ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

УДК 621.317.328 DOI 10.12737/11585

Алгоритм обращения эрмитовой матрицы*

М. Ю. Звездина[1], О. В. Комова[2], Н. В. Шацкий[3], А. В. Шоков[4]**

[1, 4]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Ростовский колледж связи и информатики, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[3]ОАО «Радиотехнический институт им. акад. А.Л. Минца». Обособленное подразделение в г. Ростове-на-Дону, Российская Федерация

Hermitian matrix inversion algorithm***

M. Yu. Zvezdina[1], O.V. Komova[2], N. V. Shatskiy[3], A.V. Shokov[4]**

[1,4]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2]Rostov College of Communication and Informatics, Rostov-on-Don, Russian Federation
[3]Academician A.L. Mints Radiotechnical Institute, JSC. Standalone division in Rostov-on-Don, Russian Federation

Цель работы заключается в повышении быстродействия устройства обращения ковариационной матрицы помех адаптивной антенной решетки за счет сокращения числа выполняемых операций. Это достигается использованием на этапе разработки алгоритма обращения априорной информации о свойстве эрмитовости обращаемой матрицы. В отличие от известных алгоритмов обращения, базирующихся на применении метода Гаусса — Жордана, в основу предложенного алгоритма положен метод окаймления. Актуальность разработки обусловлена сложностью метода Гаусса — Жордана и необходимостью большого числа операций при его использовании. Указанные особенности не позволяют реализовать режим реального времени при обработке сигналов в вычислительных устройствах адаптивных антенных решеток, широко применяемых в системах связи, радиолокации и радионавигации. Предложенный метод, дополняющий известный метод окаймления учетом свойств эрмитовости ковариационной матрицы помех, позволяет построить алгоритм на базе рекуррентных соотношений. Получаемый при этом выигрыш от сокращения объема вычислений составляет не менее 25 % по сравнению с методом Гаусса — Жордана. Уменьшение объема вычислительных затрат, а также более простой вид соотношений, применяемых для построения алгоритма обращения матрицы, дали возможность разработать и более простую схему устройства, которое можно использовать в процессорах адаптивных антенных решеток для получения обратной матрицы.

Ключевые слова: адаптивная антенная решетка, вычислительный блок адаптивной антенной решетки, обращение ковариационной матрицы помех, метод окаймления, свойство эрмитовости ковариационной матрицы, сокращение объема вычислений, устройство для реализации процесса обращения матрицы.

The work objective is speeding the covariance matrix converter of the adaptive antenna array interference by reducing the number of operations performed. A problem of developing an aprior information inversion algorithm relying on the Hermitian nature of the reversible matrix is considered. The proposed algorithm is based on a bordering method in contrast to the well-known algorithms based on method of Gaussian-Jordan elimination. Because of complexity and a large operation number, Gaussian-Jordan method does not allow realizing the real time signal processing in computing systems of the adaptive antenna arrays that are widely used in communication, radiolocation, and radio navigation systems. The proposed algorithm extends a well-known bordering method by taking into account Hermitian nature of the covariance interference matrix, and allows developing an algorithm based on the recursive relations. An obtained gain in amount of calculation is no less than 25% comparing to the method of Gaussian-Jordan elimination. The calculation amount decrease and a more simple form of relations used for the matrix inversion algorithm elaboration allow developing a more simple design of the adaptive antenna array processor for the matrix inversion.

Keywords: adaptive antenna array, adaptive array computing system, covariance interference matrix inversion, bordering method, Hermitian nature of covariance matrix, calculation amount decrease, device for matrix inversion.

*Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
**E-mail: zvezdina_m@mail.ru, zvezdina_m@mail.ru, shteiz@mail.ru, zvezdina_m@mail.ru
***The research is done within the frame of the independent R&D.

