получим

$$rot\ rot\ \underline{\dot{\delta}} = -j\,\omega\gamma\mu\,\underline{\dot{\delta}}. \qquad (3)$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$grad\ div\ \underline{\dot{\delta}} - \nabla^2 \underline{\dot{\delta}} = -j\,\omega\gamma\mu\,\underline{\dot{\delta}}. \qquad (4)$$

Так как в установившемся режиме $div\ \underline{\dot{\delta}} = 0$, то из (4) получим:

$$\nabla^2 \underline{\dot{\delta}} = j\,\omega\gamma\mu\,\underline{\dot{\delta}}. \qquad (5)$$

Раскрывая $\nabla^2 \underline{\dot{\delta}}$ в цилиндрической системе координат и учитывая, что в рассматриваемом случае $\underline{\dot{\delta}}$ от $\alpha$ и *Z* не зависит (т.е. вектор плотности тока в проводящей среде имеет только осевую компоненту), придем к частному случаю уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 \underline{\dot{\delta}}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \cdot \frac{d\,\underline{\dot{\delta}}}{d(qr)} + \underline{\dot{\delta}} = 0, \qquad (6)$$

$$(r_1 \le r \le r_2),$$

где $qr = \sqrt{-j}\ r\sqrt{\omega\gamma\mu}$ ($\omega = 2\pi f$, $f$ – частота синусоидального тока, $q^2 = -j\omega\gamma\mu$), а величина вектора плотности тока зависит от $r$, $\omega$, $\gamma$, $\mu$.

Как известно [2], решение уравнения (6) можно представить следующим образом:

$$\underline{\check{\delta}} = \dot{M}_1 J_o(qr) + \dot{M}_2 N_o(qr), \tag{7}$$

где $\dot{M}_1$ и $\dot{M}_2$ – постоянные интегрирования; $J_o(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_o(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Вторым слагаемым в выражении (7) при реальных значениях $r$, γ, ω, μ можно пренебречь, тогда (7) запишем:

$$\underline{\check{\delta}} = \dot{M}_1 J_0(qr). \tag{8}$$

Это допущение проверено путем вычисления значений указанных функций Бесселя при реально возможных аргументах как для ферромагнетиков, так и для проводников.

На основании (2), с учетом раскрытия $rot\,\underline{\check{\delta}}$ в цилиндрической системе координат и зависимости $\underline{\check{\delta}}$ только от координаты $r$, получаем выражение для вектора напряженности магнитного поля в стальном кольце, направленного перпендикулярно вектору $\underline{\check{\delta}} = \gamma\,\underline{\dot{E}}$, в следующем виде:

$$\underline{\dot{H}} = -\frac{1}{q^2}\frac{d}{dr}\left[\dot{M}_1 J_0(qr)\right] = \frac{\dot{M}_1}{q} J_1(qr), \qquad (r_1 \le r \le r_2), \tag{9}$$

где $J_1(qr)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

То есть вектор $\underline{\dot{H}}$ в рассматриваемом случае имеет только поперечно-круговую компоненту в направлении угла $\alpha$. На рис.2 указаны направления векторов $\underline{\dot{H}}$, $\underline{\check{\delta}}$ и $\underline{\dot{E}}$.

Определим постоянную интегрирования $\dot{M}_1$. С этой целью по закону полного тока найдем амплитудное значение $\underline{\check{H}}_m$ на внутренней поверхности кольца:

$$\underline{\check{H}}_m = \frac{\check{I}_m}{2\pi r_1}, \quad (r = r_1),$$

где $\check{H}_m$ и $\dot{I}_m$ – комплексные амплитудные значения вектора напряженности магнитного поля и тока.

