

МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 536.21; 517.958

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242>**Аналитическое решение уравнений Навье – Стокса для описания неоднородного течения Куэтта с квадратичным профилем в слое с проницаемыми границами**

EDN: ZWPWMM

К.В. Губарева¹  , Е.Ю. Просвирыков^{2,3} , А.В. Еремин¹ ¹ Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация² Уральский федеральный университет имени первого

Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация

³ Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация r.kristina2017@mail.ru**Аннотация**

Введение. Управление структурой потока в микрофлюидных системах, мембранных технологиях и пористых подшипниках требует понимания синергии проницаемости границ, их пространственной неоднородности и вязкости рабочей жидкости. Отдельно каждый из этих факторов активно изучается. Однако необходимо комплексное аналитическое описание их совместного влияния на поток. Таких публикаций нет. Представленная статья восполняет этот пробел. Цели работы: получение аналитического решения для поля скорости в течении Куэтта с проницаемыми границами и нелинейным граничным условием; изучение формирования гидродинамики под влиянием проницаемости (α), динамической вязкости (μ), линейной (A) и квадратичной (B) неоднородности граничного условия.

Материалы и методы. Аналитическое решение базируется на стационарных уравнениях Навье – Стокса для несжимаемой ньютоновской жидкости с квадратичным разложением скорости по поперечной координате. Осевую, линейную и квадратичную моды профиля скорости исследовали методом численного моделирования в Matlab. Для стационарного, ламинарного, изотермического течения ньютоновской вязкой и несжимаемой жидкости расстояние между проницаемыми пластинами $h = 1$ м. Нижняя пластина неподвижна, верхняя движется со скоростью $W = 0,3$ м/с. Скорость фильтрации жидкости $V_w = 0,001$ м/с, $\mu = 0,01$ Па·с для $A = \pm 0,03$ с⁻¹ и $B = \pm 0,005$ м⁻¹·с⁻¹. Воду, моторное масло и нефть исследовали при 20 °С, 40 °С или 60 °С. В этом случае $h = 0,02$ м, $W = 0,05$ м/с, $A = 0,1$ с⁻¹, $B = 0,02$ м⁻¹·с⁻¹, $V_w = 0,0005$ м/с. В зависимости от жидкости и температуры μ — от 0,05 до $9,15 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

Результаты исследования. Визуализированы асимметрия течения, отклонение от оси канала, вариативность амплитуды завихренности ω_y . Нулевая скорость фильтрации отмечается для нижней пластины в плоскости $z = 0$ и растет с увеличением этого показателя до максимума при $z = h$ (расстояние между пластинами). Для воды линии тока минимально отклоняются от горизонтали, а для масла при 20 °С — искривляются вблизи верхней стенки. Сопоставляются двумерные поля завихренности для воды, масла и нефти при различных температурах. Слабая ω_y и снижение вязкости обусловили отрицательные показатели ω_y для воды и нефти. Для масла ситуация противоположная: положительные показатели при повышенной ω_y .

Обсуждение. Итоги расчетов позволяют утверждать:

- при изменении знака A инвертируются направления смещения максимумов скорости и завихренности;
- знак B определяет кривизну изолиний;
- толщина слоя с максимальным градиентом скорости меняется на два порядка при переходе от воды к маслу.

Выявленные закономерности объясняются физическим смыслом параметров: A задает макроскопическую асимметрию течения, B управляет распределением поперечного потока, а вязкость через α контролирует глубину граничных возмущений.

Заключение. Впервые было получено точное аналитическое решение стационарных уравнений Навье – Стокса для обобщённого течения Куэтта ньютоновской жидкости между проницаемыми пластинами с квадратичным профилем скорости на границе. Параметрический анализ показал, что коэффициент A определяет асимметрию полей скорости и завихренности, а B — их нелинейность. Вязкость контролирует толщину сдвигового слоя: для высоковязких сред перепад скорости локализуется у стенок, для маловязких — профиль линейный. Результаты создают основу для задач микрофлюидики, мембранных технологий и трибологии. Перспективы связаны с учётом неньютоновских свойств жидкости, нестационарных режимов и устойчивости течений.

Ключевые слова: ограниченность модели Куэтта, гидродинамическая структура течения, профиль скорости течения, скорость фильтрации жидкости, амплитуда завихренности, динамическая вязкость

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакционной коллегии журнала и рецензенту за профессиональный анализ статьи и рекомендации для ее корректировки.

Для цитирования. Губарева К.В., Просвиряков Е.Ю., Еремин А.В. Аналитическое решение уравнений Навье – Стокса для описания неоднородного течения Куэтта с квадратичным профилем в слое с проницаемыми границами. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026;26(1):2242. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242>

Original Theoretical Research

Analytical Solution of the Navier–Stokes Equations for Describing Inhomogeneous Couette Flow with a Quadratic Velocity Profile in a Layer with Permeable Boundaries

Kristina V. Gubareva¹  , Evgenii Yu. Prosviryakov^{2,3} , Anton V. Eremin¹ 

¹ Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

² Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

³ Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Ekaterinburg, Russian Federation

 r.kristina2017@mail.ru

Abstract

Introduction. Flow control in microfluidic systems, membrane technologies, and porous bearings requires an understanding of the synergy between boundary permeability, their spatial inhomogeneity, and the viscosity of the working fluid. Each of these factors is actively studied separately. However, a comprehensive analytical description of their combined effect on the flow is needed. No such publications exist. The presented article fills this gap. Research objectives are as follows: to obtain an analytical solution for the velocity field in Couette flow with permeable boundaries and a nonlinear boundary condition; to study the formation of hydrodynamics under the influence of permeability (α), dynamic viscosity (μ), linear (A) and quadratic (B) inhomogeneity of the boundary condition.