Введение. На современном этапе развития радиоэлектронных систем (РЭС) в области связи, радиолокации и радионавигации отмечается значительное усложнение электромагнитной обстановки. Это связано с высокой пространственной плотностью размещения РЭС и ограничениями используемых частотных диапазонов. Так, по данным [1], число базовых станций формата 3G/4G только одного российского оператора «МегаФон» к концу 2013 года составляло порядка 43,5 тыс.

В данных условиях, как правило, параметры мешающих сигналов (в первую очередь, направление прихода), неизвестны. Поэтому для обеспечения помехоустойчивого приема применяются методы адаптивного формирования «нулей» диаграммы направленности (ДН) в многоканальной антенной системе — адаптивной антенной решетке (ААР) [2–4]. Функциональная схема получаемой при этом адаптивной антенны показана на рис. 1 [2].

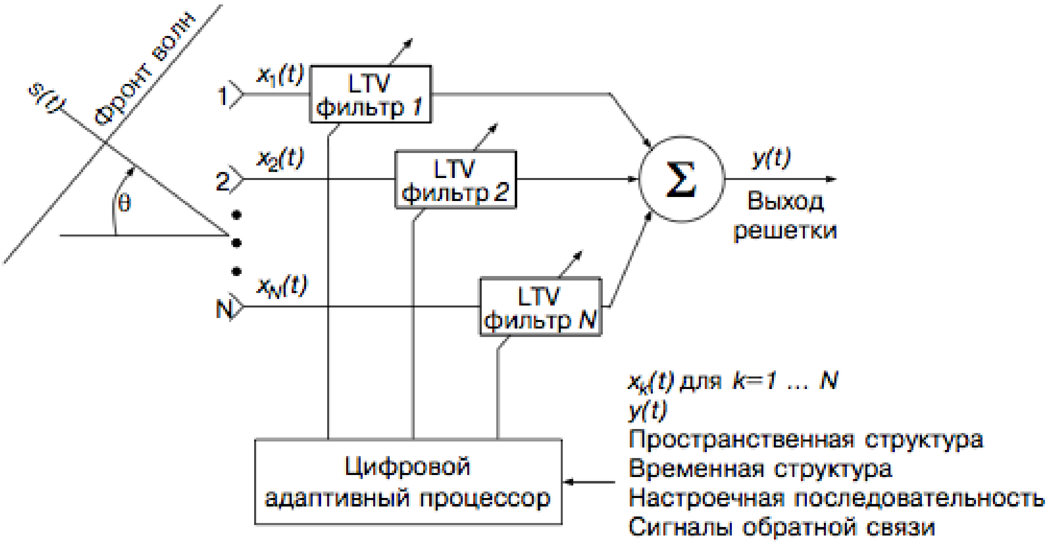

Рис. 1. Функциональная схема антенны

Конструкция антенны (схема расположения излучающих элементов) выбирается в зависимости от требуемых характеристик. В общем случае схема включает многоэлементную антенную решетку, диаграммообразующую схему и цифровой адаптивный процессор. Антенная решетка используется для приема сигналов, которые суммируются с весовыми коэффициентами, вычисленными адаптивным процессором в диаграммообразующей схеме для формирования диаграммы направленности антенны.

Обработка сигналов в адаптивном процессоре базируется на использовании современных методов спектрального анализа [2–4]. Они позволяют определять число и угловые координаты источников излучения, не прибегая к электрическому или механическому перемещению диаграммы направленности антенны. Используются исключительно алгоритмические способы обработки сигналов, принятых элементами антенной решетки. В результате можно в режиме реального времени отслеживать координаты источников излучения, находящихся в зоне наблюдения. В этом заключается основное достоинство методов спектрального анализа. Общая их особенность — использование взаимно-спектральной матрицы сигнала (ковариационной матрицы), оцениваемой на некоторой заданной частоте или в некоторой узкой полосе частот выходного сигнала приемника. С точки зрения теории, методы локализации источников излучения могут быть применимы только с некоторой задержкой, связанной с накоплением определенного числа мгновенных выборок (снимков) выходов приемников. Причем чем больше размер накопленных выборок, тем точнее получаются результаты.