Приравняем значение $\check{H}_m$ к правой части (9)

$$(r = r_1), \quad \frac{\dot{I}_m}{2\pi r_1} = \frac{\dot{M}_1}{q} J_1(qr_1),$$

тогда

$$\dot{M}_1 = \frac{q\dot{I}_m}{2\pi r_1 J_1(qr_1)}. \tag{10}$$

После подстановки (10) в (9) получаем

$$\underline{\dot{H}}_m = \frac{\dot{I}_m}{2\pi r_1 J_1(qr_1)} J_1(qr) \text{ при } (r_1 \le r \le r_2). \qquad (11)$$

Учитывая, что $\underline{\dot{\delta}} = \gamma\, \underline{\dot{E}}$, используя выражения (8) и (10), получаем амплитудное значение вектора напряженности электрического поля в стенках кольца для $r_1 \le r \le r_2$:

$$\underline{\dot{E}}_m = \frac{q}{\gamma} \underline{\dot{H}}_{m(r=r_1)} \cdot \frac{J_0(qr)}{J_1(qr_1)}. \qquad (12)$$

Отношение $\frac{q}{\gamma}$ в (12) определяется выражением:

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{\sqrt{-j\cdot\omega\cdot\gamma\cdot\mu}}{\gamma} = \sqrt{\frac{-j\cdot\omega\cdot\mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\cdot\mu}{\gamma}}\cdot e^{-j45^0}. \qquad (13)$$

Отношение $\frac{q}{\gamma}$ принято называть волновым сопротивлением; измерятся в Омах и зависит от свойств среды $\gamma$ и $\mu$ и угловой частоты $\omega$.

Выражение (12) перепишем с учетом (13):

$$\underline{\dot{E}}_m = \sqrt{\frac{\omega\cdot\mu}{\gamma}}\cdot e^{-j45^0}\cdot\underline{\dot{H}}_{m(r=r_1)}\cdot\frac{J_0(qr)}{J_1(qr_1)}. \qquad (14)$$

Отношение функций Бесселя, входящих в (14), при $r\cdot\sqrt{\omega\gamma\mu} > 20$ практически равно $1e^{j90^0}$. Так, например, для точки на внутренней поверхности кольца ($r = r_1$) при $\omega = 2\pi f = 314$ рад/с, $f = 50$ Гц, $\mu = 1000\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м; $\gamma = 0{,}8\cdot 10^7$ 1/Ом·м; $r = r_1 = 15\cdot 10^{-3}$ м; $qr_1 = r_1\cdot\sqrt{\omega\gamma\mu}\cdot e^{-j45^0}$ =26,66·$e^{-j45^0}$; $\frac{J_0(qr_1)}{J_1(qr_1)}$ = 0,014 + $j$ 1,013 ≈ 1 $e^{j90^0}$ ≈ $j$. То есть отношение $\frac{J_0(qr_1)}{J_1(qr_1)}$ можно считать мнимым числом с модулем, равным единице.

Для точек, лежащих на внутренней поверхности кольца ($r = r_1$), вектор напряженности электрического поля, направленный параллельно оси трубы, определяется выражением

$$\underline{\dot{E}}_{m(r=r_1)} = \sqrt{\frac{\omega\cdot\mu}{\gamma}}\cdot e^{-j45^0}\cdot\underline{\dot{H}}_{m(r=r_1)}\cdot e^{j90^0} = \sqrt{\frac{\omega\cdot\mu}{\gamma}}\cdot\underline{\dot{H}}_{m(r=r_1)}\cdot e^{j45^0}. \qquad (15)$$

Если сопоставить выражение (15) для вектора $\underline{\dot{E}}_{m(r=r_1)}$ с выражением для вектора напряженности электрического поля на поверхности, полученного при решении задачи о распространении плоской электромагнитной волны в однородном проводящем ферромагнитном полупространстве, решение которой приведено в [2. С. 655], можно установить, что они идентичны. Это позволяет сделать вывод о том, что и в данном случае процесс распространения электромагнитного поля (ЭМП) можно рассматривать в виде подающей волны. Отраженная волна будет отсутствовать из-за малой глубины проникновения ЭМП по сравнению с толщиной стенки кольца, что в рассматриваемом случае выполняется. Для отрезка трубы, размеры которой, а также значения $\gamma$ и $\mu$, приведены выше, глубина проникновения ЭМП во внутреннюю стенку будет равна:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}} = \sqrt{\frac{2}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 8\cdot 10^{6}\cdot 1000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}} \approx 0{,}8 \text{ мм},$$

что в несколько раз меньше толщины стенок этого кольца даже на промышленной частоте 50 Гц.

Следует заметить, что выражения (11) и (15) можно использовать для определения вектора Умова-Пойнтинга.