Materials and Methods. The analytical solution is based on the stationary Navier–Stokes equations for an incompressible Newtonian fluid, with a quadratic expansion of velocity along the transverse coordinate. The axial, linear, and quadratic modes of the velocity profile were investigated using numerical modeling in MATLAB. For a stationary, laminar, isothermal flow of a Newtonian viscous incompressible fluid, the distance between permeable plates was $h = 1$ m. The lower plate was stationary, while the upper plate moved with a velocity of $W = 0.3$ m/s. The liquid filtration rate was $V_w = 0.001$ m/s, and $\mu = 0.01$ Pa·s for $A = \pm 0.03$ s⁻¹ and $B = \pm 0.005$ m⁻¹·s⁻¹. Water, motor oil, and crude oil were studied at temperatures of 20 °C, 40 °C, or 60 °C. For this case, $h = 0.02$ m, $W = 0.05$ m/s, $A = 0.1$ s⁻¹, $B = 0.02$ m⁻¹·s⁻¹, $V_w = 0.0005$ m/s. Depending on the fluid and temperature, μ ranged from 0.05 to $9.15 \cdot 10^{-3}$ Pa·s.

Results. Asymmetry of the flow, deviation from the channel axis, and variability of the vorticity amplitude ω_y were visualized. Zero filtration velocity was observed at the lower plate in the plane $z = 0$ and increased with this parameter, reaching a maximum at $z = h$ (distance between the plates). For water, the streamlines exhibited minimal deviation from the horizontal, while for oil at 20 °C, they curved near the upper wall. Two-dimensional vorticity fields for water, oil, and petroleum at various temperatures were compared. Weak ω_y and reduced viscosity resulted in negative values ω_y for water and petroleum. For oil, the situation was reversed: positive values corresponded to elevated ω_y .

Discussion. The calculation results allow us to conclude:

- changing the sign of A inverts the directions of the maxima for velocity and vorticity;
- the sign of B determines the curvature of the isolines;
- the thickness of the layer with the maximum velocity gradient changes by two orders of magnitude when transitioning from water to oil.

The identified patterns are explained by the physical meaning of the parameters: A defines the macroscopic flow asymmetry, B governs the distribution of the transverse flow, and viscosity, through α , controls the depth of boundary perturbations.

Conclusion. For the first time, an exact analytical solution to the stationary Navier–Stokes equations was obtained for generalized Couette flow of a Newtonian fluid between permeable plates with a quadratic velocity profile at the boundary. A parametric analysis has shown that coefficient A determines the asymmetry of the velocity and vorticity fields, while B determines their nonlinearity. Viscosity controls the thickness of the shear layer: for high-viscosity media, the velocity drop is localized near the walls, while for low-viscosity media, the profile is linear. The results provide a foundation for applications in microfluidics, membrane technologies, and tribology. Future prospects are associated with accounting for non-Newtonian fluid properties, unsteady regimes, and flow stability.

Keywords: limitations of the Couette model, hydrodynamic structure of the flow, flow velocity profile, fluid filtration rate, vorticity amplitude, dynamic viscosity

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board of the journal and the reviewers for their professional analysis of the article and valuable recommendations for its improvement.

For Citation. Gubareva KV, Prosviryakov EYu, Eremin AV. Analytical Solution of the Navier–Stokes Equations for Describing Inhomogeneous Couette Flow with a Quadratic Velocity Profile in a Layer with Permeable Boundaries. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026;26(1):2242. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242>

Введение. Точное управление структурой течения в тонких слоях критически важно для современных технологий — от микрофлюидных устройств до систем смазки. Однако в подобных случаях некоторые классические гидродинамические модели не позволяют учесть комплекс технологических параметров: широкий диапазон вязкостей рабочих жидкостей, проницаемость стенок, а также их пространственную неоднородность (шероховатость, распределенные источники) [1]. Пример такой «недостаточной» модели — течение Куэтта между непроницаемыми пластинами [2]. Представленное исследование актуально в плане развития перечисленных ниже прикладных направлений.

1. *Биомедицинская микрофлюидика и так называемые лаборатории на чипе.* Эффективное смешение реагентов или адресная доставка клеток предполагают, во-первых, инъекцию жидкости через пористые мембраны ($V_w \neq 0$). Во-вторых, необходимы неоднородные сдвиговые течения, формируемые за счет микрорельефа стенок (что моделируется граничными коэффициентами A и B) [3].