Используемые в адаптивном процессоре алгоритмы базируются на нелинейной обработке сигналов методами линейной алгебры и теории матрицы с обращением или спектральным разложением корреляционной матрицы входных сигналов, имеющей большую размерность. Реализовать такую обработку в реальном масштабе времени в настоящее время затруднительно даже на самой современной элементной базе [5]. В связи с этим актуальной является задача поиска алгоритмов, упрощающих процесс обращения с учетом свойств матрицы, включая и алгоритмы получения решения в аналитической или полуаналитической форме [6, 7]. Так, в ряде работ, например [8–16], рассматриваются алгоритмы формирования обратной матрицы. В работе [17] описывается устройство, реализующее процесс получения обратной матрицы. Его построение основывается на использовании метода Гаусса — Жордана, представленного рекуррентными соотношениями. В работах [15, 16, 18] предложен алгоритм обращения, основанный на использовании метода окаймления [19]. Однако в указанных алгоритмах не учитываются свойства обращаемой матрицы.

Цель работы – повышение быстродействия устройства обращения ковариационной матрицы помех адаптивной антенной решетки путем сокращения числа выполняемых операций на основе использования в алгоритме обращения априорной информации о свойствах эрмитовости матрицы.

Выявление свойств ковариационной матрицы. Для выявления свойств обращаемой ковариационной матрицы помех рассмотрим модель задачи определения направления прихода сигнала.

Математическое описание алгоритма определения направления прихода сигнала формулируется следующим образом [2–4, 8]. Пусть *N*-элементная антенная решетка с идеальной точностью принимает сигналы, передаваемые некоррелированными источниками численностью *M*. При этом пусть передающая среда является изотропной и не рассеивающей, а источники излучения находятся в ее дальней зоне. Пусть канал системы передачи является узкополосным. Значит, по мере прохождения с направления θ_m ($m = 1,2 \ldots M$) радиосигнала $\mathbf{S}(t) = [S_1(t), S_2(t), \ldots, S_M(t)]^T$ через решетку в виде волновых фронтов его огибающая остается неизменной. Здесь *T* — символ транспонирования. Предположим, что отклик решетки на каждый сигнал является функцией только одного углового параметра θ_m. Требуется определить направление прихода волны θ_m.

С учетом сделанных предположений пространственно-временная обработка сигнала разделяется на пространственную и временную, выполняемые в произвольном порядке. В результате суммарный измеряемый сигнал определяется выражением [2]:

$$x(t) = A(\theta)S(t) + n(t)\,, \qquad (1)$$

где $n(t) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_M(t)]^T$ — комплексный низкочастотный сигнал, эквивалентный полученному сигнальному вектору на антенной решетке в момент времени *t*; $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \ldots, a(\theta_M)]^T$ — вектор отклика решетки в направлении θ_m.

Известно большое число алгоритмов для обработки принятых антенными элементами данных с целью определения направления на источник излучения [2]. Так, для алгоритма «сверхразрешения», подробно описанного в [2, 4], направления прихода сигналов определяются положением пиков в пространственном распределении мощности:

$$P = (A^H(\theta) R_{xx}^{-1} A(\theta))^{-1} \qquad (2)$$

Здесь корреляционная матрица входных сигналов определяется выражением

$$R_{xx} = A(\theta) R_{ss} A^H(\theta) + \sigma^2 I\,, \qquad (3)$$

а функция ковариации входных сигналов определяется соотношением

$$R = R_{ss} = \lim_{Nt \to \infty} \frac{1}{Nt} \sum_{m=1}^{Nt} x(t_m) x^H(t_m)\,, \qquad (4)$$

где Nt — размер выборки; σ^2 — дисперсия шума; *I* — единичная матрица; *H* — символ эрмитового сопряжения.

