МАТЕМАТИКА

УДК 534.631:519.642.3

В.М. ДРАГИЛЕВ, Л.Л. ДРАГИЛЕВА

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В МЕТОДЕ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Ранее предложенные оценки, связанные с чувствительностью решений к случайным погрешностям исходных данных, приводятся к виду, удобному для учета априорной информации.

Ключевые слова: *некорректные обратные задачи, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, метод проекций.*

Введение. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$[\hat{A}q](x) \equiv \int_{X_1}^{X_2} K(x,x')q(x')dx' = \tilde{u}(x), \qquad x \in [X_3, X_4], \tag{1}$$

с гладким вырожденным ядром

$$K(x,x') = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(x')\varphi_m(x). \tag{2}$$

Предполагаем, что правая часть $\tilde{u}(x)$ уравнения (1) задана приближенно, т.е. $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$, где первое слагаемое $u = \hat{A}q$ порождается искомой функцией-оригиналом $q(x) \in L_2[X_1, X_2]$, а второе (δu) есть погрешность, возникшая, например, в процессе измерений. Отыскание некого приближения $\tilde{q}(x)$ для функции-оригинала $q(x)$ по исходным данным $\tilde{u}(x)$ является некорректной задачей, которая может решаться методом Тихонова [1].

Альтернативный подход, близкий к методу проекций [2], развивается в приложении к обратным граничным задачам теории упругости [3-5] и заключается в следующем.

В пространстве $L_2[X_1, X_2]$ задается какой-либо ортонормированный базис $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Решение строится в виде

$$\tilde{q}(x) = \sum_{n=1}^{N} \tilde{a}_n f_n(x), \tag{3}$$

где $\tilde{a}_n$ - искомые приближенные значения коэффициентов обобщенного ряда Фурье; N - регуляризующий параметр, $N \le M$.

Формальная подстановка разложения (3) в уравнение (1) приводит к матричному уравнению

$$A_{(N)}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{u}}, \tag{4}$$

где $A_{(N)}$ - матрица размера $J \times N$, явный вид которой выписан в [3-5]; $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_J)$ - вектор исходных данных с компонентами $\tilde{u}_j = \tilde{u}(x_j)$; x_j - выбранные опорные точки на отрезке $[X_3, X_4]$, $J \ge M$.

В соответствии с предыдущим имеет место разбиение $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$. Решением уравнения (4) считается вектор $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N)$, который минимизирует его невязку в пространстве R^J и, как обычно, находится из уравнения

$$B_{(N)}\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{v} \ , \tag{5}$$

где $B_{(N)} = A^*_{(N)}A_{(N)}$; $\mathbf{v} = A^*_{(N)}\tilde{\mathbf{u}}$ (звездочка означает эрмитово сопряжение). Матрица $B_{(N)}$ предполагается невырожденной (в противном случае необходимо перейти к иному базису или изменить какие-либо параметры алгоритма).

Важное преимущество метода проекций состоит в его «прозрачности», позволяющей оценивать погрешность решения, исходя из определенной априорной информации. Такая информация содержится в наборе величин

$$\{\Delta, \eta_1, \ldots, \eta_M\},$$

где $\Delta = \|\delta\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u}\|$ - погрешность исходных данных; η_N - относительная погрешность, с которой функция-оригинал приближается первыми N членами своего разложения по выбранному базису (здесь и ниже нормы и скалярные произведения всех векторов берутся в соответствующих евклидовых пространствах).

Согласно [5] полная погрешность решения (3) (его относительное отклонение от оригинала в пространстве $L_2[X_1, X_2]$) формируется из двух составляющих, одна из которых пропорциональна погрешности η_N и оценивается из анализа невозмущенной задачи (т.е. при $\delta\mathbf{u} = 0$), а вторая (обозначим ее η_Δ) пропорциональна погрешности исходных данных Δ. Настоящая работа посвящена некоторым модификациям оценок для погрешности η_Δ, ранее приведенных в [3, 4].

