

УДК 621.924.6:621.833

А.А. РЫЖКИН, Д.В. МОИСЕЕВ

К ВОПРОСУ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПРОФИЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЗУБА КОЛЕСА

Уточнены полученные ранее аналитические зависимости для оценки координат профиля вогнутых участков эллиптического зуба, учитывающие ограничение его высоты размером радиуса окружности впадин колеса. Представлен алгоритм программы расчета координат профиля эллиптического зуба колеса.

Ключевые слова: зубчатые колеса, эллиптический профиль, червячные фрезы, профиль инструментальной рейки.

Введение. Разработка метода профилирования зуборезного инструмента, работающего методом обкатки, и разработка его конструкции – важные условия обеспечения требуемого качества изделий. В полной мере это относится и к обработке нового типа зубчатых колес с эллиптическим профилем в нормальном к зубу сечении [1].

В нашей публикации [2] по этой проблеме получены зависимости для определения профиля боковых сторон эллиптического зуба, при этом боковая сторона профиля делилась на два участка: выпуклый и вогнутый, а их границей служила точка касания сопряженных эллипсов, лежащая на радиусе $R_0 \perp R_o$. При таком подходе нижняя точка вогнутого профиля эллиптического зуба не находится на окружности впадин колеса R_i , в результате полная расчетная высота зуба может оказаться завышенной для некоторых размеров зубьев и диаметров колес.

В реальных условиях высота эллиптического зуба колеса $h = 2b$ соответствует высоте кругового зуба $h: 2r$ только в плоскости YO (рис.1); в этой же плоскости и линейные размеры колеса в торцевом и нормальном сечениях также совпадают.

Введенное в работе [2] для вывода уравнений профиля боковых сторон эллиптического зуба понятие радиуса R_0 точек касания сопряженных эллипсов имеет самостоятельное значение только для решения этой задачи, но не отражает всех нюансов образования профиля зуба методом обкатки с применением червячных фрез.

В самом деле, для нахождения профиля зуборезного инструмента реечного типа необходимо без искажений знать параметры эллиптического зуба в плоскости xOy (см.рис.1), поэтому методика определения уравнений боковых сторон эллиптического зуба требует некоторых уточнений. При этом следует иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, по параметру R_0 находили доли углового шага $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\alpha}{4}$ в нормальном зубу сечении, используемые для расчетов профиля, при этом $R_0 \leq R_o$ [2]; во-вторых, при некоторых сочетаниях размеров колеса $(D_e; z; h)$, угла подъема зуба

β не исключен вариант, когда $R_0 \cong R_o$, и полученные ранее зависимости для определения профиля зуба будут уже другими.

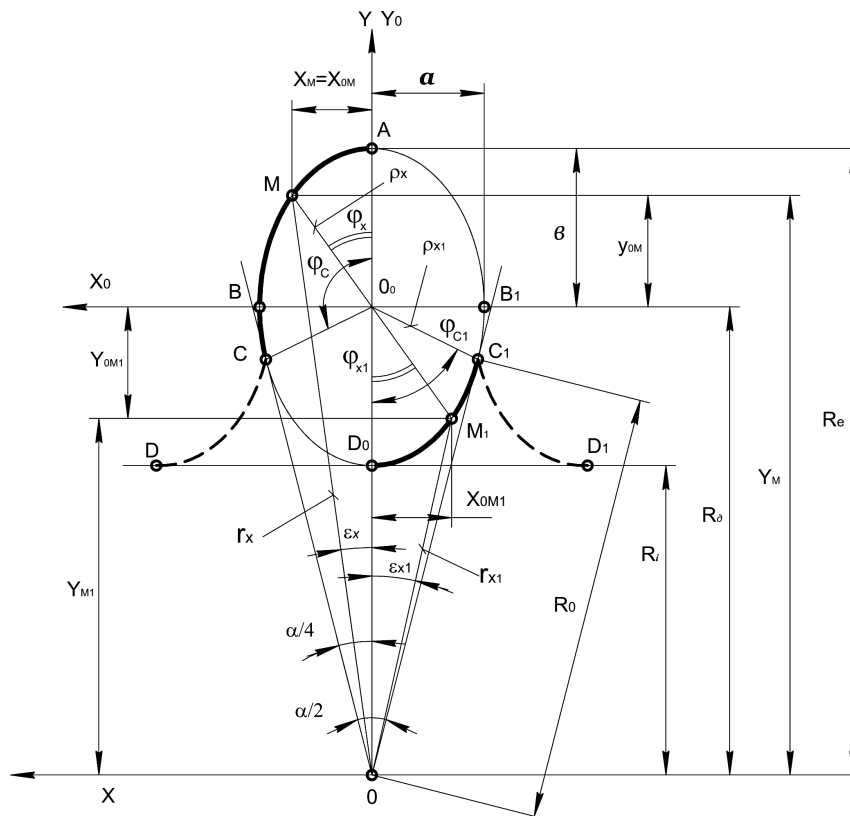


Рис. 1. Профиль эллиптического зуба колеса

Корректировка зависимостей для определения профиля эллиптического зуба выполняется при следующих условиях:

