

УДК 004.942:621.375.7

Л.В. ЧЕРКЕСОВА

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ВЫСШИХ ЗОНАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрены вопросы аппроксимации характеристик нелинейных резонаторов – нелинейных элементов параметрических преобразователей, работающих в высших зонах неустойчивости колебаний. Проведен расчёт коэффициентов для аппроксимаций функциями гиперболического синуса, степенно-показательной, дробно-рациональной, степенной функциями и полиномом пятой степени. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью различных аппроксимирующих функций, с реальной экспериментальной кривой.

Ключевые слова: нелинейный резонатор, параметрический резонанс, нелинейно-параметрическая зонная система, аппроксимация характеристик, нелинейный элемент, коэффициенты аппроксимирующей функции, гиперболический синус.

Введение. Для развития современной техники актуальными являются исследования параметрических взаимодействий электромагнитных волновых полей значительной интенсивности с нелинейной средой (газовой смесью, полупроводниковым кристаллом и др.). Процессы, которые происходят в системах типа «активная среда – электромагнитное поле», лежат в основе функционирования практически всех электронно-волновых приборов: от вакуумных и твердотельных электронных устройств до лазерных и плазменных устройств.

На протяжении последнего десятилетия значительное внимание научного мира уделяется изучению и анализу процессов, происходящих в существенно нелинейных системах. Нелинейно-параметрический эффект широко используется в электронике для создания маломощных усилителей и высокоэффективных генераторов, элементов памяти, логических элементов: регистров, счетчиков, дешифраторов, сумматоров и функциональных преобразователей и др.

Одним из предметов исследования в рамках теории нелинейных колебаний являются закономерности параметрического резонанса *в высших зонах неустойчивости колебаний*. Работы по повышению быстродействия и эффективности модуляции параметрических систем идут в нескольких направлениях. Одним из малоизученных, но перспективных направлений в разработке электронных средств является разработка устройств на основе резонансных схем.

Нелинейный резонатор представляет собой колебательную параметрическую зонную систему, работающую в высших зонах неустойчивости колебаний.

Применение нелинейно-параметрических зонных (пазонных) систем (НПС) в качестве высококачественных усилителей, генераторов, преобразователей, а в цифровой технике – триггеров, логических элементов и элементов памяти позволит не только улучшить технические характеристики аппаратуры, но и повысить их надежность в условиях неблагоприятного воздействия окружающей среды. Достоинства таких систем обуславливают их использование в измерительной технике, в качестве датчиков НЧ-диапазона, как маломощных функциональных устройств. Необходима

разработка точных методик и широкого класса экспериментальных методов и средств исследования. Изучение свойств и закономерностей явлений в НПС, работающих в высших зонах неустойчивости, весьма актуально. Применение подобных исследований лежит в плоскости нелинейных параметрических резонансных явлений в наноразмерных структурах.

Нелинейно-параметрические взаимодействия распространены в природе очень широко и присущи многим нелинейным средам. Колебательные процессы в НПС удобно моделировать с помощью нелинейных электрических цепей, в которых легко получить, описать и исследовать все явления и процессы, связанные с нелинейно-параметрическими взаимодействиями.

В теоретических исследованиях и практических расчётах электрических цепей, содержащих нелинейную индуктивность, характеристику индуктивности задают с помощью какой-либо аппроксимирующей функции, которая выражает зависимость между мгновенным значением магнитной индукции $\hat{A}$ и напряжённостью $\hat{I}$ магнитного поля в сердечнике. При выборе аппроксимирующей функции исходят из следующих соображений: она должна иметь аналитическое выражение, поскольку его легче исследовать и легче интерпретировать полученные результаты. Отличие аппроксимирующей функции от реальной экспериментальной кривой должно быть достаточно малым, а функция должна отвечать физике исследуемого процесса, учитывая его характерные особенности. Вместе с тем вид аппроксимирующей функции должен быть, по возможности, простым, чтобы не усложнять анализ громоздкостью вычислений. Эти требования противоречивы, и в реальной ситуации при выборе аппроксимации нелинейных характеристик системы приходится идти на компромисс. Вопросам аппроксимации и их погрешностям посвящено множество работ, в частности работа [1]. При определении коэффициентов аппроксимирующей функции $H = f(B)$ возникает трудность в экспериментальном получении кривой намагничивания классическими методами [2, 3].