Анализ соотношений (2)–(4) показывает, что для получения информации о направлениях прихода сигнала необходимо осуществить обращение ковариационной матрицы. Ее размерность а также точность получаемых результатов определяются размером выборки: чем больше объем выборки, тем более точные результаты могут быть получены. Обращаемая матрица, как несложно заметить из анализа выражения (4), обладает свойством эрмитовости [19].

Таким образом, при разработке алгоритма обращения корреляционной матрицы помех, имеющей большую размерность, необходимо учитывать ее эрмитовость.

Алгоритм обращения матрицы с учетом эрмитовости. Пусть эрмитовая матрица M порядка N является заданной и определяется следующим выражением:

$$M = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{N1} & s_{N2} & \ldots & s_{NN} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

В соответствии с предлагаемым алгоритмом на первом шаге из элементов s_{ij} ($i = 1,\ldots,N$, $j = 1,\ldots,N$) матрицы M выбираются элементы s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}. Данные элементы позволяют сформировать блочную матрицу M_2^{-1} размерности 2×2. Формулы, на основе которых вычисляются данные элементы, — $m_{11}^{(1)}, m_{12}^{(1)}, m_{21}^{(1)}, m_{22}^{(1)}$ с учетом эрмитовости матрицы M имеют вид:

$$m_{11}^{(1)} = \left(s_{11}s_{22} - |s_{12}|^2\right)^{-1} s_{22}\,;\; m_{12}^{(1)} = -\left(s_{11}s_{22} - |s_{12}|^2\right)^{-1} s_{12}\,;$$

$$m_{21}^{(1)} = -\left(s_{11}s_{22} - |s_{12}|^2\right)^{-1} s_{21} = -\left(s_{11}s_{22} - |s_{12}|^2\right)^{-1} s_{12}{}^* = m_{12}^{(1)*}\,;$$

$$m_{22}^{(1)} = \left(s_{11}s_{22} - \left|s_{12}\right|^2\right)^{-1} s_{11}. \tag{6}$$

На втором шаге происходит формирование обратной матрицы третьего порядка M_3^{-1}. Для построения данной матрицы дополнительно используются элементы $s_{13}, s_{23}, s_{33}, s_{31}, s_{32}$ ковариационной матрицы *M*, окаймляющие полученную на первом шаге матрицу M_2^{-1}, как приведено ниже:

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & s_{13} & \dots & s_{1N} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & s_{23} & \dots & s_{2N} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \dots & s_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N1} & s_{N2} & s_{N3} & \dots & s_{NN} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Однако для эрмитовой матрицы $s_{13} = s_{31}{}^*, s_{23} = s_{32}{}^*$. Поэтому для нахождения матрицы третьего порядка достаточно использовать только элементы s_{31}, s_{32}, s_{33}. Элементы этой матрицы находятся с помощью формул:

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{(2)} & m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(2)} & m_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \left(s_{31}\; s_{32}\right)^{*T} \frac{1}{H} \left(s_{31}\; s_{32}\right) \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} m_{13}^{(2)} \\ m_{23}^{(2)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \left(s_{31}\; s_{32}\right)^{*T} \frac{1}{H}, \tag{9}$$

$$\left(m_{31}^{(2)}\; m_{32}^{(2)}\right) = -\frac{1}{H} \left(s_{31}\; s_{32}\right) \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$m_{33}^{(2)} = \frac{1}{H}, \tag{11}$$

где $H = s_{33} - \left(s_{31}\; s_{32}\right) \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \left(s_{31}\; s_{32}\right)^{*T}$.

В общем случае для перехода от обратной матрицы M_n^{-1} порядка n к обратной матрице M_{n+1}^{-1} порядка $n+1$, выполняемого на n-м шаге преобразования, дополнительно используются приведенные на рис. 2:

— элементы $\{s_{1n+1}, s_{2n+1}, \dots, s_{nn+1}\}$, образующие матрицу-столбец B;

— элементы $\{s_{n+11}, s_{n+12}, \dots, s_{n+1n}\}$, обозначенные как матрица-строка C;

— элемент s_{n+1n+1}, представляющий блок D.