- размер эллиптического зуба по высоте $h = 2b$ ограничивается по минимуму плоскостью $y = R_i$ (см.рис.1);

- расчет координат профиля для выпуклого участка зуба $A - B - C$ (см.рис.1) ($R_0 \neq R_o$) производится по уравнениям, полученным в [2], а полярные углы ε_x и φ_x находятся в пределах $0 \leq \varepsilon_x \leq \frac{\alpha}{4}$ и

$0 \leq \varphi_x \leq \varphi_c$. Если $R_0 = R_o$, то следует находить параметры профиля $A - B$ по зависимостям [2]; уравнения же для нахождения профиля вогнутого участка $C - D$ будут другими.

Отличие подхода для определения координат вогнутого участка $C - D$ левой стороны эллиптического зуба от методики, принятой в [2], состоит в том, что находится уравнение линии $C_1 - D_0$ как части эллипса, уравнение которого известно, а затем путем параллельного пере-

носа этой кривой влево на величину $C_1 - D_0$ (см.рис.1) получаем координаты вогнутой части зуба $C - D$; очевидно, ординаты точек кривых $C_1 - D_0$ и $C - D$ одинаковы, а их абсциссы будут отличаться на величину $C_1 - C_0 = 2R_0 \sin \frac{\alpha}{4}$ (см.рис.1).

Получим зависимости для расчета координат вогнутого участка зуба $C_1 - D_0$ для двух случаев: $R_0 \neq R_\partial$ и $R_0 = R_\partial$.

1. Вариант $R_0 \neq R_\partial$.

Выпуклый и вогнутый участки профиля эллиптического зуба сопрягаются в точке касания эллипсов на радиусе R_0 .

Участок $C_1 - D_0$

Расчетные зависимости для участка эллипса $C_1 - D_0$ (см.рис.1) имеют вид:

- декартовы координаты текущей точки M_1 :

$$\begin{aligned} x_{M_1} &= -r_{x_1} \sin \varepsilon_{x_1}; \\ y_{M_1} &= -r_{x_1} \cos \varepsilon_{x_1}; \end{aligned} \quad (1)$$

- связь между полярными углами ε_{x_1} и φ_{x_1} (как и для зоны $A - B - C$ [2])

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{x_1} = \frac{\sin \varphi_{x_1}}{\frac{R_\partial}{b} \sqrt{\cos^2 \varphi_{x_1} + \frac{\sin^2 \varphi_{x_1}}{\cos^2 \beta} + \cos \varphi_{x_1}}}; \quad (2)$$

- текущий радиус – вектор r_{x_1} точки M_1 . Как и в [2], совместно решая уравнение эллипса в координатах с началом в центре эллипса

$$\frac{x_{0M_1}^2}{a^2} + \frac{y_{0M_1}^2}{b^2} = 1, \quad x_{0M_1} = -\rho_{M_1} \sin \varphi_{x_1}, \quad y_{0M_1} = -\rho_{M_1} \cos \varphi_{x_1}, \quad x = x_{0M_1},$$

$$y = R_\partial - y_{0M_1} = R_\partial = -\rho_{M_1} \cos \varphi_{x_1},$$

а также используя зависимости (1), получим

$$r_{x_1} = \frac{R_\partial - b \cos \beta \cos \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}}{\cos \varepsilon_{x_1}}; \quad (3)$$

- пределы изменения полярных углов φ_{x_1} и ε_{x_1} (см.рис.1):

$$0 \leq \varphi_{x_1} \leq \varphi_{c_1}; \quad 0 \leq \varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon_{c_1};$$

$$0 \leq \varphi_{x_1} \leq \arctg \frac{R_0 \sin \frac{\alpha}{4}}{R_0 - R_0 \cos \frac{\alpha}{4}}; \quad 0 \leq \varepsilon_{x_1} \leq \frac{\alpha}{4}. \quad (4)$$

Входящий в зависимость (4) угловой параметр $\frac{\alpha}{4}$ рассчитывали по формуле $tg \frac{\alpha}{4} = tg \frac{\alpha'}{4} \cos \beta$, где $\frac{\alpha'}{4}$ - четверть углового шага колеса в торцевом сечении, а β - угол наклона зуба. Для колеса, параметры которого приведены в заголовке табл.1, $tg \frac{\alpha}{4} = tg 11^{\circ} 15' \cos 18^{\circ} = 0,1881$ и $\frac{\alpha}{4} = 10^{\circ} 39' (10,65^{\circ})$. Из рис.1 следует, что $\frac{\alpha}{4} \approx \varepsilon_B = \arctg \left(\frac{e \cos \beta}{R_o} \right) = \arctg \left(\frac{6,2 \cdot 0,9511}{31,8} \right)$; откуда $\frac{\alpha}{4} = 10^{\circ} 32' (10,53^{\circ})$. Ошибка в оценке угла $\frac{\alpha}{4}$ этими двумя способами составляет всего 1,03 %, поэтому предпочтительней использовать последнюю зависимость;

