УДК 539.32

А.Н. БОБРОВА, А.О. ВАТУЛЬЯН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ МОДУЛЯ ЮНГА ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

В статье представлен метод решения прямой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, возникающего при анализе продольных колебаний стержней переменной жесткости на основе разностных схем, а также предложен способ определения закона изменения модуля Юнга.
Ключевые слова: *коэффициентная обратная задача, разностное уравнение, колебания, неоднородная среда.*

Введение. Коэффициентные задачи в естествознании, в математической физике, в механике деформируемого твердого тела – интенсивно развивающийся раздел вычислительной и экспериментальной механики, требующий основательной теоретической базы, составляет один из важнейших классов обратных задач. Для этого класса задач при идентификации свойств функционально-градиентных материалов можно выделить модели, в которых идентифицируемые дифференциальные операторы имеют постоянные коэффициенты (анизотропная теория упругости, линейная теория вязкоупругости при дифференциальной форме определяющих уравнений), и модели, в которых требуется идентифицировать неоднородные свойства (например, в геофизике при моделировании литосферных плит и при разведке полезных ископаемых, в горной механике при анализе напряженного состояния в окрестности выработок и особенно предварительного напряженного состояния, при изучении наноразмерных объектов, в биомеханике при исследовании неоднородных свойств различных тканей и вибрационных воздействий на них с целью идентификации). При этом определение модулей упругости и плотности как функций координат на основе данных об измеренных полях смещений или ускорений на границе тела в установившемся режиме колебаний требует решения обратных задач для дифференциальных операторов (как обыкновенных, так и в частных производных).

Методы определения модулей упругости играют большую роль в процедуре идентификации объектов в различных областях естествознания. Главная проблема при исследовании задач подобного типа – это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и известными (измеренными) функциональными зависимостями. Поскольку соответствующие дифференциальные операторы имеют переменные коэффициенты, то построить явные представления решений не представляется возможным. В этой ситуации, пожалуй, единственным эффективным средством анализа прямых задач для неоднородных сред (и соответственно дифференциальных операторов с переменными коэффициентами) в настоящее время являются вычислительные технологии, основанные на идеологии метода конечных элементов, или метода конечных разностей. К сожалению, эти вычислительные технологии не позволяют формулировать искомые операторные отношения в явном виде [1].

Наиболее простыми для исследования являются коэффициентные обратные задачи для дифференциальных операторов второго порядка, которые часто встречаются при описании продольных и крутильных колебаний стержней переменной жесткости. При этом возможны две постановки обратной задачи по определению закона изменения модуля упругости. В первой постановке он определяется на основе задания амплитудно-частотной характеристики одного из торцов стержня [2]. Во второй постановке известно поле смещений в некотором наборе точек на фиксированной частоте. Настоящая статья посвящена исследованию второй постановки обратной задачи – разработке вычислительных схем, основанных на разностных аппроксимациях и процедуре сглаживания с помощью сплайн-аппроксимации, и анализу возможностей такого подхода в процедуре идентификации в различных ситуациях.

Постановка задачи. Рассмотрим закрепленный на конце $x = 0$ упругий стержень длиной l, в котором колебания возбуждаются при помощи силы $p(t)$, приложенной к торцу стержня $x = l$. Будем считать, что упругий модуль $E = E(x)$, плотность $\rho = \rho(x)$, площадь поперечного сечения $F = F(x)$ есть произвольные положительные функции координаты x.

Уравнение движения для неоднородного стержня имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho(x)F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

а граничные условия представимы в форме

$$u(0,t) = 0,$$
$$E(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\frac{p(t)}{F(l)}. \tag{2}$$

Будем далее рассматривать задачу об установившихся колебаниях, считая, что $p(t) = pe^{i\omega t}$, и полагая $u(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$. Тогда после отделения временного множителя краевая задача имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(E(x)F(x)\frac{du(x)}{dx} \right) + \rho(x)F(x)\omega^2 u(x) = 0; \tag{3}$$

$$u(0) = 0,$$
$$E(l)\frac{du(l)}{dx} = -\frac{p}{F(l)} = p_*, \tag{4}$$

где ω – частота колебаний.

