МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 534.1:629.7
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29

Научная статья

О неоднозначности механической мощности

В. Д. Павлов
Владимирский электромеханический завод (Владимир, Российская Федерация)
pavlov.val.75@mail.ru

Введение. Механические колебания широко распространены в технологических процессах. Приводы машин и механизмов преимущественно электромеханические, поэтому механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети, ухудшая качество электроэнергии. Этим обусловлены важность учета механической реактивной мощности и, как следствие, актуальность представленной работы. Цель исследования — детализация видов механической мощности при гармонических колебаниях.

Материалы и методы. Изучена литература, в которой освещаются вопросы динамики, кинематики, вибраций, преобразования движения в колебательных системах и т. п. Используются теоретические, преимущественно математические методы исследования.

Результаты исследования. Математически осмыслены мощности, развиваемые при упругих деформациях, вынужденных гармонических колебаниях инертного тела и колебаниях, связанных с гравитационным воздействием, а также реактивная, активная, полная мощности в комплексном представлении и механические мощности в векторном представлении.

Обсуждение и заключения. При механических гармонических колебаниях наряду со знакоположительной тепловой мощностью, развиваются знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий. Полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора. Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях обобщает соответствующие понятия о мощностях из электротехники, и таким образом проявляется электромеханический дуализм.

Ключевые слова: механическая мощность, кинетическая энергия, потенциальная энергия, комплексное представление, векторное представление.

***Для цитирования*:** Павлов, В. Д. О неоднозначности механической мощности / В. Д. Павлов // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 24–29. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29

Original article

On the ambiguity of mechanical power

Valentin D. Pavlov
Vladimir Electromechanical Plant (Vladimir, Russian Federation)
pavlov.val.75@mail.ru

Introduction. Mechanical vibrations are widespread in the production processes. The drives of machines and mechanisms are mainly electromechanical, so mechanical reactive power is transformed into electrical reactive power of the network, impairing the quality of electricity. This explains the significance of considering the mechanical reactive power, and, as a consequence, the urgency of the presented study. The research objective is to detail the types of mechanical power under harmonic vibrations.

Materials and Methods. The literature on the issues of dynamics, kinematics, vibrations, transformation of motion in oscillatory systems, etc., has been studied. Theoretical, mainly mathematical methods of research are used.

Results. The powers developed under elastic deformations, forced harmonic vibrations of an inert body, and vibrations associated with gravitational influence, as well as reactive, active, full powers in the complex formulation, and mechanical powers in the vector representation are mathematically interpreted.

Discussion and Conclusions. Under the mechanical harmonic vibrations, along with the sign-positive thermal power, sign-variable reactive powers develop, characterizing the reversibility of kinetic and potential energies. The total mechanical power satisfies the Pythagorean formula. The concept of mechanical reactive, active, and total powers generalizes the corresponding concepts of power from electrical engineering, and thus manifesting electromechanical dualism.

Keywords: mechanical power, kinetic energy, potential energy, complex formulation, vector representation.

For citation: Pavlov V. D. On the ambiguity of mechanical power. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 24–29. (In Russ). https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29

Введение. Механическая энергия бывает обратимой (потенциальная и кинетическая), а также необратимой (например, тепловая при трении). Временную производную от последней принимают за механическую мощность. Отметим, что в силу необратимости тепловой энергии ее производная принимает только положительные значения. Вместе с тем производные получают как от потенциальной, так и от кинетической энергии. Особый интерес представляют гармонические колебания [1–4], при которых производные (мгновенные мощности) будут знакопеременными функциями, что принципиально отличает их от тепловой мощности.

Аналог кинетической энергии в электротехнике — энергия магнитного поля катушки индуктивности, аналог потенциальной энергии — энергия электрического поля конденсатора, а аналог механической тепловой энергии — тепловая же энергия, рассеиваемая резистором.

Механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [5–8]. Приводы машин и механизмов преимущественно электромеханические [9–12], поэтому механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети, ухудшая качество электроэнергии [13]. В этой связи учет механической реактивной мощности имеет немаловажное значение [14], и этим обусловлена актуальность представленной работы.