Уже в первой зоне неустойчивости НПС возможны нелинейные колебания, а в зонах выше третьей наблюдаются существенно нелинейные явления, поскольку в них используется сильная накачка [2]. При этом энергоёмкий элемент резонансного контура периодически находится в режиме насыщения. Поэтому выбранная функция аппроксимации, которая должна адекватно опи-

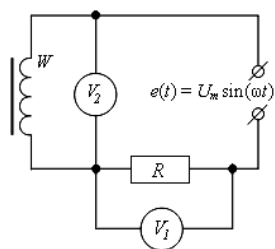


Рис.1. Схема нахождения ВАХ магнитного материала для действующих значений токов и напряжений
сывать вольт-амперную характеристику (ВАХ) в широком диапазоне, играет особо важную роль.

Чтобы определить коэффициенты аппроксимации, используем ВАХ для действующих значений токов и напряжений, прямо пропорциональную вебер-амперной характеристике магнитного материала. Схема для нахо-

ждения ВАХ магнитного материала для действующих значений токов и напряжений показана на рис. 1.

Произведём расчёт коэффициентов для аппроксимаций несколькими функциями: гиперболического синуса, степенно-показательной, дробно-рациональной, степенной, степенной с линейным членом и полиномом пятой степени. Согласие расчётной и экспериментальной кривой будем уточнять по критерию наименьших квадратов. При выводе соотношений не учитываются индуктивность рассеивания, активные потери в цепи и потери на гистерезис ввиду малости этих величин и их несущественности для данной задачи.

Постановка задачи. Исходными данными для расчётов являются действующие значения тока I_K и напряжения U_K . Для аппроксимирующей функции конкретного вида $H = f(B)$ требуется минимизировать сумму

$$\sum_{k=1}^n p_k (\bar{I}_k - I_k)^2, \quad (1)$$

где $\bar{I}_k, I_k$ – расчётные и экспериментальные значения действующего тока; p_k – весовой коэффициент k – й точки вольт-амперной характеристики; n – число точек ВАХ.

Аппроксимация гиперболическим синусом. Пусть нелинейная зависимость $H = f(B)$ представлена в виде гиперболического синуса $H = \alpha sh\beta B$, где α, β – коэффициенты аппроксимации, подлежащие определению. Используя второй закон Кирхгофа и закон полного тока для индуктивного элемента, подключённого к источнику синусоидального напряжения $e(t) = U_m \sin \omega t$, с учётом сделанных выше допущений и рис.1 получаем следующие выражения:

$$SW \frac{dB}{dt} = U_m \sin \omega t = e(t), \quad (2)$$

$$iW = lH,$$

где S – площадь поперечного сечения сердечника; W – число витков обмотки возбуждения; l – длина средней линии магнитного поля в сердечнике; U_m – амплитуда напряжения возбуждения; ω – круговая частота напряжения возбуждения; i – мгновенное значение тока в контуре.

Рассмотрим совместно уравнения (2) относительно тока. Учитывая, что постоянная составляющая магнитной индукции в сердечнике отсутствует, из первого уравнения получаем выражение $B = -\frac{U_m}{SW\omega} \cos \omega t$.

Используя аппроксимацию $H = \alpha sh\beta B$, находим искомый ток:

$$i(t) = -\frac{\alpha l}{W} sh \left(\frac{\beta U_m}{SW\omega} \cos \omega t \right). \quad (3)$$

В полученное выражение входят коэффициенты аппроксимации α и β , которые требуется определить с помощью ВАХ для действующих зна-

чений тока и напряжения [3]. Для этого воспользуемся известным соотношением между действующим и мгновенным значениями тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad , \quad (4)$$

а также разложением гиперболического косинуса в ряд Фурье

$$\operatorname{ch}(x \cos \omega t) = I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(x) \cos 2k\omega t \quad ,$$

где $I_0(x), I_{2k}(x)$ – модифицированные функции Бесселя.

Применив формулу $\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - 1)$, получим выражение для i^2 :

$$\begin{aligned} i^2 &= \frac{\alpha^2 l^2}{W^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\beta U_m}{SW\omega} \cos \omega t = \\ &= \frac{\alpha^2 l^2}{2W^2} \left(I_0\left(\frac{\beta U_m}{SW\omega}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}\left(\frac{\beta U_m}{SW\omega}\right) \cos 2k\omega t \right) \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (4) и учтя, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $U_m = U\sqrt{2}$, после преобразований найдём зависимость между действующими значениями тока I и напряжения U в приведённой цепи:

$$I = \alpha a \sqrt{I_0(2q\beta U) - 1} \quad , \quad (5)$$

где $a = \frac{l}{W\sqrt{2}}$; $q = \frac{\sqrt{2}}{SW\omega}$.