Будем считать, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотной характеристике торца стержня следующего вида:

$$u(x,\omega_0) = U(x), \quad x \in [0,l]. \tag{5}$$

Целью решения задачи является восстановление неизвестной функции $E(x)$ по известной информации (5). Будем далее считать, что F и ρ – постоянные.

Задача (3)-(5) представляет собой коэффициентную обратную задачу для дифференциального оператора 2-го порядка и является некорректной проблемой [1,3].

Приведем краевую задачу (3)-(4) к безразмерному виду, введя безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$, безразмерные параметры и функции $g(x) = \frac{E(x)}{E_0}$, $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 l^2}{E_0}$, $p_0 = \frac{p_*}{E(l)}$ (далее в силу линейности прямой задачи в ряде случаев будем полагать $p_0 = 1$):

$$(gu')' + \kappa^2 u = 0, \tag{6}$$

$$u(0) = 0,\ g(l)u'(l) = -p_0. \tag{7}$$

Отметим, что краевая задача (6) – (7) при $g = 1$ имеет точное решение следующего вида: $u(\xi,\kappa) = -\frac{p_0\sin(\kappa\xi)}{\kappa\cos\kappa}$, причем при $\kappa = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0,1\ldots$ функция $f(\kappa) = \frac{u(1,\kappa)}{p_0} = -\frac{tg\kappa}{\kappa}$ имеет разрывы второго рода, что соответствует резонансным частотам для однородного стержня. Подобной структурой обладает решение задачи (6)-(7) для произвольной ограниченной положительной функции $g(x)$ [4].

Прямая задача. При заданном произвольном законе изменения $g(x)$ ($g(x)$ может быть гладкой функцией, может иметь конечное число разрывов первого рода) краевая задача (6)-(7) может быть исследована лишь численно на основе сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, как это реализовано в [2], либо на основе анализа разностной схемы соответствующей задачи (6)-(7).

При решении этой прямой задачи интерес вызывает исследование отображения $M : G \to U$, где $g \in G$, $u(x,\kappa) \in U, (x,\kappa) \in [0,1]\times[\kappa_1,\kappa_2]$ для разных областей определения G. Так, в качестве возможных вариантов областей определения этого отображения могут быть исследованы множества дважды дифференцируемых или кусочно-непрерывных функций. Отметим также, что описание свойств области действия такого отображения требует использования качественной теории дифференциальных уравнений. Элементы U представляют собой аналитические функции по второму аргументу в нерезонансной области; в общем случае это мероморфные функции. Гладкость элементов U определяется свойствами G, в первом случае это бесконечно дифференцируемые функции, во втором – непрерывные функции с производной, имеющей конечное число точек разрыва первого рода.

В настоящей работе предлагается способ исследования разностных уравнений, аппроксимирующих исходную задачу, он основан на стандартном методе прогонки, описанном в работе [5].

Для уравнений (6)-(7) составим разностный аналог, используя разностные аппроксимации производной $u' = \frac{u_{n+1} - u_n}{h}$, $h = \frac{l}{N}$:

$$\frac{g_{i+1}u'_{i+1} - g_i u'_i}{h} + \kappa^2 u_i = 0,\ u_0 = 0,\ g_N\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = -p_0,$$

упростим:

$$g_{i+1}(u_{i+2} - u_{i+1}) - g_i(u_{i+1} - u_i) + h^2\kappa^2 u_i = 0,$$

$$g_i u_{i-1} - \left(g_{i+1} + g_i - h^2\kappa^2\right)u_i + g_{i+1}u_{i+1} = 0,\ u_0 = 0,$$

$$u_N = u_{N-1} + \left(-\frac{p_0 h}{g_N}\right). \tag{8}$$

Метод прогонки позволяет эффективно строить численное решение краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и определять амплитудно-частотные характеристики для тел с переменной жесткостью.

На рис.1 для $\kappa = 0{,}8$ сплошной линией обозначен график точного решения, а ромбиками – построенный методом прогонки ($N = 20$). Нетрудно видеть, что абсолютное расхождение не превышает 0,2%.