Материалы и методы. Рассмотрены механические мощности при гармонических колебаниях. В качестве литературной базы изучены отечественные и зарубежные источники, в которых освещаются вопросы динамики, кинематики, вибраций, преобразования движения в колебательных системах и т. п. Используются теоретические (преимущественно математические) методы исследования.

Результаты исследования

Мощность, развиваемая при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела. Движение тела описывается известным выражением:

$$x = l\sin\omega t\ .$$

Соответственно, скорость:

$$v = \dot{x} = l\omega\cos\omega t = V_m\cos\omega t.$$

Для гармонической величины действующее значение меньше амплитудного в $\sqrt{2}$:

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Формула для силы имеет вид:

$$f_a = m\ddot{x} = -lm\omega^2\sin\omega t. \tag{2}$$

Формула для силы трения:

$$f_\mu = \mu\dot{x} = \mu l\omega\cos\omega t\ . \tag{3}$$

Результирующая сила:

$$f = f_a + f_\mu = -lm\omega^2\sin\omega t + \mu l\omega\cos\omega t =$$

$$= l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\cos\omega t - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\sin\omega t\right).$$

Обозначим:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m\omega}{\mu}. \tag{4}$$

С учетом этого:

Механика

$$f = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t\right) = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi).$$

Очевидно, что

$$F_m = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Мгновенная результирующая мощность:

$$\begin{aligned} s = fv &= l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi) l\omega\cos\omega t = \\ &= 0{,}5 l^2\omega^2\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right] = \\ &= FV\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right] = \\ &= FV\left(\cos\varphi + \cos 2\omega t\cos\varphi - \sin 2\omega t\sin\varphi\right) = \\ &= FV\cos\varphi\left(1 + \cos 2\omega t\right) - FV\sin\varphi\sin 2\omega t = p + q_i. \end{aligned} \quad (6)$$

В электротехнике есть выражение, аналогичное (6), с заменами $F \to U$ $V \to I$. Из него определяют активную мощность:

$$P = UI\cos\varphi.$$

Поэтому активную (тепловую) механическую мощность тоже следует определить, как:

$$P = FV\cos\varphi. \quad (7)$$

Очевидно, что гармонические сила и скорость совершают колебания со сдвигом фаз, равным φ.

Из вышеназванной формулы электротехники определяют реактивную мощность:

$$P = UI\sin\varphi.$$

Поэтому реактивную (инерционную) механическую мощность тоже следует определить, как:

$$Q_i = FV\sin\varphi. \quad (8)$$

Из (6) следует, что под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной — амплитудное значение. В электротехнике аналогично.

Еще одно обобщение из электротехники — полная механическая мощность:

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \quad (9)$$

Она примечательна тем, что, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой — равна произведению действующих значений гармонических величин.

Имея в виду (1), (5) и (8),

$$Q_i = FV\sin\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{ml^2\omega^3}{2}. \quad (10)$$

При этом:

$$f_a v = -lm\omega^2\sin\omega t\, l\omega\cos\omega t = -0{,}5 l^2 m\omega^3\sin 2\omega t = -F_a V\sin 2\omega t = -Q_i\sin 2\omega t. \quad (11)$$

Это соответствует выражениям (6) и (10).

Имея в виду (1), (5) и (7),

$$P = FV\cos\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}. \quad (12)$$

При этом:

$$f_\mu v = \mu l\omega\cos\omega t\, l\omega\cos\omega t = 0{,}5\mu l^2\omega^2(1 + \cos 2\omega t) = F_\mu V(1 + \cos 2\omega t) = P(1 + \cos 2\omega t). \quad (13)$$

Это соответствует выражениям (6) и (12).

Имея в виду (9), (10) и (12),

$$S = FV = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}} = \frac{l^2\omega^2\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{2}.$$

Мощность, развиваемая при упругих деформациях. Выражение для силы имеет вид:

$$f_k = kx = kl\sin\omega t. \quad (14)$$

С учетом (3) результирующая сила равна:

$$f = f_k + f_\mu = kl\sin\omega t + \mu l\omega\cos\omega t =$$

$$= l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}\sin\omega t + \frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}\cos\omega t\right).$$

Обозначим:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k}{\mu\omega}.$$

Значит,

$$f = l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}\left(\sin\varphi\sin\omega t + \cos\varphi\cos\omega t\right) = l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Очевидно, что:

$$F_m = l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы равно:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \qquad (15)$$