- координаты текущей точки M_1 (получим из (1) и (3)):

$$\begin{aligned} x_{M\varphi} &= -\frac{\gamma_{\text{ж}}}{\kappa_3} R - b \cos \beta \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}} \cdot \frac{1}{\gamma_{\text{ш}}} \operatorname{tg} \varepsilon, \\ y_{M\varphi} &= R - b \cos \beta \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Участок D – C

Для определения уравнений профиля $D - C$ координаты x_{M_1} следует перенести влево на расстояние $C - C_1 = D_0 - D$, совместив точку C_1 с точкой C , тогда

$$\begin{aligned} x &= -x_{M_1} + CC_1 = -x_{M_1} + 2a = -x_{M_1} + 2R_0 \sin \frac{\alpha}{4}; \\ y &= y_{M_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\gamma_{\text{Ж}}}{\kappa_3 \frac{\gamma}{\eta}} R_o - b \cos \beta \cos \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}} \frac{\gamma}{\eta} g \varepsilon_{x_1} \frac{\eta}{b} + 2R_o \sin \frac{\alpha}{4}; \\ y &= R_o - b \cos \beta \cos^2 \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Вариант $R_0 = R_d$.

$$r_x = \frac{R_0 + b \cos \beta \cos \varphi_x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_x \cos^2 \beta}}}{\cos \varepsilon_x}; \quad (10)$$

- пределы изменения полярных углов φ_x и ε_x (см.рис.2):

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_x \leq \varphi_B; \quad 0 \leq \varepsilon_x \leq \varepsilon_B; \\ 0 \leq \varphi_x \leq 90^\circ; \quad 0 \leq \varepsilon_x \leq \arctg \frac{b \cos \beta}{R_0}; \end{aligned} \quad (11)$$

- расчетные зависимости для определения координат профиля:

$$\begin{aligned} x &= \left(R_0 + b \cos \beta \cos \varphi_x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_x \cos^2 \beta}} \right) \operatorname{tg} \varepsilon_x; \\ y &= R_0 + b \cos \beta \cos \varphi_x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_x \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

участок $B - D (B_1 - D_0)$

Сначала определим координаты эллиптического участка $B_1 - D_0$. Здесь:

$$\begin{aligned} x_{M_1} &= -r_{x_1} \sin \varepsilon_{x_1}; \\ y_{M_1} &= r_{x_1} \cos \varepsilon_{x_1}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{x_1} = \frac{\sin \varphi_{x_1}}{\frac{R_0}{b} \sqrt{\cos^2 \varphi_{x_1} + \frac{\sin^2 \varphi_{x_1}}{\cos^2 \beta}} + \cos \varphi_{x_1}}; \quad (14)$$

$$r_{x_1} = \frac{R_0 - b \cos \beta \cos \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}}{\cos \varepsilon_{x_1}}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_{x_1} \leq \varphi_{x_{B_1}}; \quad 0 \leq \varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon_{x_{B_1}}; \\ 0 \leq \varphi_{x_1} \leq 90^\circ; \quad 0 \leq \varepsilon_{x_1} \leq \arctg \frac{b \cos \beta}{R_0}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x_{M\varphi} &= -\frac{R}{b} - b \cos \beta \cos \varphi_x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}} \operatorname{tg} \varepsilon_{x_1}; \\ y_{M\varphi} &= R - b \cos \beta \cos \varphi_x \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения профиля $B - D$ эллиптического зуба:

$$\begin{aligned}x &= -x_{M_1} + BB_1 = -x_{M_1} + 2a = -x_{M_1} + 2b \cos \beta; \\y &= y_{M_1}.\end{aligned}\quad (18)$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}x &= -R_o - b \cos \beta \cos \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}} \operatorname{tg} \varepsilon_{x_1} + 2b \cos \beta; \\y &= R_o - b \cos \beta \cos \varphi_{x_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi_{x_1} + \cos^2 \varphi_{x_1} \cos^2 \beta}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Для расчета координат профиля эллиптического зуба по вариантам $R_o = R_o$ и $R_o \neq R_o$ разработана блок-схема (рис.3) программы с использованием зависимостей (1) – (19).

В табл.1,2 приведены данные расчетов профиля для случая, когда $R_o = R_o$ (выпуклый и вогнутый участки профиля зуба сопрягаются на делительной прямой).

Таблица 1

Координаты точек профиля эллиптического зуба колеса.

Левая сторона зуба.