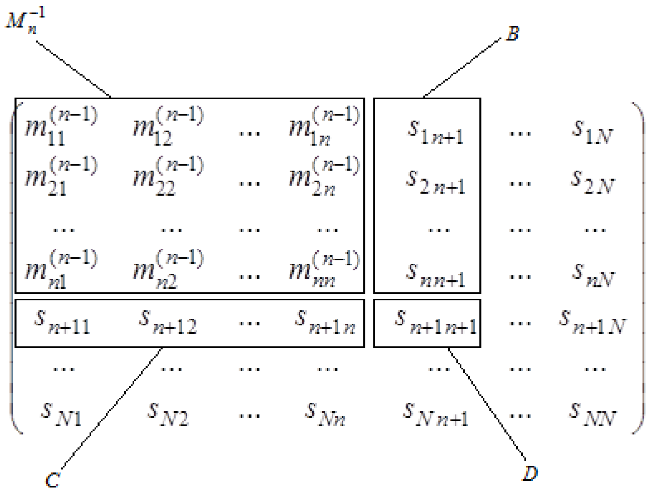

Рис. 2. Формирование структуры обращаемой матрицы

С учетом эрмитовых свойств матрица-столбец B равна комплексно сопряженной и транспонированной матрице-строке C, то есть $B = C^{*T}$. Следовательно, матрица M_{n+1}^{-1}, элементы которой определяются формулами, описанными в [19], примет вид:

$$M_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} M_n^{-1} + (H^{-1}CM_n^{-1})^{*T} CM_n^{-1} & -(H^{-1}CM_n^{-1})^{*T} \\ -H^{-1}CM_n^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $H = D - CM_n^{-1}C^{*T}$.

Оценка эффективности предложенного алгоритма. Для сравнения эффективности предложенного алгоритма обращения с известным алгоритмом на основе метода Гаусса — Жордана воспользуемся результатами работы [20]. Анализ соотношений, описывающих предложенный алгоритм обращения матрицы, показывает следующее. Для обращения матрицы $\mathbf{R}_{xx}$ размерности $Nt \times Nt$ с использованием метода Гаусса — Жордана потребуется $(Nt)^3$ операций умножения и сложения. При использовании предложенного метода окаймления с учетом свойств эрмитовости корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{xx}$ необходимо $0,75(Nt)^3 + (Nt)^2$ операций. Таким образом, предложенный алгоритм обеспечивает для матриц больших размерностей, когда $Nt \to \infty$, сокращение числа операций до $(1-(0,75+1/Nt)) \cdot 100\,\% \approx 25\,\%$.

Техническая реализация алгоритма. Схема устройства, реализующего предложенный алгоритм, отличается от устройства, описанного в работе [18] и основанного на использовании метода окаймления. При учете свойства эрмитовости обращаемой матрицы число вычислительных модулей может быть сокращено с 11 до 9, упрощается схемное выполнение вычислительных модулей, изменяются связи между ними. Кроме того, изготовление устройства обращения матрицы для реализации предложенного алгоритма не представляет особых затруднений, поскольку в операциях матричного умножения используются типовые цифровые блоки, выполняющие операции умножения, сложения и вычитания.

Блоки хранения коэффициентов матрицы могут быть выполнены на основе адресного запоминающего устройства, включающего блок памяти, дешифраторы и формирователи с регистром адреса, формирователи записи и усилители считывания с подключенным к ним регистром числа, а также блок синхронизации (управления).

Таким образом, устройство обращения ковариационной матрицы помеховых сигналов с учетом ее эрмитовых свойств позволяет за счет уменьшения числа вычислительных модулей упростить схему по сравнению с предложенной в [17]. Кроме того, с учетом сокращения требуемых для обращения операций можно повысить быстродействие работы устройства.