Отметим, что базисными функциями $f_n(x)$ могут служить собственные функции эрмитова оператора $\hat{A}^*_{(J)}\hat{A}_{(J)}$, где $\hat{A}_{(J)} : L_2[X_1, X_2] \to R^J$ - интегральный оператор уравнения (1), действующий в пространство векторов $\mathbf{u}$. Такую версию проекционного алгоритма назовем *канонической*, любую иную - *общей*. Общая версия не попадает под определение регуляризующих алгоритмов и обосновывается нестандартным образом, при помощи априорных оценок погрешности [5]. Сравнительные достоинства двух названных разновидностей проекционного алгоритма предполагается осветить в будущих публикациях.

Основные соотношения. Обозначим через $\mathbf{a}'$ решение уравнения (5) с невозмущенной правой частью $\mathbf{v} = A^*_{(N)}\mathbf{u}$. В силу ортонормированности функций $f_n(x)$ имеем [3-5] $\eta_\Delta = \|\delta\mathbf{a}\| / \|\mathbf{a}'\|$, где $\delta\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}'$. Очевидно, вектор $\delta\mathbf{a}$ удовлетворяет уравнению (5) с правой частью $\delta\mathbf{v} = A^*_{(N)}\delta\mathbf{u}$.

Пусть σ_n есть сингулярные числа [6] матрицы $B_{(N)}$, упорядоченные по убыванию ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .. \geq \sigma_N > 0$), $\mathbf{g}_n$ - её ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям σ_n^2. Как известно (см. например, [6]), векторы $\mathbf{w}_n = \sigma_n^{-1} A_{(N)} \mathbf{g}_n$ образуют ортонормированный набор в пространстве R^J; для произвольного вектора $\mathbf{w} \in R^J$ решение уравнения $B_{(N)}\mathbf{z} = A_{(N)}^* \mathbf{w}$ может быть представлено так называемым сингулярным разложением

$$\mathbf{z} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathbf{w}_n, \mathbf{w})}{\sigma_n^2} \mathbf{g}_n . \tag{6}$$

Применив разложение (6) к вектору $\delta\mathbf{a}$, получим

$$\|\delta\mathbf{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(\mathbf{w}_n, \delta\mathbf{u})|^2}{\sigma_n^2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|(\mathbf{w}_n, \delta\mathbf{u})|^2}{\sigma_N^2} \leq \frac{1}{\sigma_N^2} \|\delta\mathbf{u}\|^2 . \tag{7}$$

Таким образом, $\|\delta\mathbf{a}\| \leq \sigma_N^{-1} \|\delta\mathbf{u}\|$ и, как следствие,

$$\eta_\Delta \leq \sigma_N^{-1} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{a}'\|^{-1} \Delta . \tag{8}$$

Далее, как и в работах [3, 4], введем вектор $\mathbf{u}' = A_{(N)}\mathbf{a}'$ - приближенное решение прямой задачи, восстановленное из решения невозмущенной обратной задачи. Применяя разложение (6) к вектору $\mathbf{a}'$ и учитывая, что вектор $\mathbf{u}'$ принадлежит подпространству, натянутому на векторы $\mathbf{w}_n$, по аналогии с (7) легко доказать [3, 4], что $\|\mathbf{a}'\| \geq \sigma_1^{-1} \|\mathbf{u}'\|$. Отсюда из (8) имеем

$$\eta_\Delta \leq \gamma C_N \Delta , \tag{9}$$

где $\gamma = \|\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u}'\|$; $C_N = \sigma_1 / \sigma_N$ - число обусловленности.

Помимо того, неравенство (9) вытекает как частный случай из оценки [6, формула (9.10)]; оно хорошо известно для случая, когда уравнение (4) разрешимо в обычном смысле и соответственно $\gamma = 1$ [7]. В работах [3, 4] применялись оценки, сходные с (8), (9), но несколько более слабые. Оценка (8) является, очевидно, точной по всевозможным векторам $\delta\mathbf{u}$ при произвольной функции-оригинале $q(x)$. Оценка (9) является точной по всевозможным $\delta\mathbf{u}$, $q(x)$; при конкретной функции $q(x)$ она будет, вообще говоря, более слабой по сравнению с (8).

