

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



УДК 534.62–13

<https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-61-67>

Определение линейных характеристик опорных узлов ротора под нагрузкой

С. И. Лазарев, О. В. Ломакина, В. И. Галаев

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» (г. Тамбов, Российская Федерация)



Введение. Статья посвящена аналитическим исследованиям динамической системы «ротор — опора с зазором», находящейся под технологической нагрузкой. Цель исследования — получить выражения для определения эквивалентных жесткостных характеристик системы.

Материалы и методы. Рассмотрен ротор, вращающийся в упругих опорах с зазорами. Предложена динамическая модель, позволяющая рассматривать задачу определения линейных эквивалентных жесткостных характеристик опорных узлов. Для решения задачи составлена система дифференциальных уравнений и выполнен их детальный анализ.

Результаты исследования. Из полученных уравнений динамики рассматриваемой системы можно рассчитать статический угол отклонения цапф ротора, обусловленный действием нагрузки. Предложенные выражения для определения эквивалентных жесткостных характеристик свидетельствуют о том, что можно исследовать динамику ротора как на линейных упругих опорах с указанными выше параметрами.

Проанализирована полученная система уравнений и перечислены все частные случаи применения формул первого приближения для эквивалентных жесткостей опорных узлов ротора.

Обсуждение и заключения. Полученные результаты позволяют исследовать многие динамические процессы на основе линейных дифференциальных уравнений, учитывая нелинейные свойства системы. Для тех строгальных машин, которые используются при работе с кожаными материалами, определение колебаний ротора в горизонтальной плоскости обеспечивает качество и точность операций.

Ключевые слова: машиностроение, ротор, динамическое роторное оборудование, равновесие ротора, опорные узлы ротора, линейные эквивалентные жесткостные параметры узлов ротора, режимы работы ротора.

Для цитирования: Лазарев, С. И. Определение линейных характеристик опорных узлов ротора под нагрузкой / С. И. Лазарев, О. В. Ломакина, В. И. Галаев // Вестник Донского государственного технического университета. — 2020. — Т. 20, № 1. — С. 61–67. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-61-67>

Финансирование: работа выполнена по теме №10.4798.2017/БЧ в рамках госзадания Минобрнауки России в части НИР.

© Лазарев С. И., Ломакина О. В., Галаев В. И. 2020



Determination of linear characteristics of rotor mounting groups under load

S. I. Lazarev, O. V. Lomakina, V. I. Galaev

¹Tambov State Technical University (Tambov, Russian Federation)

Introduction. The paper considers analytical studies on the “rotor – gapped-type support” dynamic system under process loading. The research objective is to obtain expressions for determining the equivalent stiffness characteristics of the system.

Materials and Methods. A rotor rotating in the elastic gapped-type supports is considered. A dynamic model that enables to consider the problem of determining the linear equivalent stiffness characteristics of mounting groups is proposed. To solve the problem, a system of differential equations is compiled, and a detailed analysis is performed.

Results. From the obtained dynamic equations of the system in question, we can calculate the static angular deviation of the rotor pins due to the action of the load. The proposed expressions for determining equivalent stiffness characteristics testify that it is possible to study the rotor dynamics as on the linear elastic supports with the above parameters. The obtained system of equations is analyzed, and all special cases of applying the first approximation formulas for equivalent stiffness of the rotor mounting groups are listed.

Discussion and Conclusions. The results obtained make it possible to study many dynamic processes on the basis of linear differential equations considering the nonlinear properties of the system. For shavers used in the production of leather materials, the determination of rotor vibrations in the horizontal plane provides the quality and accuracy of operations.

Keywords: mechanical engineering, rotor, dynamic rotor equipment, rotor balance, rotor mounting groups, linear equivalent stiffness parameters of rotor units, rotor operating modes.

For citation: S.I. Lazarev, O.V. Lomakina, V.I. Galaev. Determination of linear characteristics of rotor mounting groups under load. Vestnik of DSTU, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 61–67. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-61-67>

Funding information: the research is done on theme no. 10.4798.2017/БЧ within the frame of the government task of RF Ministry of Education and Science in R&D

Введение. Технический прогресс предъявляет новые, более высокие требования к качеству продукции машиностроения. Главным образом речь идет о высокой надежности, долговечности машин, их продуктивности и безопасности. Все эти параметры должны быть учтены и рассчитаны на этапе разработки.