Для точек ВАХ нелинейной индуктивности, за исключением области вблизи начала координат, выполняется неравенство $I_0(x) \gg 1$, где $x = 2q\beta U$.

Используя асимптотическое разложение, справедливое для больших значений x , для выражения $I_0(x)$ получаем соотношение

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad .$$

При $x > 3$ относительная погрешность при замене $I_0(x)$ на $\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ не превышает 6%. С учётом описанных выше соотношений из выражения (5) получим

$$I = \frac{\alpha \cdot a}{\sqrt[4]{4\pi q\beta U}} \exp(q\beta U) \quad (6)$$

с погрешностью, не превышающей значения $\frac{\alpha a}{2\sqrt{I_0(2q\beta U)}} = \frac{\alpha a}{2I_0(x)}$, где $x = 2q\beta U$.

Определим коэффициенты аппроксимации методом выбранных точек по двум значениям ВАХ: I_1, U_1 и I_2, U_2 . Из выражения (6) имеем соотношения:

$$I_1 = \frac{\alpha \cdot a}{\sqrt[4]{4\pi q\beta U_1}} \exp(q\beta U_1); \quad I_2 = \frac{\alpha \cdot a}{\sqrt[4]{4\pi q\beta U_2}} \exp(q\beta U_2). \quad (7)$$

Разделив второе уравнение (7) на первое, находим

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt[4]{\frac{U_1}{U_2}} \exp q\beta (U_2 - U_1). \quad (8)$$

Из выражений (7) и (8) получаем выражения для коэффициентов α и β :

$$\beta = \frac{1}{q(U_2 - U_1)} \ln \left(\frac{I_2}{I_1} \sqrt[4]{\frac{U_2}{U_1}} \right), \quad \alpha = \frac{I_1}{a} \sqrt[4]{4\pi q\beta U_1} \exp(-q\beta U_1).$$

Более точные значения коэффициентов аппроксимации можно получить из условия минимума суммы (1), которая является функцией искомых α и β и имеет вид

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n p_k \left[\alpha \cdot a \sqrt{I_0(2q\beta U_k) - 1} - I_k \right]^2.$$

Из условия $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$ находим для α как функции β :

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n p_k I_k \sqrt{I_0(2q\beta U_k) - 1}}{a \sum_{k=1}^n p_k [I_0(2q\beta U_k) - 1]}. \quad (9)$$

Из условия $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$ получаем уравнение

$$\alpha \cdot a \sum_{k=1}^n p_k U_k I_1(2q\beta U_k) - \sum_{k=1}^n \frac{p_k I_k U_k I_1(2q\beta U_k)}{\sqrt{I_0(2q\beta U_k) - 1}} = 0. \quad (10)$$

Подставив в уравнение (10) выражение для α , взятое из выражения (9), получим нелинейное уравнение для определения β :

$$\begin{aligned} \Phi(\beta) = & \sum_{k=1}^n p_k I_k \sqrt{I_0(2q\beta U_k) - 1} - \sum_{k=1}^n p_k U_k I_1(2q\beta U_k) - \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{p_k I_k U_k I_1(2q\beta U_k)}{\sqrt{I_0(2q\beta U_k) - 1}} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, из выражения (11) можно найти β , а затем из уравнения (9) можно найти α . Если используемая часть нелинейной характеристики индуктивности далека от области насыщения, то выражения для определения коэффициентов α и β можно существенно упростить. Обозначим поправки к коэффициентам α_0 и β_0 , найденным по методу выбранных точек, через $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ соответственно и проведём линейари-

зацию выражения (5) относительно этих поправок. Тогда для каждой точки ВАХ можно написать условное уравнение

$$a_k \Delta \alpha + b_k \Delta \beta = l_k, \quad (12)$$

где $a_k = a \sqrt{I_0(2q\beta_0 U_k) - 1}$; $b_k = \frac{\alpha_0 U_k I_1(2q\beta_0 U_k)}{2\sqrt{I_0(2q\beta_0 U_k) - 1}}$; $l_k = I_k - \alpha_0 a_k$.

Искомые поправки $\Delta \alpha$ и $\Delta \beta$ можно найти из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \alpha \sum_{k=1}^n p_k a_k^2 + \Delta \beta \sum_{k=1}^n p_k a_k b_k = \sum_{k=1}^n p_k a_k l_k, \\ \Delta \alpha \sum_{k=1}^n p_k a_k b_k + \Delta \beta \sum_{k=1}^n p_k b_k^2 = \sum_{k=1}^n p_k b_k l_k. \end{cases}$$

Процесс приближения можно повторить, взяв в качестве α_0 и β_0 улучшенные значения коэффициентов. Этот процесс сходится, если невязки условных уравнений (12) не будут слишком велики.