Апостериорные оценки погрешности η_Δ. Оценки (8), (9) имеют тот недостаток, что в них входят векторы $\mathbf{a}', \mathbf{u}$, которые относятся к невозмущенной задаче и в ходе реконструкции функции-оригинала остаются неизвестными. Получим аналоги этих оценок, зависящие только от априорно заданной погрешности Δ и от апостериорно известных векторов $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{u}}$. При выводе неравенств (8), (9) никак не использовалось то обстоятельство, что из двух векторов $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}$ точным является первый, а искаженным - второй, поэтому наряду с (8) и (9) справедливы неравенства:

$$\tilde{\eta}_\Delta \leq \sigma_N^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\tilde{\mathbf{a}}\|^{-1} \tilde{\Delta} , \qquad \tilde{\eta}_\Delta \leq \tilde{\gamma} C_N \tilde{\Delta} , \tag{10}$$

где

$$\tilde{\eta}_\Delta = \|\delta\mathbf{a}\| / \|\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}\|; \qquad \tilde{\Delta} = \|\delta\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\|; \qquad (11)$$

$\tilde{\gamma} = \|\tilde{\mathbf{u}}\| / \|\mathbf{u}''\|$, $\mathbf{u}'' = A_{(N)}\tilde{\mathbf{a}}$ - приближенное решение прямой задачи, полученное из решения обратной.

Раскроем в неравенствах (10) обозначения $\tilde{\eta}_\Delta, \tilde{\Delta}$ по формулам (11), домножим оба неравенства на $\|\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}\|$ и $\|\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\|$ и ослабим полученные неравенства при помощи неравенств треугольника

$\|\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\delta\mathbf{a}\|$; $\qquad \|\mathbf{u}\| - \|\delta\mathbf{u}\| \le \|\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\|$.

Последующие элементарные преобразования приводят к искомым результатам:

$$\eta_\Delta \le \frac{\sigma_N^{-1}\|\tilde{\mathbf{u}}\|\|\tilde{\mathbf{a}}\|^{-1}\Delta}{1 - \Delta - \sigma_N^{-1}\|\tilde{\mathbf{u}}\|\|\tilde{\mathbf{a}}\|^{-1}\Delta}; \qquad \eta_\Delta \le \frac{\tilde{\gamma} C_N \Delta}{1 - \Delta - \tilde{\gamma} C_N \Delta}. \qquad (12)$$

Неравенства (12) записаны в предположении, что знаменатели в их правых частях положительны; противное говорит о том, что в данном случае погрешность катастрофически велика и процедуру реконструкции следует изменить (например, понизив размерность решения N; последнее, как можно показать, приводит к уменьшению числа обусловленности C_N).

Из вывода неравенств (12) видно, что при $\|\delta\mathbf{u}\| << \|\mathbf{u}\|$, $\|\delta\mathbf{a}\| << \|\mathbf{a}\|$, или, что то же самое, при $\Delta << 1$, $\eta_\Delta << 1$ они мало отличаются от точных оценок (10). Условие $\Delta << 1$ должно обеспечиваться экспериментом (ясно, что если погрешность исходных данных Δ порядка единицы и более, то сколько-нибудь детальная реконструкция функции-оригинала совершенно невероятна). При значениях погрешности η_Δ порядка единицы и более решение тоже не представляет большого практического интереса; тем самым оценки (12) вряд ли нуждаются в дальнейшем уточнении. Вторая из оценок (12) не обладает, видимо, никакими преимуществами перед первой, за исключением того, что все входящие в нее величины имеют наглядный смысл.