С помощью теоремы Умова-Пойнтинга в комплексной форме получаем возможность определения потока активной и реактивной мощности через боковую поверхность трубы:

$$\int\limits_{S=2\pi r_1 h} [\underline{\dot{E}}\cdot\underline{\dot{H}}]\cdot ds = [\underline{\dot{E}}\cdot\underline{\dot{H}}]\cdot 2\pi r_1 h = P + jQ \approx \frac{hW_1}{2\pi r_1}\cdot I^2\cdot e^{j45^0}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}. \quad (16)$$

для *r* = *r₁*.

На основании полученного выражения для $\underline{\dot{E}}_m$ можно также рассчитать сигнал, наводимый на сигнальной обмотке с числом витков $W_2$, следующим образом.

Учитывая, что каждый проводник сигнальной обмотки, расположенный на внутренней поверхности кольца и ориентированный параллельно оси трубы, имеет длину, равную длине цилиндра *h*, а число этих последовательно соединенных проводников $W_2$, то

$$\dot{U}_{mc} = \underline{\dot{E}}_{m(r=r_1)} h\cdot W_2 \approx \frac{W_1 I_m h\cdot W_2}{2\pi r_1}\cdot\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\cdot e^{j45^0}. \quad (17)$$

При расчете сигнала по формуле (17) не принимаются во внимание те части длины проводников каждого витка, которые находятся за пределами внутренней поверхности кольца, так как ЭДС сигнала будет наводиться под действием падающей волны ЭМП только на проводниках, которые находятся на внутренней поверхности трубы.

Как видно из (17), сигнал, наводимый на обмотке $W_2$, опережает ток первичной обмотки почти на 45°, если отношение $J_0(qr_1)/J_1(qr_1)$ численно равно мнимой единице, что в рассматриваемом случае практически выполняется.

Рассмотрим численный пример. Расчет по формуле (17) был проведен при следующих данных испытуемого образца №1:

$r_1$ = 15,0 мм, $h$ = 40 мм, $\gamma = 0{,}8\cdot 10^7$ (Ом·м)$^{-1}$, $\mu = 1000\mu_0$

$r_2$ = 18,0 мм, $f$ = 50 Гц, $I_m$ = 4 А, $W_1$ = 1, $W_2$=200.

В результате расчета амплитудного значения сигнала на обмотке $W_2$ при указанных параметрах было получено $U_{mc}$ = 0,075 В.

**Результаты эксперимента.** На рис.3 показана схема экспериментального исследования. Испытуемые образцы выточены из одного стального сырого прутка (материал сталь Ст3), отличаются только толщиной стенки: у первого образца наружный диаметр $d_{н1}=2r_1$=36 мм, у второго – $d_{н2}=2r_2$=42 мм; внутренние диаметры – $d_{вн1} = d_{вн2}$ = 30 мм, длины – $h$ = 40 мм.