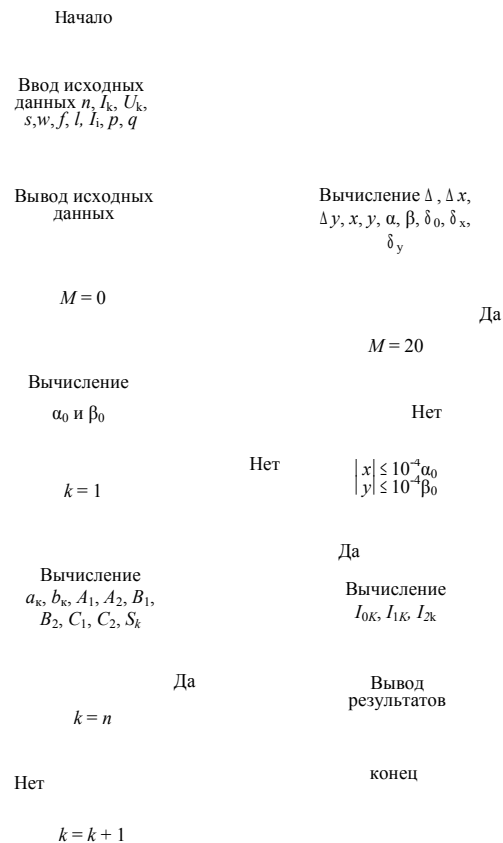


Рис. 2. Алгоритм определения коэффициентов аппроксимации

функцией гиперболического синуса

На рис.2 представлен алгоритм определения коэффициентов аппроксимации гиперболическим синусом по n аппроксимирующим точкам за M циклов, где x и y – погрешности вычисления α и β .

Аппроксимация степенно-показательной функцией. Аппроксимация степенно-показательной функцией $H = \alpha B \exp(\beta B^2)$ проводится аналогично предыдущему случаю. Находим зависимость между действующими значениями тока и напряжения. Мгновенное значение тока в контуре имеет вид

$$i = \frac{\alpha \chi \chi B}{W} \exp(\beta B^2). \quad (13)$$

Из выражения (13) с учётом (3) получаем соотношение для i^2 :

$$i^2 = (\alpha \chi a q U)^2 (1 + \cos 2\omega t) \exp(\beta q^2 U^2 + \beta q^2 U^2 \cos 2\omega t).$$

При вычислении действующего значения тока по формуле (4) воспользуемся разложением показательной функции в ряд Фурье:

$$\exp(\beta q^2 U^2 \cos 2\omega t) = I_0(\beta q^2 U^2) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\beta q^2 U^2) \cos 2k\omega t.$$

Сделав несложные преобразования и вычислив интеграл, получим зависимость между действующими значениями тока и напряжения:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) \exp(\beta \chi q^2 U^2 \cos 2\omega t) dt = I_0(\beta \chi q^2 U^2) + I_1(\beta \chi q^2 U^2),$$

$$I = \alpha \chi a q U \sqrt{I_0(\beta \chi q^2 U^2) + I_1(\beta \chi q^2 U^2)} \exp^{\frac{1}{2}} \beta \chi q^2 U^2. \quad (14)$$

Используя асимптотическое разложение, учтём, что для больших значений x верно соотношение $I_0(x) \approx I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$. Тогда (14) переписывается в виде

$$I = \alpha \chi a \sqrt{q U} \chi \sqrt{\frac{2}{\pi \beta}} \exp(\beta q^2 U^2).$$

Из этого выражения по методу выбранных точек находим:

$$I_1 = \alpha \chi a \sqrt{q U_1} \chi \sqrt{\frac{2}{\pi \beta}} \exp(\beta q^2 U_1^2); \quad I_2 = \alpha \chi a \sqrt{q U_2} \chi \sqrt{\frac{2}{\pi \beta}} \exp(\beta q^2 U_2^2).$$

Отсюда получаем приближённые значения для α и β :

$$\beta = \frac{1}{q^2 (U_2^2 - U_1^2)} \ln \frac{I_2}{I_1} \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}, \quad \alpha = \frac{I_1}{a \sqrt{q U_1}} \sqrt{\frac{\pi \beta}{2}} \exp(-q^2 \beta U_1^2).$$