С точки зрения производственных процессов особое значение имеет динамическое роторное оборудование, обеспечивающее непрерывность технологического процесса [1–3]. В [4] представлены схемы конструкций и принцип работы различных роторных машин, выполнен патентный поиск по каждому их виду. В [5] рассмотрен характер зависимости эквивалентной жесткости от частоты колебаний для определенной модели, приведена зависимость критических частот от эквивалентной жесткости опор. В [6] авторы подробно рассматривают вопросы контроля вибрации, виброналадочных работ и предотвращения увеличения вибрации роторных машин, равновесия роторов. Кроме того, здесь перечислены источники вибрации и приводятся базовые сведения из теории колебаний. В работах [7–9] обсуждаются проблемы динамики жесткого неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы. Исследование [10] базируется на допущении, что реакции подшипника — это квазилинейные силы с кубической нелинейностью. С учетом этого рассматривается воздействие радиального зазора на движение в пространстве динамически неуравновешенного ротора под влиянием сил внутреннего трения. В [11] показаны взаимосвязи поперечных и крутильных колебаний, возникающие при вращении ротора центрифуги. Разработана линеаризованная математическая модель ротора в упругих опорах, учитывающая влияние поперечных и крутильных колебаний.

Проведенный обзор литературы позволяет утверждать, что исследование колебательного процесса и соответствующих параметров линейных механических систем представляет интерес. В данной работе рассмотрен ротор, в частности его опорные узлы с зазорами. Цель исследования — определить значения под нагрузкой линейных эквивалентных жесткостных параметров названных узлов.

Материалы и методы. В качестве ротора использована динамическая модель, предусматривающая вращение в упругих опорах с зазорами (рис. 1).

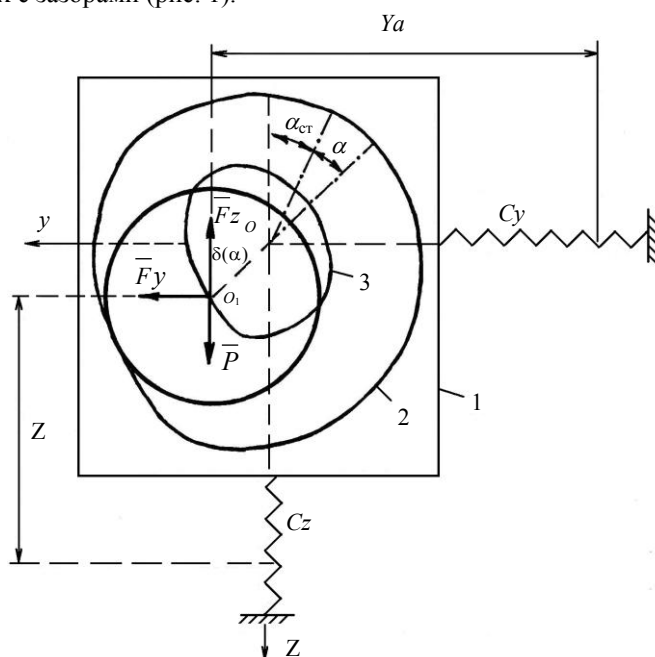


Рис. 1. Динамическая модель ротора, который вращается в упругих опорах с зазорами

На рис. 1 приняты следующие обозначения: 1 — опора ротора; 2 — граница контакта опоры с цапфой ротора; 3 — кривая относительного движения центра цапфы ротора; m — масса ротора; β (α) — радиальный зазор в роторных опорах (представлен функцией угла смещения его цапф от вертикальных направляющих); C_y , C_z — общие жесткости кожухов опорных узлов соответственно в горизонтальных и вертикальных направляющих; $y_{ст}$ $z_{ст}$ — статический сдвиг центра масс ротора в горизонтальном и вертикальном направлении, вызванный деформациями в опорных узлах; α — динамический угол наклона цапф ротора; $\alpha_{ст}$ — угол наклона от положения равновесия, вызванный технологической нагрузкой на ротор; y_a , z_a — полные динамические смещения центра масс ротора в указанных выше направлениях; $f = F_z / F_y$ — взаимосвязь вертикальной и горизонтальной компонент технологической нагрузки.