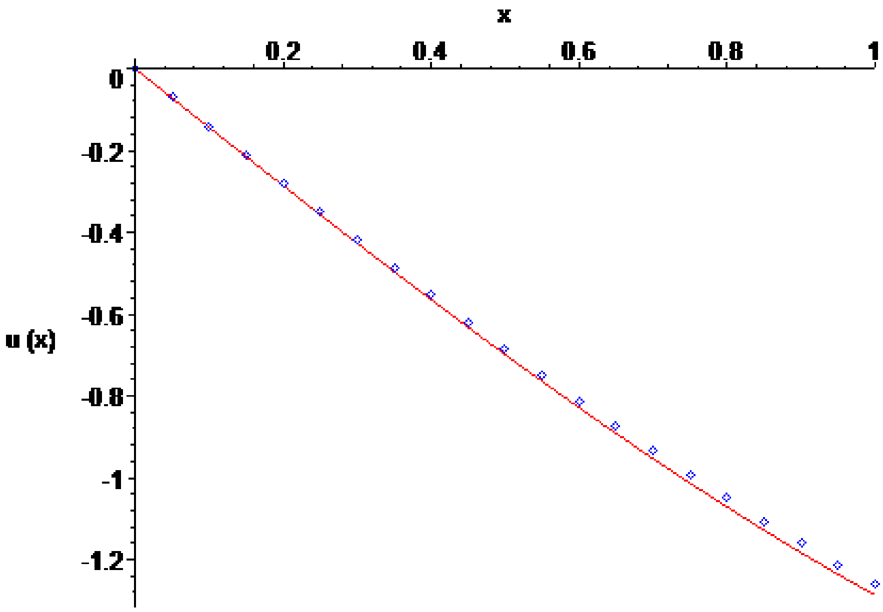

Рис. 1

Обратная задача. Рассмотрим постановку обратной задачи, в которой задана функция $u(x,\kappa_0) = u(x),\quad x \in [0,1]$, являющаяся решением краевой задачи

$$\begin{cases} (gu')' + \kappa_0^2 u = 0, \\ u(0) = 0, g(1)u'(1) = -1. \end{cases} \tag{9}$$

Основной целью работы является восстановление функции $g(x)$, удовлетворяющей (9), по известным значениям функции $u(x_k)$, заданным в наборе точек на отрезке $[0,1]$, что моделирует данные измерений.

Процедура реконструкции $g(x)$ состоит из двух этапов.

На первом этапе аппроксимируем функцию $u(x)$, заданную в наборе точек, кубическими сплайнами [6]. На втором этапе построим операторное соотношение, связывающее заданную и искомую функцию. Для этого проинтегрируем уравнение (9) от 1 до x :

$$\int_1^x (gu')' d\xi = gu'(x) - gu'(1) = -\kappa^2 \int_1^x u(\xi) d\xi ,$$

откуда, учитывая граничное условие (9), получим

$$gu'(x) = -1 - \kappa^2 \int_1^x u(\xi) d\xi$$

и далее

$$g(x) = -\frac{1}{u'(x)}\left[1 - \kappa^2 \int_x^1 u(\xi) d\xi\right]. \tag{10}$$

Дискретизация (10) на равномерной сетке $x_k = kh$, $h = \dfrac{1}{N}$, $k = 0,\ldots,N$, $x_N = 1$ позволяет найти узловые значения искомой функции

$$g(x_k) = -\frac{1}{u'(x_k)}\left[1 - \kappa^2 \int_{x_k}^1 u(\xi) d\xi\right]. \tag{11}$$

Для нахождения определенного интеграла $\int_x^1 u(\xi) d\xi$ заменим функцию на каждом отрезке разбиения многочленом Лагранжа первой степени и, используя формулу трапеций, находим

$$\int_{x_k}^1 u(\xi) d\xi = h\left[\frac{1}{2}u(x_k) + u(x_{k+1}) + \ldots + u(x_{N-1}) + \frac{1}{2}u(x_N)\right],$$

откуда получаем способ определения искомой функции в наборе узловых точек:

$$g(x_k) = -\frac{1}{u'(x_k)}\left[1 - \kappa^2 h\left[\frac{1}{2}u(x_k) + u(x_{k+1}) + \ldots + u(x_{N-1}) + \frac{1}{2}u(x_N)\right]\right]. \tag{12}$$

Заметим, что нахождение искомых узловых значений функции в соответствии с формулой (12) возможно, если $u'(x_k) \neq 0$. Кроме того, отметим, что нахождение производной функции, заданной в наборе точек, является некорректной задачей и требует регуляризации; эта вычислительная сложность преодолевается в настоящей работе при помощи использования сплайн-аппроксимаций.