Заключение. В цифровых адаптивных процессорах радиоэлектронных средств при определении направления прихода сигнала широко применяются алгоритмы обращения корреляционной матрицы помеховых сигналов на основе учета ее свойств. Это определяет актуальность разработки подобных алгоритмов. При большом количестве сигналов, обусловленном плотным размещением средств радиосвязи в городских условиях, известные алгоритмы не обеспечивают вычисление пеленга в реальном режиме времени. Отличием предложенного алгоритма обращения является учет эрмитовых свойств ковариационной матрицы помеховых сигналов, позволивший почти на 25 % сократить объем вычислений. В результате устройство, реализующее операцию обращения корреляционной матрицы помех в цифровом вычислительном процессоре, будет более компактным по сравнению с известными, а также обеспечит более высокую скорость вычисления пеленга сигнала.

Библиографический список

1. «Мегафон» — лидер по числу базовых станций в России [Электронный ресурс] // Портал о современных технологиях беспроводной связи. — Режим доступа: http://1234g.ru/novosti/110-megafon-lider-po-kolichestvu-bazovykh-stantsij-v-rossii (дата обращения 29.01.15).

2. Ратынский, М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. — Москва : Радио и связь, 2003. — 200 с.

3. Potentially Achievable Characteristics Analysis for Superresolution Techniques / D. D. Gabriel'yan [et al] // Journal of Electrical and Control Engineering. — 2013. — Vol. 3, № 4. — С. 17–20.

4. Jonson, D. H. Comparison of superresolution algorithm for radio direction finding / D. H. Jonson, G. E. Miner // IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst. — 1986. — Vol. 22, № 4. — P. 432–441.

5. Бартенев, В. Г. Квазиоптимальные адаптивные алгоритмы обнаружения сигналов / В. Г. Бартенев // Современная радиоэлектроника. — 2011. — № 2. — С. 70–73.

6. Волков, С. С. Аналитическое решение контактной задачи о внедрении сферического индентора в мягкий упругий слой / С. С. Волков // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2012. — Т. 12, № 7 (68). — С. 5–10.

7. С. А. Золотых. Об описании предельного спектра ленточных Тёплицевых матриц / С. А. Золотых, В. А. Стукопин // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2012. — Т. 12, № 8 (69). — С. 5–11.

8. Spatial Polarization Signal Processing in Circular Polarization Antenna / D. D. Gabriel'yan [et al.] // Progress in Electromagnetics Research Symposium Proceedings. Moscow, August 18–21, 2009. — Cambridge, MA : The Electromagnetics Academy, 2009. — P. 1259–1262.

9. Нахождение весовых коэффициентов в комбинированном методе пространственной селекции сигналов : св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2009613223 от 19.06.09 / И. В. Вахненко, Д. Д. Габриэльян, М. Ю. Звездина.

10. Soleymani, F. A Rapid Numerical Algorithm to Compute Matrix Inversion [Электронный ресурс] / F. Soleymani // International Journal of Mathematics and Sciences. — 2012. — Vol. 2012. — Режим доступа : http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2012/134653 (дата обращения: 16.01.15).

11. Li, W. A family of iterative methods for computing the approximate inverse of a square matrix and inner inverse of a non-square matrix / W. Li, Z. Li // Applied Mathematics and Computation. — 2010. — Vol. 215, № 9. — P. 3433–3442.

12. Kohno, K. A Matrix Pseudo-Inversion Lemma for Positive Semidefinite Hermitian Matrices and Its Application to Adaptive Blind Deconvolution of MIMO Systems / K. Kohno, Y. Inouye, M. Kawamoto // Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions. — 2008. — Vol. 55, № 1. — P. 424–435.

13. Sohana, J. Operation Properties of Adjoint Matrix of Hermitian Block Matrices [Электронный ресурс] / J. Sohana, A. Imtiaz // International Journal of Basic & Applied Sciences. — 2010. — Vol. 10, № 2. — P. 58–65. — Режим доступа : http://www.ijens.org/108102-6767%20IJBAS-IJENS.pdf (дата обращения 16.01.15).