Априорные оценки погрешности η_Δ. Метод [5] предназначен не только для контроля адекватности решений (эта проблема решается при помощи оценок (12)), но и для чисто априорного анализа различных условий, гарантирующих успешную реконструкцию и не «привязанных» к конкретным функциям-оригиналам. Ввиду непрерывности интегрального оператора $\hat{A}$ естественно ожидать, что если решение (3) мало отличается от оригинала, то и вектор $\mathbf{u}'$, найденный из решения невозмущенной обратной задачи, будет близок к вектору $\mathbf{u}$, порожденному функцией-оригиналом. Поэтому в случае адекватной реконструкции величина $\gamma = \|\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u}'\|$ должна быть, как правило, сопоставима с единицей. Приняв соотношение $\gamma \approx 1$ как гипотезу, мы получаем возможность оценивать погрешность η_Δ при помощи неравенства (9) (что применяется, в частности, для поиска оптимальной размерности N [3, 4]). Разумеется, что подобные прогнозы будут достоверными лишь при наличии строгой оценки для функционала γ. Подходящая оценка получена ниже в рамках канонической версии алгоритма. Предварительно сделаем два замечания, относящихся также и к общей версии.

1) При всех обстоятельствах $\gamma \geq 1$. Действительно, множество значений матричного оператора $A_{(N)} \ : R^N \to R^J$ есть линейное подпространство некой размерности N_0 (в общем случае $N_0 \leq N \leq M \leq J$). Обозначим через $\mathbf{u}_0$ проекцию вектора $\mathbf{u}$ на указанное подпространство, тогда минимальная невязка в уравнении (4) достигается при $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_0$, так что $\|\mathbf{u}'\| \leq \|\mathbf{u}\|$. (В соответствии с определением функционала γ здесь и далее нас интересует невозмущенная задача, поэтому в уравнении (4) полагаем $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}'$).

2) При максимальной допустимой размерности решения, т.е. при $N = M$, имеем $\gamma = 1$ и, более того, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$. Действительно, в обозначениях работы [5] уравнение (4) можно записать как $GS_{(N)}\mathbf{a}' = GS\mathbf{a}$, где $G, S_{(N)}, S$ - определенные в [5] матрицы, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, $a_n = (f_n, q)_{L_2}$ - точные коэффициенты обобщенного ряда Фурье. При $N = M$ матрица $S_{(M)}$ - квадратная, и она не вырождена, так как иначе была бы вырождена матрица $B_{(M)} = S^*_{(M)} G^* G S_{(M)}$. Поэтому M - мерное уравнение $S_{(M)}\mathbf{a}' = S\mathbf{a}$ разрешимо, и его решение $\mathbf{a}'$ обращает в нуль невязку M - мерного уравнения (4).

В канонической версии алгоритма базисные функции $f_n(x)$ совпадают с собственными функциями оператора $\hat{A}^*_{(J)} \, \hat{A}_{(J)}$, причем они должны быть упорядочены по убыванию его собственных значений σ_n^2 $(n = 1, \ldots, M)$ [2]. В связи с вырожденностью ядра (2), базисные функции с номерами $n > M$ принадлежат пространству $\mathrm{Ker}\{\hat{A}^*_{(J)} \, \hat{A}_{(J)}\}$ и никак не участвуют в процедуре реконструкции. Сингулярные числа σ_n оператора $\hat{A}^*_{(J)} \, \hat{A}_{(J)}$ одновременно выступают также и сингулярными числами матриц $B_{(N)}$, которые в данном представлении диагональны: $B_{(N)} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2)$, где $N = 1, \ldots, M$. При этом $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_N)$, т.е. в невозмущенной задаче младшие коэффициенты обобщенного ряда Фурье восстанавливаются точно [5]. Таким образом,

$$\|\mathbf{u}'\|^2 = (A_{(N)}\mathbf{a}', A_{(N)}\mathbf{a}') = (\mathbf{a}', B_{(N)}\mathbf{a}') = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 |a_n|^2, \qquad (N \leq M). \tag{13}$$

Полагая здесь $N = M$ и приняв во внимание замечание 2, найдем:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{M} \sigma_n^2 |a_n|^2 . \tag{14}$$

Обозначим через $q_N(x)$ отрезок обобщенного ряда Фурье для функции-оригинала $q(x)$ (выражение для $q_N(x)$ получается из формулы (3), если заменить в ней приближённые коэффициенты $\tilde{a}_n$ на точные a_n).