($D_e = 76,0$; $R_d = 31,8$; $b = r = h/2 = 6,2$; $h = 12,4$; $z = 8$; $\beta = 18^\circ$)

Номер п/п	Выпуклый профиль (зона А-В)				
	φ_x°	$\operatorname{tg} \varepsilon_x$	ε_x	y	$x = y \operatorname{tg} \varepsilon_x$
1	0	0	0°	38,0	0
2	10	0,030	1°43'	37,9	0,77
3	20	0,055	3° 9'	37,6	1,48
4	30	0,083	4°43'	37,1	2,20
5	40	0,107	6° 9'	36,45	2,90
6	50	0,130	7°25'	35,67	3,63
7	60	0,154	8°45'	34,78	4,44
8	70	0,165	9°22'	33,83	4,90
9	80	0,176	10°2'	32,82	5,50
10	90	0,185	10°29'	31,8	5,89
Номер п/п	Вогнутый профиль (зона В ₁ – D ₀ : В – D)				
	φ_x°	$\operatorname{tg} \varepsilon_x$	ε_x	$x' = -y \operatorname{tg} \varepsilon_x$	$x = -x' + 2 b \cos \beta$
1	90	0,185	10°29'	-5,89	5,89
2	80	0,176	10°2'	-5,50	6,28
3	70	0,165	9°22'	-4,90	6,88
4	60	0,154	8°45'	-4,44	7,34
5	50	0,130	7°25'	-3,63	8,15
6	40	0,107	6° 9'	-2,90	8,88
7	30	0,083	4°43'	-2,2	9,58
8	20	0,055	3° 9'	-1,48	10,30
9	10	0,030	1°43'	-0,77	11,01
10	0	0	0°	0	11,78

Таблица 2

Координаты точек профиля эллиптического зуба колеса.

Правая сторона зуба.

($D_e = 76,0$; $R_d = 31,8$; $b = r = h/2 = 6,2$; $h = 12,4$; $z = 8$; $\beta = 18^\circ$)

Номер п/п	Выпуклый профиль (зона А-В)				
	φ_x°	$\text{tg } \varepsilon_x$	ε_x	y	$x = y \text{ tg } \varepsilon_x$
1	0	0	0°	38,0	0
2	10	0,030	$1^\circ 43'$	37,9	-0,77
3	20	0,055	$3^\circ 9'$	37,6	-1,48
4	30	0,083	$4^\circ 43'$	37,1	-2,20
5	40	0,107	$6^\circ 9'$	36,45	-2,90
6	50	0,130	$7^\circ 25'$	35,67	-3,63
7	60	0,154	$8^\circ 45'$	34,78	-4,44
8	70	0,165	$9^\circ 22'$	33,83	-4,90
9	80	0,176	$10^\circ 2'$	32,82	-5,50
10	90	0,185	$10^\circ 29'$	31,8	-5,89
№	Вогнутый профиль (зона В ₁ – D ₀ : В – D)				
	φ_x°	$\text{tg } \varepsilon_x$	ε_x	$x' = -y \text{ tg } \varepsilon_x$	$x = -x' + 2 b \cos \beta$
1	90	0,185	$10^\circ 29'$	-5,89	-5,89
2	80	0,176	$10^\circ 2'$	-5,50	-6,28
3	70	0,165	$9^\circ 22'$	-4,90	-6,88
4	60	0,154	$8^\circ 45'$	-4,44	-7,34
5	50	0,130	$7^\circ 25'$	-3,63	-8,15
6	40	0,107	$6^\circ 9'$	-2,90	-8,88
7	30	0,083	$4^\circ 43'$	-2,2	-9,58
8	20	0,055	$3^\circ 9'$	-1,48	-10,30
9	10	0,030	$1^\circ 43'$	-0,77	-11,01
10	0	0	0°	0	-11,78