14. Zhongyun, L. On the Eigenstructure of Hermitian Toeplitz Matrices with Prescribed Eigenpairs / L. Zhongyun, L. Jing, Z. Yulin // Operations Research And Its Applications : The Eighth International Symposium, ISORA'09 Zhangjiajie, China, September 20–22, 2009 Proceedings. — P. 298–305.

15. Применение метода окаймления для решения задачи дифракции на круговом металлическом цилиндре с покрытием / М. Ю. Звездина [и др.] // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2011. — Т. 16, № 5. — С. 15–17.

16. Звездина, М. Ю. Получение аналитического решения задачи дифракции на круговом металлическом цилиндре с покрытием на основе метода окаймления / М. Ю. Звездина // Сб. тр. МНТК «ИРЭМВ-2011». Таганрог — Дивноморское, Россия, 27 июня — 1 июля 2011 года. — Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. — С. 227–230.

17. Устройство для обращения матриц : а. с. SU 1819020 СССР, A1, 6G06F 17/16 / П. И. Соболевский [и др.]. — Опубл. 09.06.95, Бюл. № 16. — 14 с.

18. Адаптивная антенная решетка : патент RU 2466482 [Электронный ресурс] / Д. Д. Габриэльян [и др.]. — Режим доступа: http://www.findpatent.ru/patent/246/2466482.html (дата обращения 08.02.15).

19. Гантмахер, Ф.-Р. Теория матриц / Ф.-Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1988. — 552 с.

20. Fast Matrix Multiplication and Inversion [Электронный ресурс] / Lehigh University. — Режим доступа : http://www.lehigh.edu/~gi02/m242/08linstras.pdf (дата обращения: 25.01.15).

References

1. "Megafon" — lider po chislu bazovikh stantsiy v Rossii ["Megafon" is a leader in base station number in Russia]: Available at: http://1234g.ru/novosti/110-megafon-lider-po-kolichestvu-bazovykh-stantsij-v-rossii; (accessed: 29.01.2015) (in Russian)

2. Ratynskiy, M.V. Adaptatsiya i sverkhrazreshenie v antennykh reshetkakh. [Adaptation and superresolution in antenna arrays.] Moscow: Radio i svyaz', 2003 (in Russian).

3. Gabriel'yan, D.D., Zvezdina, M.Yu., Shokov, A.V., Ogayan, P.S. Potentially Achievable Characteristics Analysis for Superresolution Techniques. Journal of Electrical and Control Engineering. JECE, 2013, vol. 3, no. 4, pp.17-20.

4. Jonson, D.H., Miner, G.E. Comparison of superresolution algorithm for radio direction finding. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1986, vol. 22, no. 4, pp. 432–441.

5. Bartenev, V. Kvazioptimal'nye adaptivnye algoritmy obnaruzheniya signalov. [Quasioptimal adaptive algorithms of signal detection.] Sovremennaya radioelektronika, 2011, no. 2, pp. 70–73 (in Russian).

6. Volkov, S.S. Analiticheskoe reshenie kontaktnoy zadachi o vnedrenii sfericheskogo indentora v myagkiy uprugiy sloy. [Analytical solution to contact problem on spherical indenter penetration into soft elastic layer.] Vestnik of DSTU, 2012, no. 7(68), pp. 5–10 (in Russian).

7. Zolotykh, S.A., Stukopin, V.A. Ob opisanii predel'nogo spectra lentochnykh tyeplitsevykh matrits. [On formulation of limitary spectrum of banded Toeplitz matrices.] Vestnik of DSTU, 2012, no. 8 (69), pp. 5–11 (in Russian).