Сумма (1) теперь будет иметь вид

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n p_k \left[\alpha \cdot a q U_k \sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)} \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right) - I_k \right]^2.$$

Используя формулы для производных от модифицированных функций Бесселя, из $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$ находим более точные значения коэффициентов α и β – нелинейное уравнение для определения более точного значения β и формулу для определения α :

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \frac{I_k U_k^3 \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right)}{\sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)}} \left[I_0(\beta q^2 U_k^2) + \left(1 - \frac{1}{\beta q^2 U_k^2}\right) I_1(\beta q^2 U_k^2) \right]}{a q \sum_{k=1}^n p_k U_k^4 \exp(\beta q^2 U_k^2) \times \left[I_0(\beta q^2 U_k^2) + \left(1 - \frac{1}{\beta q^2 U_k^2}\right) I_1(\beta q^2 U_k^2) \right]}.$$

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^n p_k I_k U_k \sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)} \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right) -$$

$$\sum_{k=1}^n p_k U_k^4 \exp(\beta q^2 U_k^2) \times \left[I_0(\beta q^2 U_k^2) + \left(1 - \frac{1}{\beta q^2 U_k^2}\right) I_1(\beta q^2 U_k^2) \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^n p_k U_k^2 \left[I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2) \right] \exp(\beta q^2 U_k^2) = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n p_k I_k U_k^3 \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right) \frac{I_0(\beta q^2 U_k^2) + \left(1 - \frac{1}{\beta q^2 U_k^2}\right) I_1(\beta q^2 U_k^2)}{\sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)}} = 0.$$

Коэффициенты условного уравнения (12) имеют вид:

$$a_k = a q U_k \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right) \sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)}, \quad I_k = I_k - \alpha a_k.$$

$$b_k = \frac{1}{2} \alpha a q^3 U_k^3 \exp\left(\frac{1}{2} \beta q^2 U_k^2\right) \frac{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)}{\sqrt{I_0(\beta q^2 U_k^2) + I_1(\beta q^2 U_k^2)}} \left(1 - \frac{1}{\beta q^2 U_k^2}\right).$$

Дробно-рациональная аппроксимация. Дробно-рациональная аппроксимация имеет вид $H = \frac{\alpha B}{\beta - B^2}$. После преобразований для значения i^2

получаем выражение $i^2 = \frac{4(\alpha a q U)^2 \cos^2 \omega t}{(\beta - U^2 q^2 \cos^2 \omega t)^2}$. Вычислив интеграл

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{(\alpha a q U)^2}{\sqrt{\beta (\beta - q^2 U^2)^3}}, \quad \text{получим формулу для действующих значений тока}$$

и напряжения: $I = \frac{\alpha a q U}{\sqrt[4]{\beta (\beta - q^2 U^2)^3}}$. По методу выбранных точек получаем

выражения для I_1 и I_2 : $I_1 = \frac{\alpha a q U_1}{\sqrt[4]{\beta (\beta - q^2 U_1^2)^3}}$; $I_2 = \frac{\alpha a q U_2}{\sqrt[4]{\beta (\beta - q^2 U_2^2)^3}}$.

Из этих выражений получаем приближённые формулы для определения α и β :

$$\beta = q^2 \left[U_2^2 - U_1^2 \sqrt[3]{\left(\frac{I_1 U_2}{I_2 U_1} \right)^4} \right] \cdot \left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{I_1 U_2}{I_2 U_1} \right)^4} \right]^{-1} = q^2 \frac{(U_2^2)^3 \sqrt[3]{\left(\frac{I_2}{I_1} \times \frac{U_1}{U_2} \right)^4} - U_1^2}{\sqrt[3]{\left(\frac{I_2}{I_1} \times \frac{U_1}{U_2} \right)^4} - 1};$$

$$\alpha = \frac{1}{a q} \frac{I_1}{U_1} \sqrt[4]{\beta (\beta - q^2 U_1^2)^3}$$

Сумма (1) в данном случае имеет вид

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n p_k \left[\alpha a q U_k \beta^{-\frac{1}{4}} (\beta - q^2 U_k^2)^{-\frac{3}{4}} - I_k \right]^2.$$

Из условий $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$ получаем формулу для определения α и нелинейное уравнение для определения β :