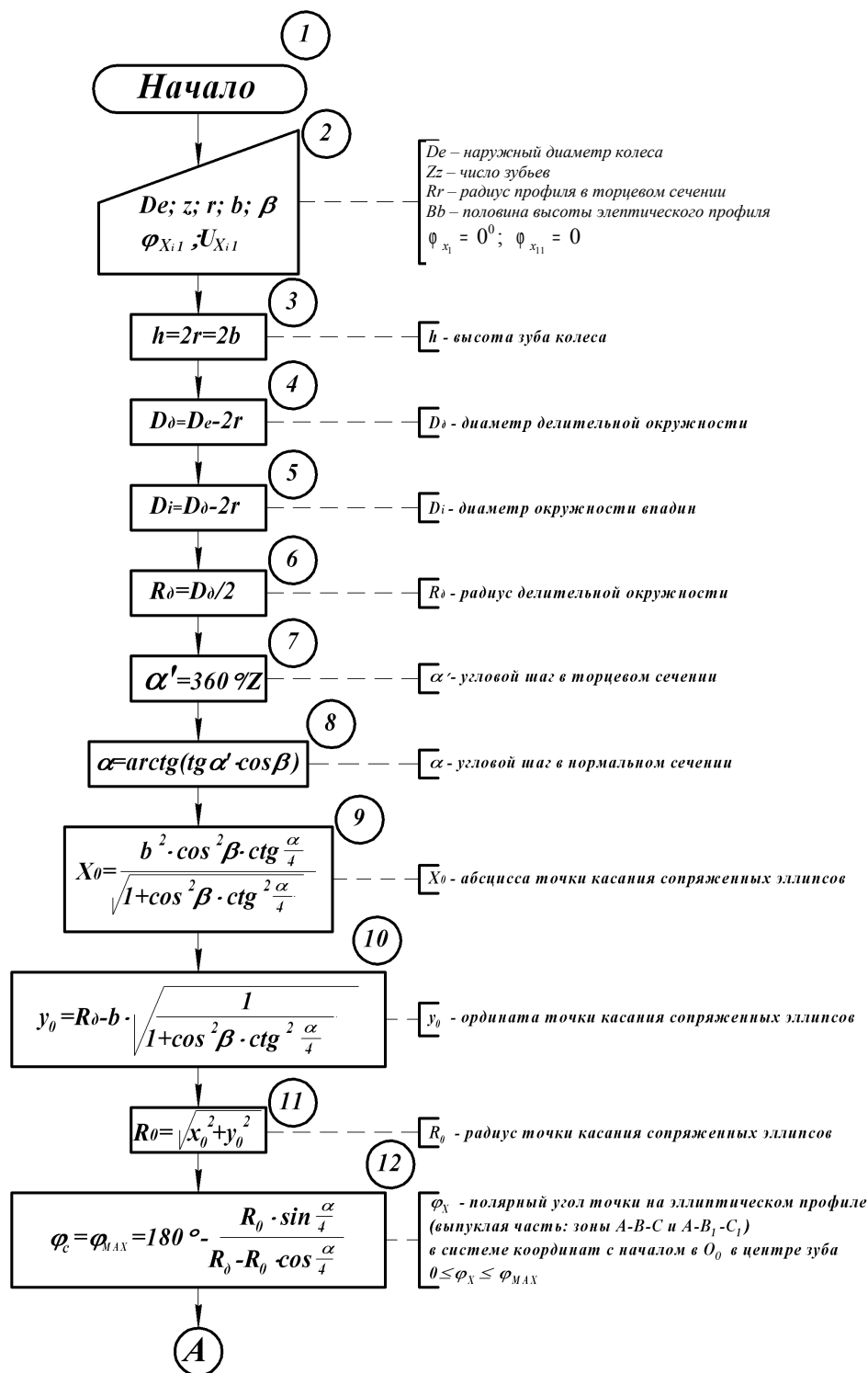


Рис.3. Блок-схема программы расчета профиля эллиптического зуба колеса (вариант $R_d \neq R_0$) (см. также с.707-710)