Результаты вычислительных экспериментов. Для аналогии с реальными экспериментами функция $u(x)$, используемая как входная информация для восстановления $g(x)$, была зашумлена аддитивным образом с амплитудой δ. Зашумление моделировалось с помощью генератора случайных чисел путем добавления к исходному сигналу малой случайной функции.

Проведены масштабные вычислительные эксперименты по восстановлению различных типов функций: монотонных, немонотонных, разрывных. Отметим достаточную эффективность представленного подхода для гладких законов изменения $g(x)$; для разрывных законов погрешность реконструкции значительно выше, причем наибольшее расхождение наблюдается в точках разрыва первого рода.

В качестве примера на рис.2 представлена погрешность восстановления функции, имеющей на отрезке $[0,1]$ несколько стационарных точек, $g(x) = 2 + \cos(4\pi x)$ при $\delta = 0.0001$ и $N = 100$. Отметим, что с уменьшением числа точек, в которых задано смещение, погрешность восстановления функции $g(x)$ возрастает, например, для $N = 20$ погрешность восстановления функции $g(x)$ составляет около 20%.

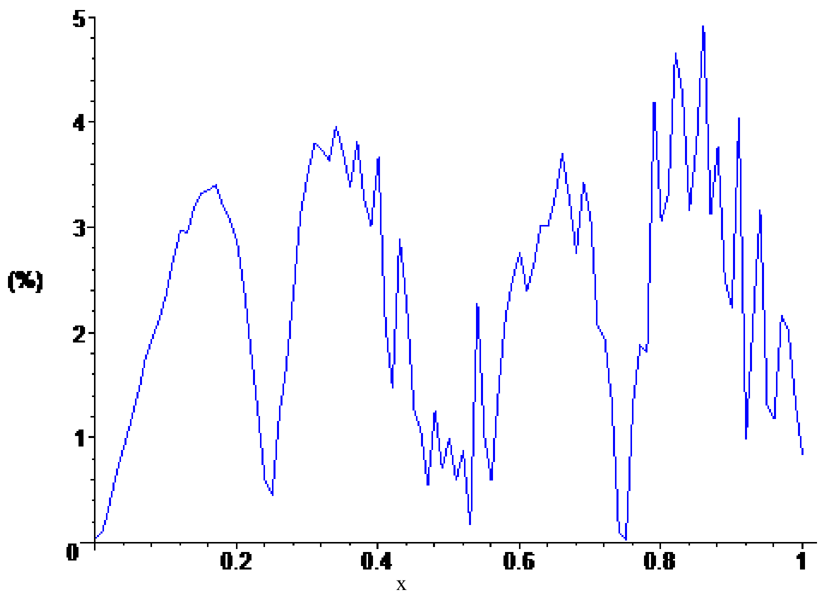

Рис. 2

В случае реконструкции разрывных законов неоднородности проведено усовершенствование представленной схемы, для чего произведена экстраполяция входных данных в окрестности точек разрыва. Программная реализация в этом случае осуществляется на основе предварительного анализа массива данных с целью выявления подозрительных на разрыв точек. После этого осуществляется экстраполяция справа и слева на основе стандартного подхода [6], что позволило значительно улучшить качество реконструкции.

На рис.3 представлен результат восстановления разрывной функции $g(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le \dfrac{1}{3}, x > \dfrac{3}{4}, \\ 5, \dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{3}{4} \end{cases}$ при $\delta = 0.0025$ для $N = 20$. Здесь сплошной линией показан график исходной функции, ромбиками – восстановленной функции $g(x)$, а кружочками – восстановленной функции $g(x)$ с использованием описанной выше процедуры.