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n p_k I_k U_k \beta^{-\frac{1}{4}} (\beta - q^2 U_k^2)^{-\frac{3}{4}}}{a q \sum_{k=1}^n p_k U_k^2 \beta^{-\frac{1}{2}} (\beta - q^2 U_k^2)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{p_k I_k U_k (4\beta - q^2 U_k^2)}{\sqrt[4]{\beta^5 (\beta - q^2 U_k^2)^7}}}{a q \sum_{k=1}^n \frac{p_k U_k^2 (4\beta - q^2 U_k^2)}{\sqrt{\beta (\beta - q^2 U_k^2)^5}}};$$

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k I_k U_k}{\sqrt[4]{\beta (\beta - q^2 U_k^2)^3}} - \sum_{k=1}^n \frac{p_k U_k^2 (4\beta - q^2 U_k^2)}{\sqrt{\beta^3 (\beta - q^2 U_k^2)^5}} -$$

$$- \sum_{k=1}^n \frac{p_k I_k U_k (4\beta - q^2 U_k^2)}{\sqrt[4]{\beta^5 (\beta - q^2 U_k^2)^7}} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k U_k^2}{\sqrt{\beta (\beta - q^2 U_k^2)^3}} = 0.$$

Выражения для коэффициентов условных уравнений имеют вид:

$$a_k = a q U_k \beta_0 (\beta_0 - q^2 U_k^2)^3 \beta_0^{-\frac{1}{4}};$$

$$b_k = -\frac{1}{4} \alpha_0 a q U_k \beta_0^5 \left(\beta_0 - q^2 U_k^2 \right)^3 \frac{1}{\beta_0^{\frac{1}{4}}} + 3 \beta_0 \left(\beta_0 - q^2 U_k^2 \right)^7 \frac{1}{\beta_0^{\frac{1}{4}}};$$

$$l_k = I_k - \alpha_0 a_k.$$

Степенная аппроксимация. Степенная аппроксимация $H = \alpha B^{2\mu+1}$, где $\mu = 1, 2, 3, \dots; \mu \ll N$. Выражение для квадрата мгновенного тока имеет вид $i^2 = 2(\alpha a)^2 (q U \cos \omega t)^{4\mu+2}$. Для вычисления интеграла $\int_0^T i^2 dt$ вна-

чале нужно вычислить интеграл $y_{2\pi} = \int_0^{2\pi} \cos^{2\mu} x dx$. Интегрируя его по ча-

стям, получаем: $y_{2\pi} = \frac{2n-1}{2n} y_{2n-2}$, где $y_{2n-2} = \int_0^{2\pi} \cos^{2n-2} x dx$. Исполни-

вая эту рекуррентную формулу, находим выражение для y_{2n} :

$$y_{2n} = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot 2n} = 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = 2\pi \frac{(2+1)}{2^{2n} \Gamma(n+1)},$$

где $\Gamma(2n+1)$, $\Gamma(n+1)$ – гамма-функции, таблицы которых имеются в математических справочниках, например, в работе [4]. После преобразований получаем следующую зависимость между действующими значениями тока и напряжения:

$$I = (\alpha a) \frac{q U}{2} \frac{\sqrt{2(4\mu+2)!}}{(2\mu+1)!} = \alpha \frac{q U}{g},$$

где $g = \frac{2}{q} \frac{(2\mu+1)!}{a \sqrt{2(4\mu+2)!}} = \frac{2}{q} \frac{\Gamma(2\mu+2)}{a \sqrt{2} (4\mu+3)!}.$

Сумма (1) в случае степенной аппроксимации имеет вид

$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^n p_k \alpha \frac{U_k}{g} - I_k.$$

Из условия минимума суммы $\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ находим выражение для α :

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n p_k U_k^2 I_k}{\sum_{k=1}^n p_k U_k^{4\mu+2}}. \quad (15)$$

Степенная аппроксимация с линейным членом. Степенная аппроксимация с линейным членом имеет вид $H = \alpha B^{2\mu+1} + \beta B$. Такая аппроксимация позволяет улучшить согласие между расчётной и экспериментальной кривыми в линейной части ВАХ по сравнению со степенной аппроксимацией, в которой $\beta = 0$. Зависимость между действующими значениями тока I и напряжения U здесь можно представить в виде

$$I = a\sqrt{\gamma(qU)^{4\mu+2}\alpha^2 + \eta(qU)^{2\mu+2}\alpha\beta + (qU)^2\beta^2},$$

где $\gamma = \frac{\Gamma(4\mu+3)}{2^{4\mu+1}\Gamma(2\mu+2)}$; $\eta = \frac{\Gamma(2\mu+3)}{2^{2\mu}\Gamma(\mu+2)}$.