Для определения потенциальной (Π) и кинетической (T) энергий исследуемой системы воспользуемся следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} C_y [y_a + y_{cm} - \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta(\alpha_{cm}) \sin \alpha_{cm}]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} C_z [z_a + z_{cm} - \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta(\alpha_{cm}) \cos \alpha_{cm}]^2 - \\ &- mg [z_a + z_{cm} + \delta(\alpha_{cm}) \cos \alpha_{cm}]; \\ T &= \frac{1}{2} m (\dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) + \frac{1}{2} A \omega^2.\end{aligned}$$

Здесь A — полярный момент инерции, ω — угловая скорость вращающегося ротора.

Следует учитывать, что действующие силы не являются потенциальными. При этом обобщенные силы, которым соответствуют введенные ранее координаты y_a , z_a , α , примут вид:

$$\begin{aligned}Q_{y_a} &= F_y, \quad Q_{z_a} = -F_z, \\ Q_\alpha &= F_y \left\{ \left[\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) \right] + \right. \\ &\left. + f \left[\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) - \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Здесь $\delta'(\alpha + \alpha_{cm})$ — производная радиального зазора по углу α ; $f = \frac{F_z}{F_y}$ — взаимосвязь вертикальной и горизонтальной компонент технологической нагрузки.

При данных условиях уравнения, выражающие динамику системы, можно записать:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_a + C_y \cdot y_a - C_y \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) + C_y \delta(\alpha_{cm}) \sin \alpha_{cm} = 0, \\ m\ddot{z}_a + C_z \cdot z_a - C_z \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) + C_z \delta(\alpha_{cm}) \cos \alpha_{cm} = 0, \\ mg [\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) - \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm})] - \\ - C_y [y_a - \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta(\alpha_{cm}) \sin \alpha_{cm}] \times \\ \times [\delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm})] + \\ + C_z [z_a - \delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta(\alpha_{cm}) \cos \alpha_{cm}] \times \\ \times [\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) - \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm})] = \\ = F_y \left\{ \left[\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) + \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) \right] + \right. \\ \left. + f \left[\delta(\alpha + \alpha_{cm}) \sin(\alpha + \alpha_{cm}) - \delta'(\alpha + \alpha_{cm}) \cos(\alpha + \alpha_{cm}) \right] \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрев более детально третье уравнение системы (1), определим угол наклона α_{cm} , считая $\alpha = 0$. После преобразований в уравнениях (1) получим более простую систему:

$$\begin{aligned}m\ddot{y}_a + C_{экр}^{yy} \cdot y_a + C_{экр}^{yz} \cdot z_a &= 0, \\ m\ddot{z}_a + C_{экр}^{zy} \cdot y_a + C_{экр}^{zz} \cdot z_a &= 0.\end{aligned} \quad (2)$$

Анализ уравнений (2) позволяет в первой аппроксимации значений рассматривать упругую опору с зазором как опору с линейными упругими характеристиками (и в горизонтальных, и в вертикальных направляющих):

$$F_y = C_{экр}^{yy} \cdot y_a + C_{экр}^{yz} \cdot z_a, \quad F_z = C_{экр}^{zy} \cdot y_a + C_{экр}^{zz} \cdot z_a.$$

Здесь

$$C_{\text{экв}}^y = \frac{C_y \left[mg \cdot r + \cos^3 \alpha_{cm} (\theta + f \cdot z \cdot z^2 \cdot C_z) \right]}{\Delta}, C_{\text{экв}}^z = \frac{C_z \left[mg \cdot r + \cos^3 \alpha_{cm} (\theta + f \cdot z \cdot \theta^2 \cdot C_y) \right]}{\Delta},$$

$$C_{\text{экв}}^{yz} = C_{\text{экв}}^{zy} = \frac{C_y C_z \cos^3 \alpha_{cm} \cdot \theta \cdot z (\theta + f \cdot z)}{\Delta},$$

$$r = \delta^2(\alpha_{cm}) + 2\delta'(\alpha_{cm})^2 - \delta(\alpha_{cm}) \cdot \delta''(\alpha_{cm}),$$

$$\theta = \delta(\alpha_{cm}) + \delta'(\alpha_{cm}) \cdot \text{tg} \alpha_{cm}, \quad z = \delta(\alpha_{cm}) \cdot \text{tg} \alpha_{cm} - \delta'(\alpha_{cm}),$$

$$\Delta = mg \cdot r + \cos^3 \alpha_{cm} (\theta + f \cdot z) \cdot (C_z \cdot z^2 + C_y \cdot \theta^2). \quad (3)$$

Результаты исследования. В системе (3) величины $C_{\text{экв}}^y$, $C_{\text{экв}}^z$, $C_{\text{экв}}^{yz}$ выражают эквивалентные характеристики жесткости опоры с зазором.