Мгновенная результирующая мощность:

$$s = fv = l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t-\varphi\right)l\omega\cos\omega t =$$

$$= 0,5l^2\omega\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}\left[\cos\varphi + \cos\left(2\omega t - \varphi\right)\right] =$$

$$= FV\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t-\varphi)\right] =$$

$$= FV\left(\cos\varphi + \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t\sin\varphi\right) =$$

$$= FV\cos\varphi\left(1+\cos 2\omega t\right) + FV\sin\varphi\sin 2\omega t = p + q_d. \qquad (16)$$

Имея в виду (6), (7) и (12), активная механическая мощность равна:

$$P = FV\cos\varphi = \frac{l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}.$$

Принимая во внимание (15), (1), (8) и (16), механическая реактивная (упругая) мощность равна:

$$Q_d = FV\sin\varphi = \frac{l\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{k}{\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}} = \frac{kl^2\omega}{2}. \qquad (17)$$

При этом:

$$f_k v = kl\sin\omega t\, l\omega\cos\omega t = 0,5kl^2\omega\sin 2\omega t = F_k V\sin 2\omega t = Q_d\sin 2\omega t. \qquad (18)$$

Это соответствует выражениям (16) и (17).

Очевидно, что полная мощность равна:

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2\omega\sqrt{k^2+\mu^2\omega^2}}{2}.$$

Мощность при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием. При отклонении подвешенного груза на угол α возникает момент:

$$M = mgL\alpha.$$

Пусть

$$\alpha = \alpha_0\sin\omega t.$$

Тогда

$$\dot\alpha = \alpha_0\omega\cos\omega t = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t.$$

Мгновенная мощность имеет вид:

$$q_g = M\dot\alpha = mgL\alpha_0\sin\omega t\,\alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t = 0,5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}\sin 2\omega t.$$

Ее амплитуда и, соответственно, реактивная мощность гравитационного воздействия определяется, как:

$$Q_g = 0,5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}.$$

Реактивная, активная и полная мощности в комплексном представлении. В [15] показано, что при инертной нагрузке:

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

Мгновенная скорость при этом равна:

$$v = V_m \cos\omega t = \mathrm{Im}\,\dot{V}_m.$$

Формулы для действующих значений величин принципиально не отличаются:

$$\dot{V} = Ve^{j\pi/2}, \quad \dot{F} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}.$$

В электротехнике подробно описана особенность комплексного представления: при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть сопряженным.

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2+\varphi-\pi/2)} = FVe^{j\varphi} = FV\cos\varphi + jFV\sin\varphi = P + jQ_i.$$

Это выражение для инертной нагрузки. Упругая нагрузка отличается тем, что реактивная мощность имеет противоположный знак:

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2-\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2-\varphi-\pi/2)} = FVe^{-j\varphi} = FV\cos\varphi - jFV\sin\varphi = P + jQ_d.$$

При этом:

$$P = \mathrm{Re}\,\dot{F}\overset{*}{V}, \quad Q = \mathrm{Im}\,\dot{F}\overset{*}{V}.$$

Механические мощности в векторном представлении. В основе комплексного представления лежит идея вращающихся в комплексной плоскости векторов. Тот же принцип может быть реализован в трехмерном Декартовом базисе.

Из (7)–(9) следует:

$$P = (F,V), \quad Q = \left|[F,V]\right|, \quad S^2 = (F,V)^2 + [F,V]^2.$$

Математическая абстракция с проекциями вращающихся векторов имеет конкретную материальную основу в виде кривошипно-кулисных механизмов.

Обсуждение и заключения. Математическими методами исследованы мощности:

— при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела,

— при упругих деформациях,

— при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием,

— реактивная, активная и полная (в комплексном представлении),

— механическая (в векторном представлении).

Показано, что при механических гармонических колебаниях развивается не только знакоположительная тепловая мощность, но и знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий.

При этом полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора.

Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях является обобщением соответствующих понятий о мощностях из электротехники, и таким образом проявляется электромеханический дуализм.