Оценим теперь функционал γ, используя (13) и (14):

$$\gamma^2 = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}'\|^2} = 1 + \frac{\sum_{n=N+1}^{M} \sigma_n^2 |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 |a_n|^2} \le 1 + \frac{\sigma_{N+1}^2 \sum_{n=N+1}^{M} |a_n|^2}{\sigma_N^2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2} \le$$

$$\le 1 + \frac{\sum_{n=N+1}^{M} |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2} \le \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2} = \frac{\|q(x)\|^2}{\|q(x)\|^2 - \|q(x) - q_N(x)\|^2} = \frac{1}{1-\eta_N^2},$$

где $\eta_N = \|q(x) - q_N(x)\| / \|q(x)\|$ есть не что иное, как погрешность аппроксимации по норме пространства $L_2[X_1, X_2]$, которая считается априорно известной.

Итак, в канонической версии проекционного алгоритма для функционала γ выполняется априорная оценка

$$\gamma \le \frac{1}{\sqrt{1-\eta_N^2}}. \tag{15}$$

Из замечания 1 очевидно, что при $\eta_N << 1$ оценка (15) не может быть заметно улучшена. В обратном случае, т.е. когда значение η_N больше или порядка единицы, адекватная реконструкция невозможна даже при отсутствии случайных погрешностей, так что оценивание погрешности η_Δ теряет смысл.

В свете оценки (15) для канонической версии проекционного алгоритма гипотеза о близости значений функционала γ к единице вполне подтверждается. Указать аналог оценки (15) для общей версии алгоритма затруднительно. Такая оценка должна, видимо, содержать дополнительные параметры, характеризующие отклонение выбранного базиса от собственного (подобные введенному в [5] параметру χ_N). Применительно к общей версии отметим, что если оригинал $q(x)$ принадлежит линейному подпространству, натянутому на первые N базисных функций $f_n(x)$, то тогда решение невозмущенной задачи совпадает с $q(x)$ [5] и, соответственно, $\gamma = 1$. Поскольку метод нацелен на восстановление функций, близких к функциям данного класса (таких, для которых $\eta_N << 1$), это подкрепляет аргументы в пользу вышеупомянутой гипотезы.

Выводы. Для канонической версии проекционного алгоритма найдена оценка погрешности решения, использующая априорные данные о погрешностях Δ и η_N. В общей версии алгоритма достоверная априорная оценка погрешности решения затруднена, но эту погрешность можно предварительно прогнозировать по тем же данным, с последующей апостериорной проверкой. В области применимости проекционного алгоритма, т.е. в условиях, когда он обеспечивает адекватную реконструкцию, все полученные оценки близки к точным.

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986. - 287 с.
2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. - М.: МГУ, 1994. - 206 с.
3. Ватульян А.О., Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акустический журнал - 2001. - Т. 47. - № 6. - С. 829-834.
4. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Об оптимальном выборе дискретного пара-метра регуляризации в обратной граничной задаче для упругих тел // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Спецвыпуск. Математическое моделирование. - 2001. - С. 61-63.
5. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. О применении метода проекций в обратной граничной задаче для упругого слоя // Вестник ДГТУ. - Т.4. - №3. - 2004. - С. 282-289.
6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. - М.: Наука, 1986. - 232 с.
7. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. - Новосибирск: Наука, Сибирское отд., 1988. - 456 с.

Материал поступил в редакцию 2.02.06.

V.M. DRAGILEV, L.L. DRAGILEVA

SOME BOUNDS FOR ERROR IN THE PROJECTIVE METHOD FOR THE INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH A DEGENERATE KERNEL

Some earlier suggested estimations concerned with the sensitivity of the solutions to the initial data random errors are reduced to the form, which is useful for the a priori information account.

ДРАГИЛЕВ Владимир Михайлович (р. 1955), докторант ДГТУ, кандидат физико-математических наук. Окончил РГУ (1978).
Научные интересы: линейная теория волн, некорректные задачи математической физики.
Автор 21 научной работы.

ДРАГИЛЕВА Людмила Леонидовна, доцент кафедры алгебры и высшей математики РГПУ. Окончила РГУ (1978).
Научные интересы: динамическая теория упругости, обратные граничные задачи.
Автор 16 научных работ.