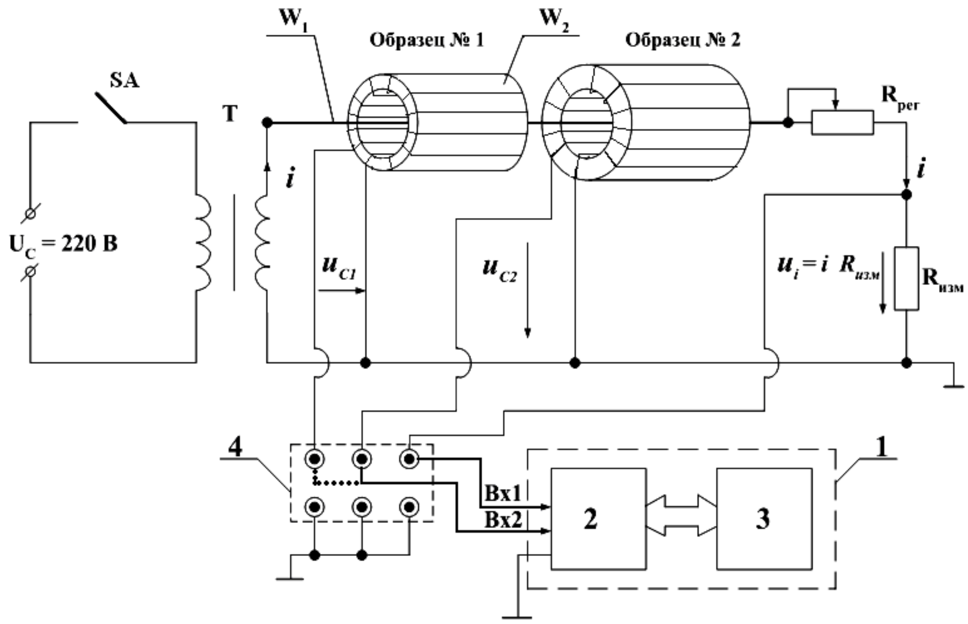
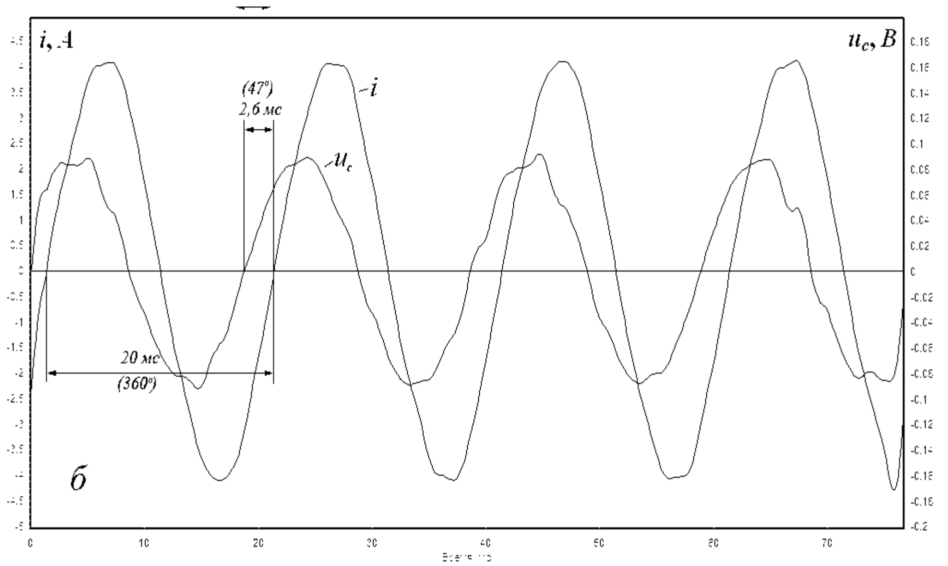
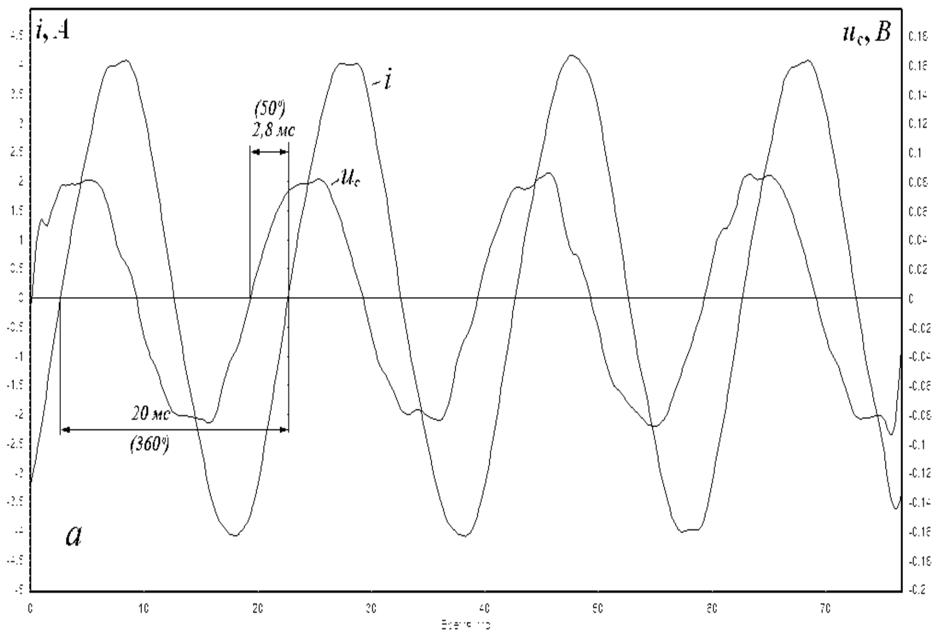