Чтобы получить зависимости эквивалентных характеристик жесткости нелинейной механической системы, воспользуемся разложением тригонометрических функций в системе (1), учитывая слагаемые более высокого порядка. Для определения необходимых величин укажем:

$$y_a = A_y \cdot \sin \omega_1 t, \quad z_a = B_z \cdot \cos \omega_1 t,$$

где B_z , A_y — амплитуда общего колебания ротора в вертикальных и горизонтальных направляющих соответственно, ω_1 — частота колебаний.

Таким образом,

$$C_{\text{экв}}^y = \frac{\omega_1}{\pi A_y} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \Phi_y(y_a, z_a) \sin \omega_1 t dt,$$

$$C_{\text{экв}}^z = \frac{\omega_1}{\pi B_z} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \Phi_z(y_a, z_a) \cos \omega_1 t dt. \quad (4)$$

Здесь $\Phi_y(y_a, z_a)$, $\Phi_z(y_a, z_a)$ — функции координат y_a , z_a . Эти величины можно определить, обратившись к системе дифференциальных уравнений (1).

Решая систему уравнений (4) методами интегрирования, представим величины в виде:

$$C_{\text{экв}}^y = \frac{C_y (mgr + C_z \cos \alpha_{cm} \cdot b \cdot z^2)}{\Delta} + \frac{C_y^2 \cos \alpha_{cm} \cdot \psi \cdot \theta \cdot b^3 (C_y^2 \cdot \theta^2 \cdot A_y^2 + C_z^2 \cdot z^2 \cdot B_z^2)}{8\Delta^3},$$

$$C_{\text{экв}}^z = \frac{C_z (mgr + C_y \cos \alpha_{cm} \cdot b \cdot \theta^2)}{\Delta} + \frac{C_z^2 \cos \alpha_{cm} \cdot \psi \cdot z \cdot b^3 (C_y^2 \cdot \theta^2 \cdot A_y^2 + C_z^2 \cdot z^2 \cdot B_z^2)}{8\Delta^3}. \quad (5)$$

Здесь

$$b = \cos^2 \alpha_{cm} (\theta + f \cdot z),$$

$$\psi = \delta(\alpha_{cm}) + 3\delta'(\alpha_{cm}) \text{tg} \alpha_{cm} - 3\delta''(\alpha_{cm}) - \delta'''(\alpha_{cm}) \text{tg} \alpha_{cm},$$

$$\xi = \delta(\alpha_{cm}) \text{tg} \alpha_{cm} - 3\delta'(\alpha_{cm}) - 3\delta''(\alpha_{cm}) \text{tg} \alpha_{cm} + \delta'''(\alpha_{cm}).$$

Анализируя (5), можно говорить о взаимозависимости не только между жесткостями корпусов в опорах ротора C_y , C_z , но и амплитуд A_y , B_z его общих колебаний.

Необходимо подчеркнуть, что жесткость $C_{\text{экв}}^{yz}$ выражается как взаимосвязь движений ротора в горизонтальной и вертикальной плоскостях. В случае $C_{\text{экв}}^{yz} = 0$ в системе (2) уравнения не будут связаны, что позволяет учесть все возможные варианты. Они перечислены ниже.

— При отсутствии изменений радиального зазора со временем и $\alpha_{cm} = 0$ имеем $C_{\text{экв}}^z = C_z$. Такой вариант характерен для холостого режима работы ротора. При этом радиальное смещение ротора по отношению к опоре в вертикальных направляющих является совсем небольшой величиной, хотя и более высокого порядка, чем смещение в горизонтальных направляющих.

— Если принять $z = 0$, то $C_{\text{экв}}^z = C_z$. Данная ситуация свойственна радиальному перемещению ротора по отношению к опоре в окружении точки, через которую проходит горизонтальная касательная к траектории относительного движения центра цапфы.

— При нулевом значении величины радиального зазора в опорах имеем $C_{\text{экв}}^y = C_y$ и $C_{\text{экв}}^z = C_z$.

— Если отсутствуют изменения радиального зазора и $\alpha_{cm} = 90^\circ$, то $C_{экр}^y = C_y$. Это возможно, если ротор работает при технологической нагрузке с подобранным зазором, т. е. в горизонтальных направляющих радиальное смещение принимает малые значения по сравнению с вертикальным направлением.