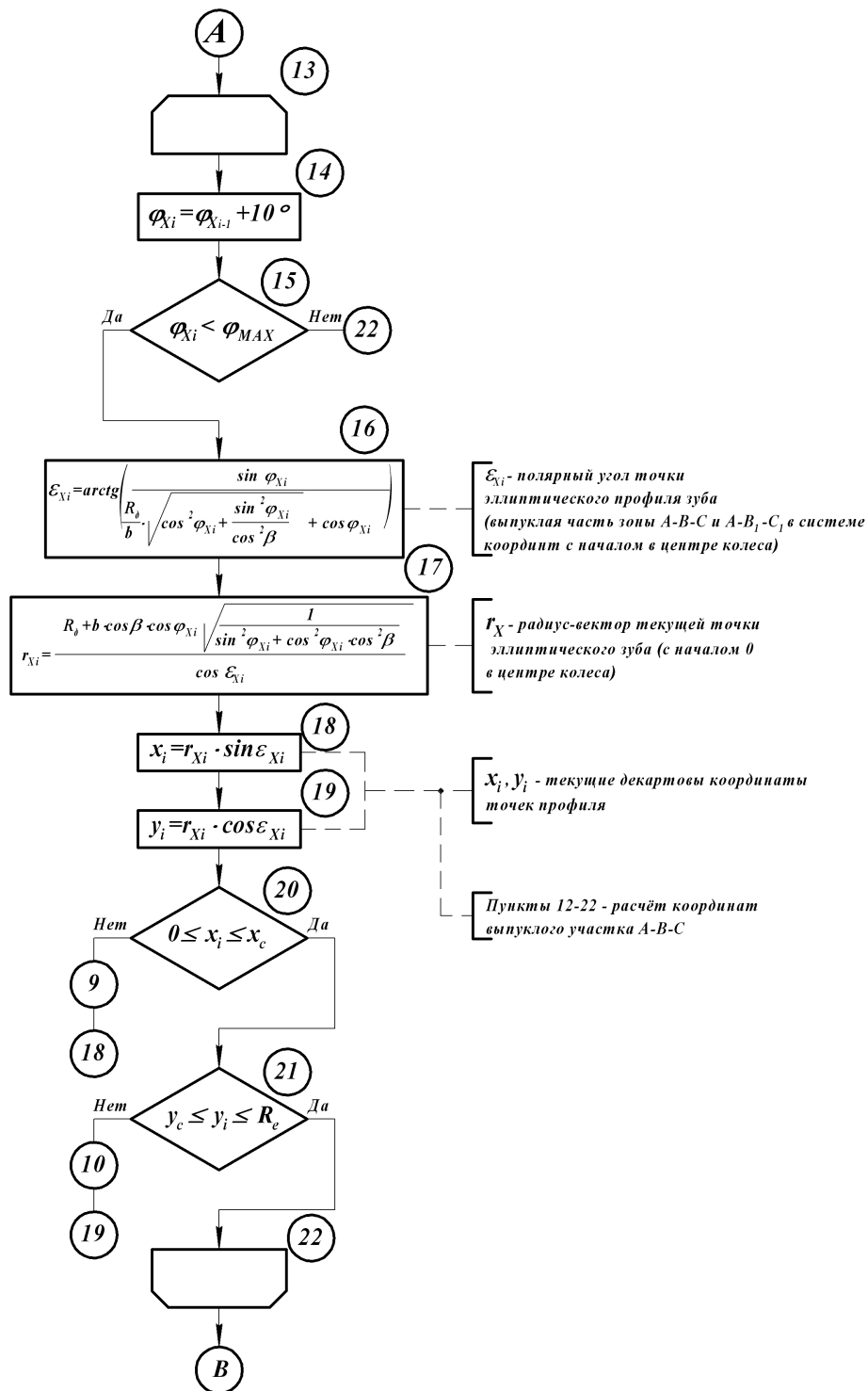


Рис.3. Продолжение (начало см. на с.706)

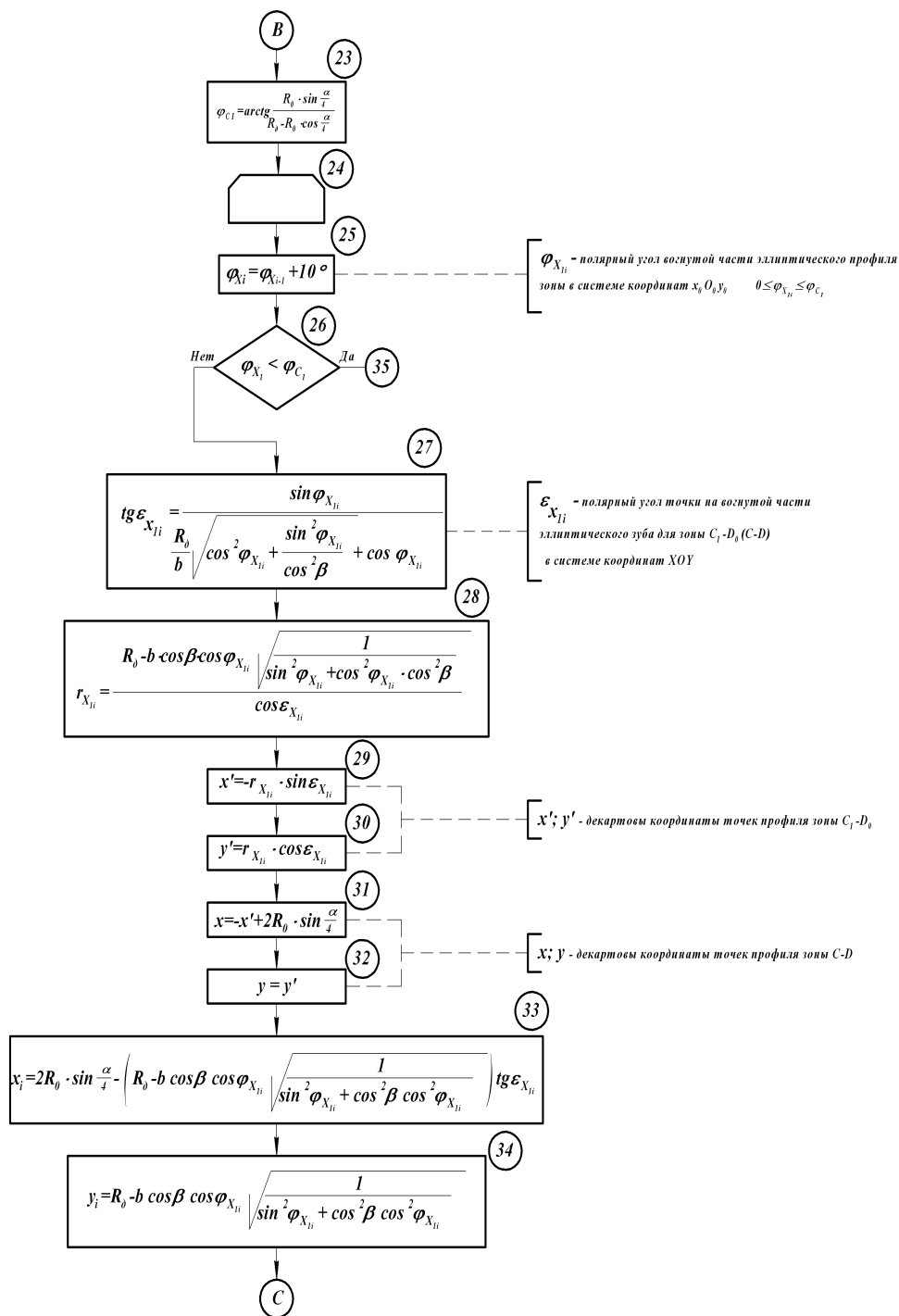


Рис.3. Продолжение (начало см. на с.706, 707)