Это выражение можно записать иначе:

$$I = \alpha \left(\sqrt{\gamma(qU)^{2\mu+1}\alpha + qU\beta} \right) \sqrt{1-z}, \text{ где } z = \frac{\alpha\beta(2\sqrt{\gamma} - \eta)(qU)^{2\mu}}{\alpha\sqrt{\gamma}(qU)^{2\mu} + \beta^2}. \quad (16)$$

Непосредственный расчёт показывает, что при любых значениях U и μ величина z намного меньше единицы. Уравнение вида (16) решается методом последовательных приближений, причем величину z в первом приближении полагаем равной нулю. Если степень многочлена $H = \alpha B^{2\mu+1} + \beta B$ достаточно высока, то коэффициент β предпочтительнее определять не совместно с коэффициентом α , а независимо, по линейной части данной ВАХ. Тогда коэффициент α найдётся в несколько приближений из выражения (15), где вместо I_k следует использовать выражение

$$\frac{I_k}{\sqrt{1-z}} - aq\beta U_k.$$

Аппроксимация полиномом пятой степени. Нелинейную зависимость $H = f(B)$ можно аппроксимировать полиномом пятой степени: $H = k_1 B + k_3 B^3 + k_5 B^5$, где k_1, k_3, k_5 – коэффициенты аппроксимации [3]. После аналогичных преобразований получим выражения для действующих значений тока I и напряжения U :

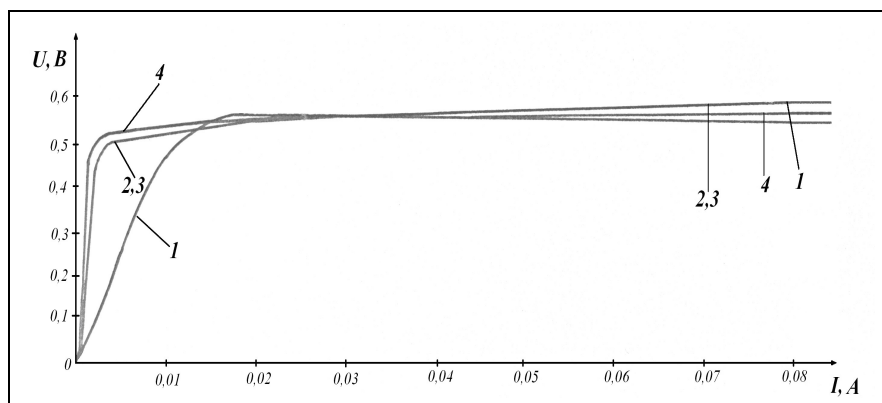
$$I = \alpha_1 U + \alpha_3 U^3 + \alpha_5 U^5; \text{ где } \alpha_1 = \frac{k_1 l}{SW_{\omega}^2}; \alpha_3 = \frac{3k_3 l}{4W(SW_{\omega})^3}; \alpha_5 = \frac{10k_5 l}{16W(8W_{\omega})^5}.$$

Полученное выражение представляет собой аналитическую связь между действующим значением напряжения U и тока I для нелинейной индуктивности при аппроксимации нелинейной характеристики намагничивания $H = f(B)$ полиномом пятой степени. Получение коэффициентов аппроксимации полиномом пятой степени подробно описано в нашей монографии [3].

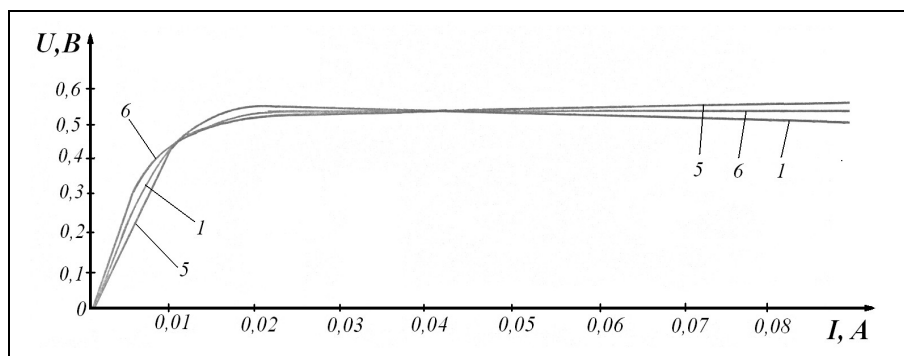
Алгоритмы определения коэффициентов аппроксимации всех рассмотренных функций аналогичны алгоритму, представленному на рис.2.