Рис.3. Электрическая схема экспериментальной установки: 1 – аппаратно-программный комплекс (USB-осциллограф); 2 – аналого-цифровой преобразователь; 3 – компьютер; *T* – понижающий трансформатор; $R_{изм}$=1 Ом – измерительное сопротивление для получения осциллограмм тока; $U_{c1}$, $U_{c2}$ – ЭДС сигнальных обмоток образцов

Для регистрации и измерения мгновенных значений тока *i (t)* и $u_c(t)$ использован аппаратно-программный комплекс USB-осциллограф. На рис.4,а представлены кривые *i (t)* и $u_c(t)$ для образца № 1 (толщина стенки – 3 мм), на рис.4,б для образца № 2 (толщина стенки – 6 мм).




а)




б)

Рис.4. Осциллограммы токов возбуждения электромагнитного поля *i(t)* и ЭДС сигнальных обмоток $u_c$: *а* – для образца №1: внутренний диаметр $d_{вн1}$=30 мм; наружный диаметр $d_{н1}$ = 36 мм; длина сердечника *h* = 40 мм; количество витков *w* = 200; материал: сталь – Ст3; $I_m$ = 4 А, $f$ = 50 Гц; *б* – для образца №2: внутренний диаметр $d_{вн}$ = 30 мм; наружный диаметр $d_{н2}$ = 42 мм; длина сердечника *h* = 40 мм; количество витков *w* = 200; материал: сталь – Ст3; $I_m$ = 4 А, $f$ = 50 Гц

**Выводы.** 1.Экспериментальные исследования практически совпадают со значением расчетного сигнала, что свидетельствует о том, что выбранное при расчете значение магнитной проницаемости кольца, равное $\mu = 1000\mu_0$, соответствует начальной магнитной проницаемости испытуемого образца.

2. Установлено, что сдвиг по фазе между ЭДС сигнальной обмотки и током, возбуждающим ЭМП во внутренней полости кольца в условиях сильно выраженного поверхностного эффекта, близок к $45^{\circ}$.

3. ЭДС сигнальной обмотки пропорциональна току, возбуждающего ЭМП во внутренней полости кольца, и имеет слабую зависимость от ω, γ, μ в условиях перемагничивания ферромагнетика на начальном участке кривой намагничивания.

**Библиографический список**

1. Нейман Л.Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. / Л.Р. Нейман. – Л.: Госэнергоиздат, 1949.– 190 с.

2. Бессонов Л.А.Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2003. – 317 с.

Материал поступил в редакцию 11.02.09.

**A.P.POPOV, M.R.VINOKUROV**

**CALCULATION AND AN EXPERIMENTAL RESEARCH PARAMETERS OF SAMPLES OF A FERROMAGNETIC MATERIAL**

In present clause the decision of a linear problem of calculation of an electromagnetic field in system a conductor on which the sine wave current covered with a ferromagnetic conducting pipe proceeds is resulted. The resulted analytical researches are confirmed with experimental data which results allow with a sufficient degree of accuracy to define the characteristic of ferromagnetic conducting environments.

**ПОПОВ Анатолий Петрович** (р. 1937), заведующий кафедрой «Теоретическая и общая электротехника» Омского государственного технического университета, профессор (1990), доктор технических наук (1989). Окончил Томский политехнический институт (1962).
Область научных интересов: электротехника, электроника, информатика.
Автор более 140 научных публикации.

**ВИНОКУРОВ Михаил Романович** (р. 1948), доцент кафедры «Электротехника и техническая кибернетика» Ростовской-на-Дону Академии сельскохозяйственного машиностроения, доцент кафедры «Электротехника и электроника» Донского государственного технического университета (по совместительству), кандидат технических наук (1982). Окончил Омский политехнический институт (1972).
Область научных интересов – теоретическая электротехника.
Автор боле 30 научных публикаций.

popov@omgtu.ru
vmr125@mail.ru