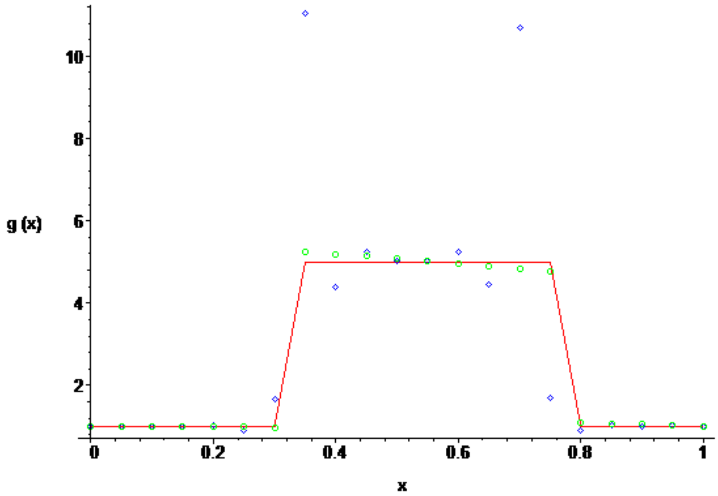

Рис. 3

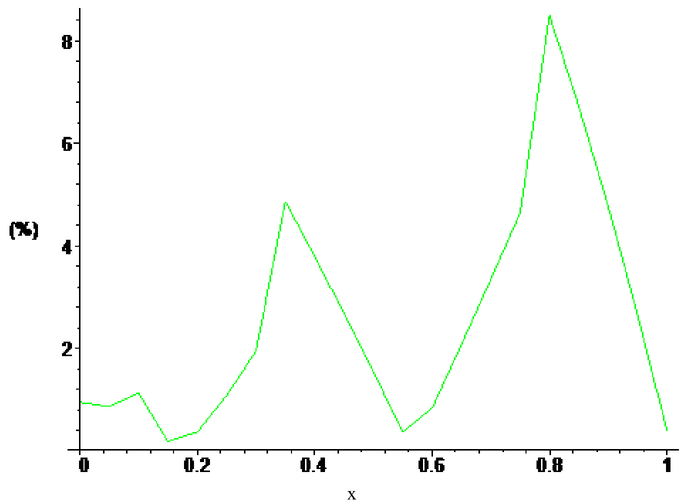

Рис. 4

На рис.4 представлена погрешность восстановления разрывной функции $g(x)$, изображенной на рис.3, с применением экстраполяции. Следует отметить значительное улучшение качества реконструкции разрывных функций, чего практически невозможно достичь с помощью более сложной постановки, описанной в работе [2].

Выводы. В настоящей работе исследована методика решения коэффициентной обратной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в новой постановке, в которой известно поле смещений в некотором наборе точек на фиксированной частоте. Разработан способ решения обратной задачи при точных и зашумленных входных данных. Проведен масштабный вычислительный эксперимент по восстановлению различных неоднородностей – монотонных, немонотонных, разрывных, показавший достаточную эффективность.

Библиографический список

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Бочарова О.В. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня / О.В. Бочарова, А.О. Ватульян // Известия вузов, Сев.-Кавк. регион. Серия Естеств. науки. – 2008. – №3. – С.33-37.
3. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 553 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Материал поступил в редакцию 02.07.09.

A.N. BOBROVA, A.O. VATULYAN

ABOUT DEFINITION OF THE LAW OF CHANGE OF YOUNG'S MODULUS AT THE ANALYSIS OF LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF THE ROD

In the paper method for solving the direct problem for a differential equation of second order with variable coefficients is presented. This equation arises in the analysis of longitudinal oscillations of rods of variable rigidity on the basis of difference schemes. The way of determination of the law of change of Young's modulus is also suggested.

Keywords: coefficient of the inverse problem, difference equation, oscillation, heterogeneous environment.

БОБРОВА Алла Николаевна, выпускница кафедры «Математика» ДГТУ. Окончила ДГТУ (2009).
Сфера научных интересов: обратные и некорректные задачи для дифференциальных операторов, численные методы решения некорректных задач.

ВАТУЛЬЯН Александр Ованесович (р. 1953), доктор физико-математических наук (1993), профессор (1995), заведующий кафедрой теории упругости ЮФУ с 2001г., член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член трех докторских диссертационных Советов (ЮФУ, ДГТУ). Окончил механико-математический факультет РГУ (1975).
Сфера научных интересов: исследование волновых процессов в телах со сложными механическими свойствами (неоднородность, анизотропия, реология, наличие пьезоэффекта), геометрические и коэффициентные обратные задачи математической физики, численные методы.
Автор более 280 публикаций в различных областях механики деформируемого твердого тела, теории интегральных уравнений, численных методов и обратных задач. Автор монографии «Обратные задачи в механике твердого деформируемого тела».

zakoruchki@mail.ru