— При $\theta = 0$ $C_{экр}^y = C_y$. В данном случае радиальные смещения ротора имеют место в окрестности точки, через которую проходит вертикальная касательная к линии относительного движения центра цапфы.

— Возможно выполнение равенства $\theta + f \cdot z = 0$. Это справедливо в случае радиального смещения ротора по отношению к опоре в окружении такой точки, через которую проведена нормаль, совпадающая с линией действия результирующей сил F_r и F_b . В этом случае $C_{экр}^y = C_y$ и $C_{экр}^z = C_z$.

Рассмотрим характеристики ротора на упругих опорах, жесткости которых равны $C_{экр}^y, C_{экр}^z$. Обозначим ε — эксцентриситет ротора, ω — его угловая скорость. Уравнения колебаний представим в виде системы:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_a + C_{экр}^y \cdot y_a = m \cdot \varepsilon \cdot \omega^2 \sin \omega t \\ m\ddot{z}_a + C_{экр}^z \cdot z_a = m \cdot \varepsilon \cdot \omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad (6)$$

Решая (6), запишем выражения для амплитуд колебаний:

$$A_y = \frac{m \cdot \varepsilon \cdot \omega^2}{C_{экр}^y - m \cdot \omega^2}, \quad B_z = \frac{m \cdot \varepsilon \cdot \omega^2}{C_{экр}^z - m \cdot \omega^2}. \quad (7)$$

Заметим, что слагаемые $C_{экр}^y, C_{экр}^z$ в знаменателях зависят от амплитуд A_y, B_z . Представим графически рассматриваемую систему (рис. 2).

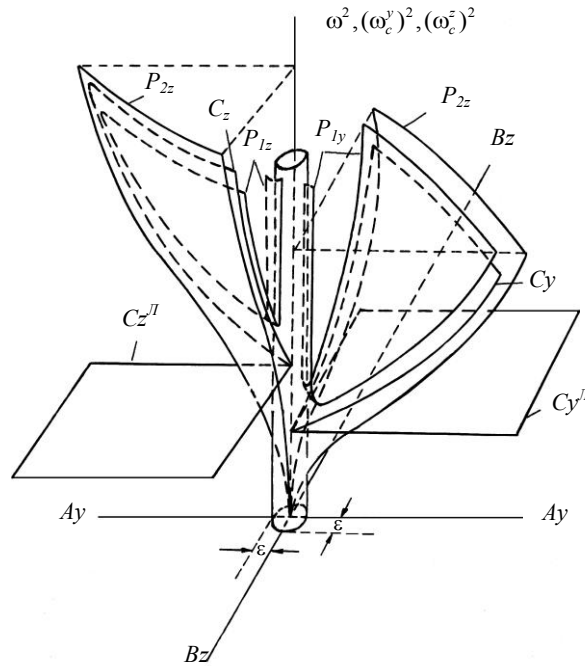


Рис. 2. Графическое представление динамических характеристик абсолютных колебаний ротора в опорах с зазорами

Поверхности $P_{1y}, P_{2y}, P_{1z}, P_{2z}$ (резонансные) и C_y, C_z (скелетные) построены в предположении, что амплитуды A_y и B_z изменяются независимо на основании (7) и равенств $C_{экр}^y = m(\omega_c^y)^2, C_{экр}^z = m(\omega_c^z)^2$.

Амплитуды вынужденных колебаний A_y, B_z соответствуют частоте возмущающих сил ω_0 . Принимая во внимание этот факт, для получения выражений указанных амплитуд сначала построим плоскость $\omega^2 = \omega_0^2$.

На линиях пересечения построенной плоскости с поверхностями P_{1y}, P_{2y} и P_{1z}, P_{2z} будут точки с идентичными координатами. Эти точки — искомые амплитуды колебаний ротора.

Плоскости C_y^I, C_z^I — скелетные поверхности линейной системы. В этом случае в выражениях для эквивалентных жесткостей берутся только первые слагаемые. Они указывают на то, что частоты свободных колебаний линейной системы не зависят от амплитуд.

Резонансные поверхности представляют колебания ротора в горизонтальных направляющих, а скелетные — в вертикальных. Они построены в различных координатных октантах. По форме скелетные поверхности являются эллиптическими параболоидами. На рис. 2 ω_c^y , ω_c^z представляют собой частоты свободных колебаний системы.