8. Gabriel'yan, D.D., Zvezdina, M.Yu., Bezuglov, E.D., Zvezdina, Yu.A., Sil'nitsky, S.A. Spatial Polarization Signal Processing in Circular Polarization Antenna. PIERS Draft Proc. Moscow, Russia, August 18-21, 2009. The Electromagnetics Academy, Cambridge, MA, 2009, pp. 1259–1262.

9. Vakhnenko, I.V., Gabriel'yan, D.D., Zvezdina, M.Yu. Nakhozhdenie vesovykh koeffitsientov v kombinirovannom metode prostranstvennoy selektsii signalov. [Finding weight coefficients for combined method of spatial signal selection.] State registration certificate for PC program no. 2009613223, 19.06.09.

10. Soleymani, F. A Rapid Numerical Algorithm to Compute Matrix Inversion. Int. Journal of Mathematics and Sciences, vol. 2012: Available at: http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2012/134653.

11. Li, W., Li, Z. A family of iterative methods for computing the approximate inverse of a square matrix and inner inverse of a non-square matrix. Applied Mathematics and Computation, 2010, vol. 215, no. 9, pp. 3433–3442.

12. Kohno, K., Inouye, Y., Kawamoto, M. A Matrix Pseudo-Inversion Lemma for Positive Semidefinite Hermitian Matrices and Its Application to Adaptive Blind Deconvolution of MIMO Systems. IEEE Trans. On Circuits and Systems J., 2008, no. 2, pp. 424–435.

13. Sohana, J., Imtiaz, A. Operation Properties of Adjoint Matrix of Hermitian Block Matrices. Int. Journal of Basic & Applied Sciences, 2010, vol.10, no. 2, pp.58-65: Available at: http://www.ijens.org/ 108102-6767%20IJBAS-IJENS.pdf

14. Zhongyun, L., Jing, L., Yulin, Z. On the Eigenstructure of Hermitian Toeplitz Matrices with Prescribed Eigenpairs. The 8th Int. Symp. On Operations and Its Applicat. (ISORA'09). Zhangjijie, China, Sept. 20-23, 2009, pp. 298–305.

15. Zvezdina, M.Yu., Zvezdina, Yu.A., Zabelkin, S.N., Podzorov, A.V., Samodelov, A.N. Primenenie metoda okaymleniya dlya resheniya zadachi diffraktsii na krugovom metallicheskom tsilindre s pokrytiem. [Bordering method for diffraction problem on coated circular metallic cylinder.] Electromagnetic Waves and Electronic Systems, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 15–17 (in Russian).

16. Zvezdina, M.Yu. Poluchenie analiticheskogo resheniya zadachi diffraktsii na krugovom metallicheskom tsilindre s pokrytiem na osnove metoda okaymleniya. [Obtaining analytic solution for diffraction on coated circular metallic cylinder with bordering method.] Proc. Int.Sci.-Tech.Conf. "IREMV-2011". Taganrog-Divnomorskoe, Russia, 2011, June 27 — July 1. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2011, pp. 227–230 (in Russian).

17. Sobolevskiy, P.I., Likhoded, N.A., Kos'yanchuk, V.V., Yakush, V.P. Ustroystvo dlya obrascheniya matrits. [Matrix inversion device.] Patent USSR, RU 1819020. G06F17/16, 1995 (in Russian).

18. Gabriel'yan, D.D., Novikov, A.N., Shatskiy, V.V., Shatskiy, N.V. Adaptivnaya antennaya reshetka. [Adaptive antenna array.] Patent RF, RU 2466482. Class H 01 Q 3 / 26, H 01 Q 21 / 00, 2012 (in Russian).

19. Gantmaher, F.-R. Teoriya matrits. [Matrix theory.] Moscow: Nauka, 1988, 552 p. (in Russian).

20. Fast Matrix Multiplication and Inversion: Available at: http://www.lehigh.edu/~gi02/m242/08linstras.pdf; (accessed: 25.01.15).

Поступила в редакцию 29.01.2015
Сдана в редакцию 30.01.2015
Запланирована в номер 10.04.2015