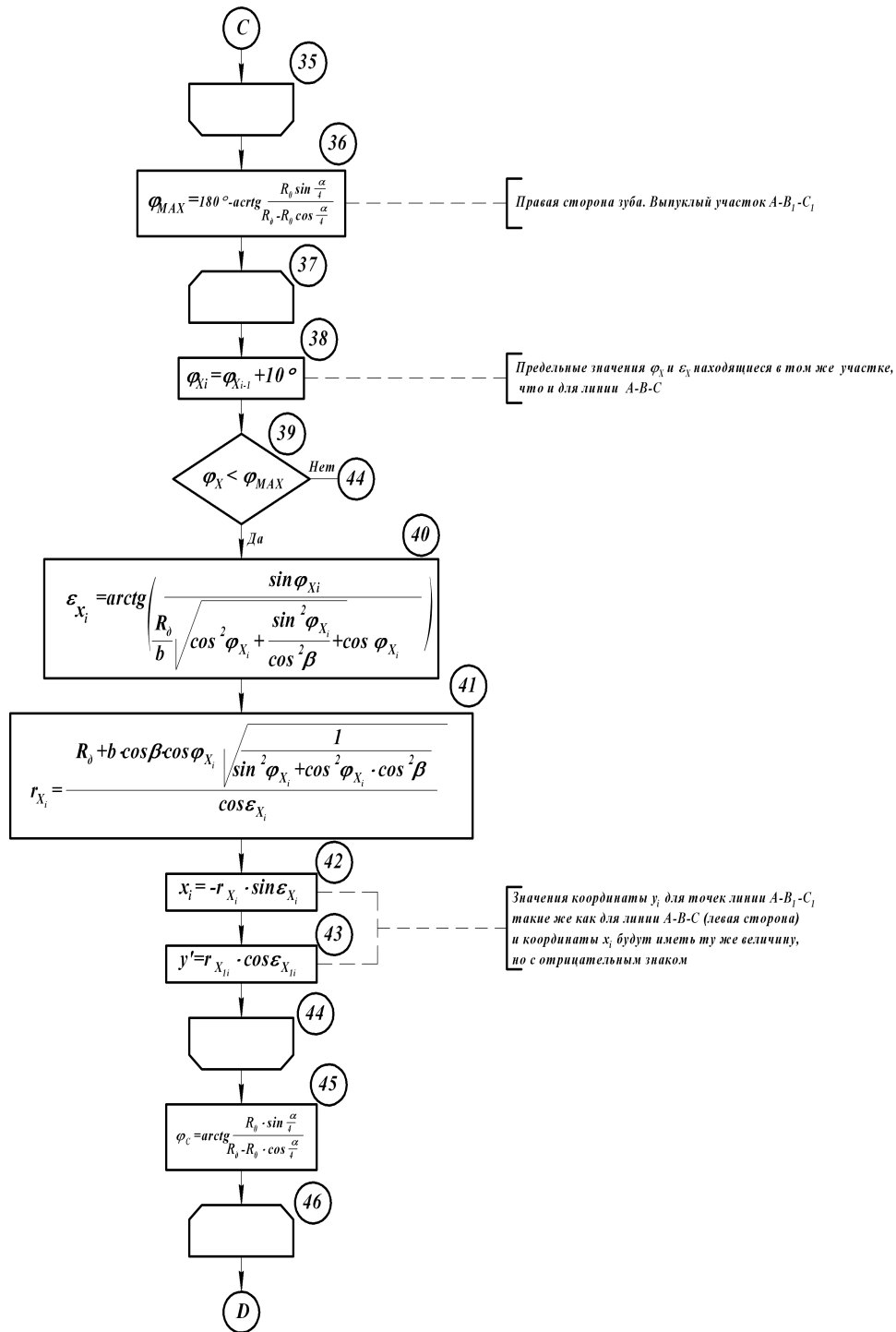


Рис.3. Продолжение (начало см. на с.706-708)