Обсуждение и заключения. Одной частоте могут подходить несколько точек. Это означает, что в исследуемой системе возможно несколько режимов колебаний, в том числе неустойчивых. Для перехода системы с одного устойчивого режима движения на другой необходимы некоторые внешние воздействия, что характерно уже для нелинейных систем.

В качестве примера применения полученных зависимостей можно привести задачу о вынужденных колебаниях ротора вследствие его статической неуравновешенности.

Представленные в работе зависимости (4) указывают на то, что эквивалентные угловые жесткости взаимозависимы не только через жесткости C_y , C_z корпусов, но и через амплитуды A_y , B_z общих колебаний ротора.

В результате исследования линейных характеристик опорных узлов нагруженного ротора получены следующие результаты.

1. Предложена динамическая модель ротора, вращающегося в упругих опорах с зазорами. Данная модель позволяет исследовать задачи определения линейных эквивалентных жесткостных характеристик опорных узлов.
2. Проанализирована система уравнений и перечислены возможности применения формул. В частности, с их помощью можно определить колебания ротора в горизонтальной плоскости на строгальных машинах, используемых для получения заготовок кожи.

Библиографический список

1. Banaszek, S. The modeling of defects in the rotor-trains of turbomachinery-simulation-based diagnostics / S. Banaszek // Проблемы машиностроения. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 73–78.
2. Галаев, В. И. Виброактивность взаимодействия системы неуравновешенных валов, вращающихся в упруго-массовых опорах / В. И. Галаев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. — 2004. — Т. 10, № 3. — С. 747–754.
3. Ломакина, О. В. Dynamic linearization of stiffness characteristics of elastic bearings with radial clearance of loaded rotor / О. В. Ломакина, В. И. Галаев // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. — 2011. — № 2 (33). — С. 387–393.
4. Гринёв, Д. В. Конструктивные схемы и принципы работы роторно-лопастных машин / Д. В. Гринёв // Вестник Псковского государственного университета. — 2014. — № 5. — С. 142–150.
5. Биялт, М. А. Расчетное исследование вибрационных характеристик динамической системы «Ротор — подшипники — опоры» / М. А. Биялт, А. А. Плотникова, Е. В. Урьев // Молодой ученый. — 2012. — № 11. — С. 23–26.
6. Гольдин, А. С. Вибрация роторных машин / А. С. Гольдин. — Москва : Машиностроение, 1999. — 344 с.
7. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. — Москва : Машиностроение, 1985. — 440 с.
8. Кельзон, А. С. Динамика роторов в упругих опорах / А. С. Кельзон, Ю. П. Циманский, В. И. Яковлев. — Москва : Наука, 1982. — 280 с.
9. Кельзон, А. С. Динамика статически неуравновешенного ротора в подшипниковых опорах / А. С. Кельзон, А. С. Меллер // Доклады Академии наук СССР. — 1991. — Т. 318, № 1. — С. 69–72.
10. Пасынкова, И. А. Установившиеся движения неуравновешенного ротора в подшипниках с радиальным зазором / И. А. Пасынкова // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2005. — Вып. 3. — С. 87–95.
11. Вульфсон, И. И. Нелинейные задачи динамики машин / И. И. Вульфсон, М. З. Коловский. — Ленинград : Машиностроение, 1968. — 284 с.

Сдана в редакцию 16.01.2020
Запланирована в номер 19.02.2020

Об авторах

Лазарев Сергей Иванович, заведующий кафедрой «Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» (392000, РФ, г. Тамбов, ул. Советская, 106), доктор технических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0746-5161>, sergey.lazarev.1962@mail.ru

Ломакина Ольга Владимировна, доцент кафедры «Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» (392000, РФ, г. Тамбов, ул. Советская, 106), кандидат педагогических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6908-6055>, lomakinaolga@mail.ru

Галаев Валентин Иванович, доцент кафедры «Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» (392000, РФ, г. Тамбов, ул. Советская, 106), кандидат технических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6793-6693>, geometry@mail.nnn.tstu.ru

Заявленный вклад соавторов

С. И. Лазарев — формирование основной концепции; цели, задачи и методы исследования. О. В. Ломакина — литературный обзор, подготовка текста, получение результатов и формирование выводов. В. И. Галаев — анализ результатов исследований, доработка текста.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.