Библиографический список

1. Елисеев, С. В. Динамическое гашение колебаний при введении дополнительных связей и внешних воздействий / С. В. Елисеев, А. С. Миронов, К. Ч. Выонг // Вестник Донского государственного технического университета. — 2019. — Т. 19, № 1. — С. 38–44. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-38-44

2. Елисеев, С. В. Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы / С. В. Елисеев, А. И. Орленко, Д. Х. Нгуен // Вестник Донского государственного технического университета. — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 46–59. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-3-46-59

3. Zhang, Y. F. Analysis on nonlinear vibrations near internal resonances of a composite laminated piezoelectric rectangular plate / Y. F. Zhang, W. Zhang, Z. G. Yao // Engineering Structures. — 2018. — Vol. 173. — P. 89–106. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.04.100

4. Beltran-Carbajal, F. Multi-frequency harmonic vibration suppression on mass-spring-damper systems using active vibration absorbers / F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, B. Vazquez-Gonzalez // Advances in Vibration Engineering. — 2016. — Vol. 4. — P. 1–12.

5. Numerical Modeling and Dynamic Characteristics Study of Coupling Vibration of Multistage Face Gearsplanetary Transmission / Xingbin Chen, Qingchun Hu, Zhongyang Xu, Chune Zhu // Mechanical Sciences. — 2019. — Vol. 10. — P. 475–495. https://doi.org/10.5194/ms-10-475-2019

6. Duygu Dönmez Demir. Variational Iteration Method for Transverse Vibrations of the Elastic, Tensioned Beam / Duygu Dönmez Demir, Erthan Koca // International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing. — 2017. — Vol. 5. — P. 187–190. https://doi.org/10.18178/ijmmm.2017.5.3.315

7. Zichen Zhang. Design and Optimization of Comb Drive Accelerator for High Frequency Oscillation / Zichen Zhang // Modern Mechanical Engineering. — 2018. — Vol. 8. — P. 1–10. https://doi.org/10.4236/mme.2018.81001

8. Birgersson, F. A Spectral Super Element for Modelling of Plate Vibration. Part 1: General Theory / F. Birgersson, S. Finnveden, C.-M. Nilsson // Sound and Vibration. — 2005. — Vol. 287. — P. 297–314. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.11.012

9. A pneumatic actuator based on vibration friction reduction with bending/longitudinal vibration mode / Han Gao, Michaël De Volder, Tinghai Cheng [et al.] // Sensors and Actuators A: Physical. — 2016. — Vol. 252. — P. 112–119. https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.10.039

10. Study on machining vibration suppression with multiple tuned mass dampers: vibration control for long fin machining / Ippei Kono, T. Miyamoto, K. Utsumi [et al.] // International Journal of Automation Technology. — 2017. — Vol. 11. — P. 206–214. https://doi.org/10.20965/ijat.2017.p0206

11. Kunugi, K. Modeling of tape tether vibration and vibration sensing using smart film sensors / K. Kunugi, H. Kojima, P. M. Trivailo // Acta Astronautica. — 2015. — Vol. 107. — P. 97–111. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.024

12. Legeza, V. P. Dynamics of vibration isolation system with a ball vibration absorber / V. P. Legeza // International Applied Mechanics. — 2018. — Vol. 54. — P. 584–593. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0912-0

13. Павлов, В. Д. Автокомпенсация реактивной мощности в электрических сетях / В. Д. Павлов // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. — 2021. — № 14 (6). — С. 684–688. https://doi.org/10.17516/1999–494X-0342

14. Joachim, F. J. How to minimize power losses in transmissions, axles and steerings / F. J. Joachim, J. Börner, N. Kurz // Gear Technology. — 2012. — P. 58–66. https://doi.org/10.1007/978-3-642-22647-2_279

15. Павлов, В. Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов / В. Д. Павлов // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. — 2021. — № 1 (49). — С. 17–27. https://doi.org/10.20291/2079-0392-2021-1-17-27

Поступила в редакцию 21.01.2022
Поступила после рецензирования 16.02.2022
Принята к публикации 20.02.2022

Об авторе:

Павлов Валентин Дмитриевич, начальник научно-информационного отдела Владимирского электромеханического завода (600901, РФ, г. Владимир, ул. Ноябрьская, 127), кандидат технических наук, ORCID, pavlov.val.75@mail.ru.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.