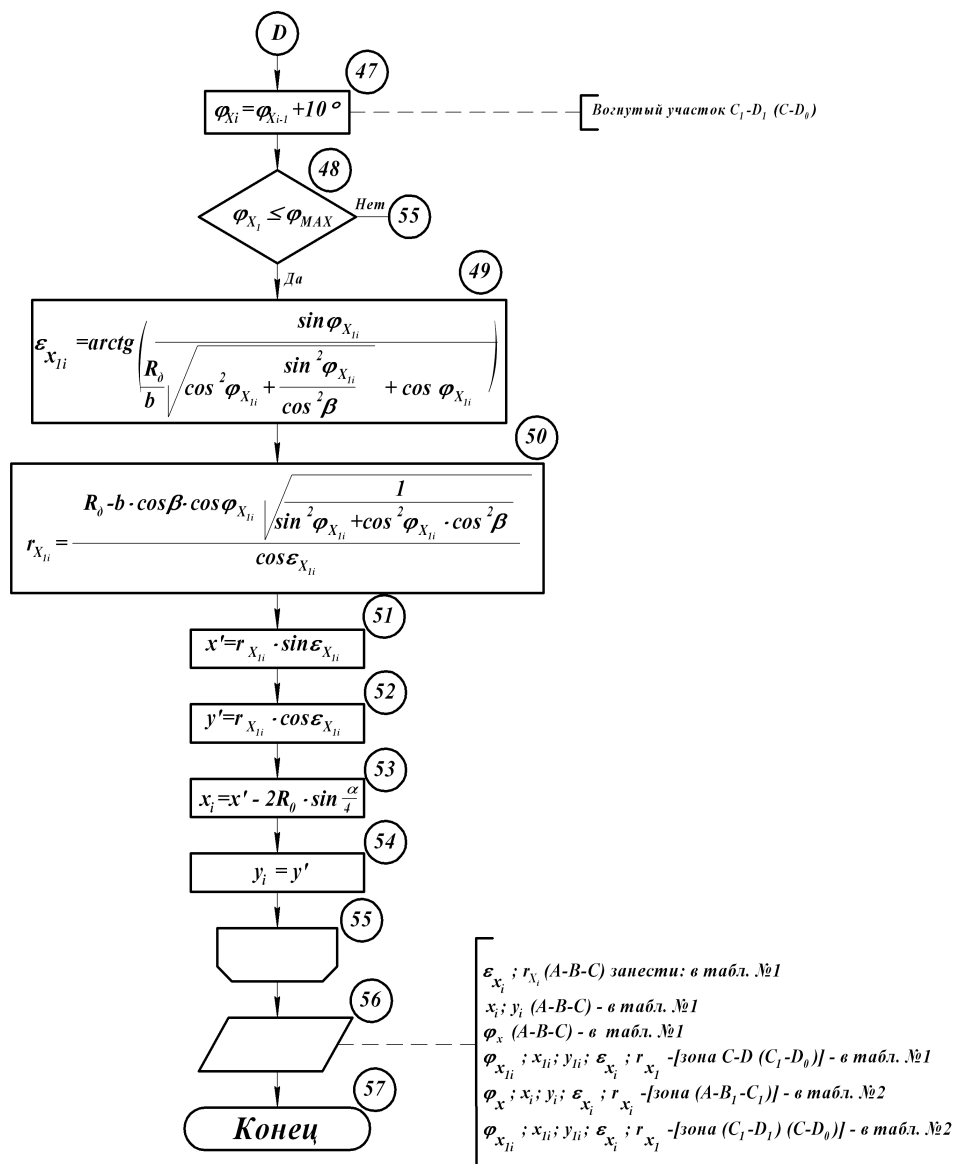


Рис.3. Окончание (начало см. на с.706-709)

Выводы. 1. Получены новые уточненные аналитические зависимости для определения в единой системе координат вогнутой части профиля эллиптического зуба, высота которого ограничена размерами радиусов окружностей выступов и впадин колеса.

2. Уточненная методика профилирования эллиптического зуба позволяет без использования дополнительной системы координат получить исходные данные для расчета профиля инструментальной рейки, зная только габаритные размеры зуба и шестерни.

Библиографический список

1. Зубчатая передача: патент № 20572667. Российская федерация / Г.П. Гребенюк: зарег. от 27.03.96. – Оpubл. в Б.И., 1999. – №9.
2. Рыжкин А.А. Определение координат боковых сторон зубьев колес с эллиптическим профилем /А.А. Рыжкин, А.А. Андросов, Г.П. Гребенюк, М.В. Савинков, В.В. Вялая // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т.9. – №2(41). – С. 284-295.

A.A. RYZHKIN, D.V. MOISEEV

**TO THE TOPIC OF THE ANALYTICAL DEFINITION
OF THE COG OF THE WHEEL HAVING AN ELLIPTIC PROFILE**

Analytical dependence for the estimation of coordinates of a concave cog side having an elliptic profile, which take into account the limitation of it's height by the value of internal circle radius of the wheel, is presented.

An algorithm for the calculation of profile coordinates of elliptic cog is presented.

РЫЖКИН Анатолий Андреевич (р. 1938), заведующий кафедрой «Инструментальное производство» ДГТУ, доктор технических наук (1985), профессор (1986). Окончил РИСХМ (1960) по специальности «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструмент».

Область научных интересов – повышение работоспособности режущих инструментов управлением термодиссипативными процессами в зоне резания.

Автор 365 научных работ, в том числе 8 монографий, 7 авторских свидетельств и патентов.

МОИСЕЕВ Денис Витальевич (р. 1989), студент 3-го курса факультета «Технология машиностроения» ДГТУ специальности «Технология машиностроения».

Область научных интересов – кинематика и динамика механических систем, информационные технологии. По этой теме опубликована 1 статья.

a.ryzhkin_39@mail.ru