Сравнение полученных аппроксимаций с экспериментом. Описанные выше аппроксимации дают лучшие (в смысле критерия точности) значения коэффициентов, которые можно получить путем варьирования вы-

бранных точек, задающих область, и целиком содержащую внутри себя экспериментальную кривую или интересующую ее часть. На рис.3 показаны экспериментальные и расчётные кривые намагничивания, пересчитанные к току и напряжению, для рассмотренных выше аппроксимаций, рассчитанные с помощью написанной на языке программирования DELPHI 2006 компьютерной программы *APPROXIMATA*, реализующей алгоритмы расчёта коэффициентов всех изложенных выше аппроксимаций.



а)



б)

Рис. 3. Кривые намагничивания, пересчитанные к току и напряжению, полученные с помощью программы *APPROXIMATA*: а) 1 – по экспериментальным данным; 2 – аппроксимация гиперболическим синусом, $H = 0,244 \cdot 10^{-4} \operatorname{sh}(37,5B)$; 3 – степенно-показательная аппроксимация, $H = 1,077B \exp(30,52B^2)$; 4 – степенная аппроксимация, $H = 6,63 \cdot 10^9 B^{21}$; б) 1 – по экспериментальным данным, 5 – дробно-рациональная аппроксимация, $H = \frac{7,95B}{0,22 - B^2}$; 6 – степенная аппроксимация с линейным членом, $H = 5,25 \cdot 10^9 B^{21} + 66,8B$

Выводы. Оказывается, что кривые, соответствующие аппроксимации гиперболическим синусом и степенно-показательной функцией, практически

совпадают друг с другом, если в обоих случаях коэффициенты α и β определяются по одним и тем же выбранным точкам вольт-амперной характеристики. В случае глубокого насыщения материала сердечника эти кривые хорошо согласуются с экспериментальной ВАХ в нелинейной области и

хуже – в линейной. Этот же вывод относится и к степенной аппроксимации, где $2\mu + 1 = 21$. Заметно лучшее совпадение с линейной частью экспериментальной ВАХ наблюдается у кривой, соответствующей аппроксимации степенным двучленом с линейной частью, степень которого равна 21, а также дробно-рациональной аппроксимации, что подтверждает вывод, сделанный относительно неё в работе [3].

Таким образом, именно аппроксимация гиперболическим синусом в случае глубокого насыщения материала сердечника лучше согласуется с экспериментальной ВАХ в нелинейной области. Кроме того, эта аппроксимация приводит к получению более компактных выражений, что уменьшает громоздкость расчётов и делает именно эту аппроксимацию наиболее пригодной для описания сильно нелинейной характеристики параметрической системы.

Формулы для коэффициентов вышеуказанных аппроксимаций найдут применение при расчётах характеристик нелинейных элементов параметрических преобразователей, работающих в высших зонах неустойчивости колебаний, содержащих существенно нелинейные элементы в составе нелинейных резонаторов различной физической природы.

Библиографический список

1. Кузьменко Н.И. К вопросу об аппроксимации основной характеристики намагничивания / Н.И. Кузьменко, Е.И. Гольдштейн // Изв. вузов. Электромеханика. – 1977. – №7.
2. Самойлов К.И. Элементы теории колебаний. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие / К.И. Самойлов, М.Р. Витоль, Э.М. Черниговская / Московский институт радиотехники, электроники и автоматики – М., 1992. – 279 с.
3. Черкесова Л.В. Моделирование нелинейно-параметрических систем / Л.В. Черкесова, О.И. Подгайко. – Новочеркасск: Редакция журнала Изв. вузов. Электромеханика. 2006. – 24 с.
4. Дуайт Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.В. Дуайт. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Материал поступил в редакцию 02.07.09.

L.V. CHERCKESOVA

THE CHARACTERISTICS APPROXIMATION OF NONLINEAR ELEMENTS IN PARAMETRICAL TRANSFORMERS, WORKING IN SUPERIOR ZONES OF INSTABILITY OF OSCILLATIONS

In the article is looked the questions of the approximation of characteristics of nonlinear element in parametrical devices of different kinds, working superior zones of instability of oscillations. In this work there were calculated coefficients of different approximating function (of hyperbolic sinus and other functions). The results that were received with aid of different approximating functions were compared with real experimental curve.

ЧЕРКЕСОВА Лариса Владимировна, кандидат технических наук (1997), доцент кафедры «Информатика» (2001) Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института). Окончила Харьковский институт радиоэлектроники (1986). Научные интересы: радиоэлектроника, моделирование динамических систем, синергетика. Опубликовала более 150 научных работ.

chia2002@inbox.ru