2. *Энергоэффективные мембранные технологии (опреснение, разделение газов).* В этой сфере производительность определяется взаимодействием продольного потока и поперечной фильтрации через проницаемую стенку, а также вязкостными свойствами разделяемой среды [4].

3. *Трибология пористых и текстурированных подшипников.* Распределение давления, трение и износ напрямую зависят от течения смазочного материала в микроскопическом зазоре со сложным рельефом (A , B) и возможной фильтрацией (V_w) через пористый вкладыш [5].

Анализ литературы позволил систематизировать подходы к описанию указанных факторов и выявил существенный пробел. И для модельных [6], и для прикладных задач [7] детально исследовались эффекты проницаемости границ, определяющие нелинейные (экспоненциальные) профили скорости. Хорошо описано влияние сложных (в том числе полиномиальных) граничных условий на непроницаемых стенках, что связано с задачами устойчивости, тепломассопереноса и моделирования шероховатости [8]. Глубоко изучено влияние реологических свойств, включая широкий диапазон вязкостей реальных жидкостей [9]. Для решения сопряженных задач активно применяются современные численные [10] и аналитические методы [11]. Однако перечисленные выше факторы традиционно изучались вне системного подхода. Аналитические решения либо описывают проницаемость при однородных граничных условиях [12], либо учитывают нелинейность границ только для непроницаемых стенок [13]. Таким образом, в литературе не представлено комплексное аналитическое решение, которое в явном виде объединяет ключевые безразмерные параметры:

- динамическую вязкость (μ);
- проницаемость ($\alpha = \rho V_w / \mu$);
- линейную (A) и квадратичную (B) поправки к граничному профилю скорости.

Именно этот пробел препятствует прямому параметрическому анализу синергетического влияния указанных факторов на структуру течения. Как следствие, невозможно целенаправленно проектировать устройства для перечисленных выше прикладных областей.

Цель работы — создание и анализ точного решения для обобщенного стационарного течения Куэтта ньютоновской жидкости между проницаемыми пластинами с квадратичным профилем скорости на границе. Научная новизна заключается в получении замкнутого аналитического решения, впервые явно и комплексно учитывающего синергию параметров α , A , B и μ . Основное преимущество такого подхода перед численным моделированием — возможность мгновенного получения решения и проведения прямого анализа физических зависимостей, не опосредованного сеточными аппроксимациями.

Для достижения цели решаются четыре задачи.

1. Вывод и строгая верификация аналитического решения, включая проверку предельных переходов к известным частным случаям.
2. Исследование влияния знака и величины граничных коэффициентов A и B на пространственное распределение скорости и завихренности.
3. Количественный анализ влияния динамической вязкости реальных жидкостей (вода, моторное масло, нефть) на профиль скорости и толщину сдвигового слоя.
4. Обсуждение прикладной значимости результатов, ограничений модели и перспективных направлений ее обобщения.

Материалы и методы. Рассмотрим установившееся (стационарное), ламинарное, изотермическое течение ньютоновской вязкой и несжимаемой жидкости в канале, образованном двумя бесконечными, параллельными, плоскими пластинами (рис. 1).

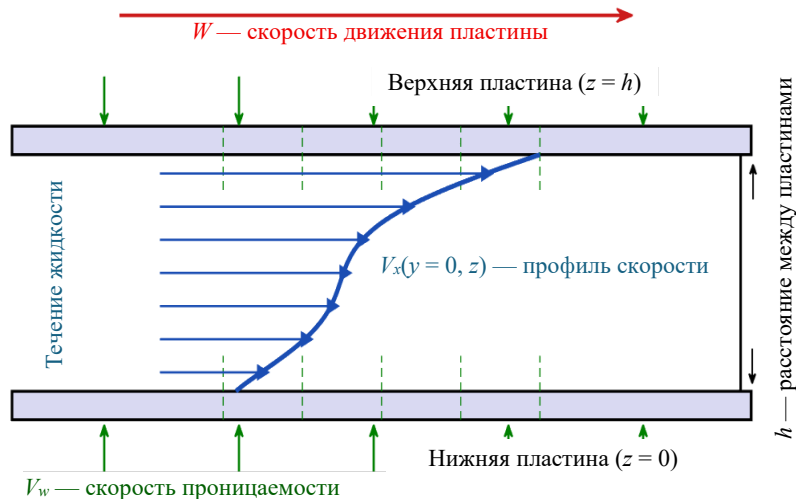


Рис. 1. Схема течения Куэтта между проницаемыми пластинами

Расстояние между пластинами постоянно и равно h . Нижняя пластина неподвижна и расположена в плоскости $z = 0$. Верхняя расположена в плоскости $z = h$ и движется с постоянной скоростью W в положительном направлении оси x .

Ключевая особенность данной задачи: проницаемость обеих пластин обеспечивает фильтрацию жидкости в направлении, нормальном к их поверхностям [6]. Предполагается, что эта нормальная скорость (V_w) постоянна по всей поверхности каждой пластины и одинакова для обеих пластин. Если $V_w > 0$, жидкость втекает в канал через нижнюю пластину и вытекает через верхнюю; если $V_w < 0$, направление потока через стенки обратное.

Продольная компонента скорости V_x задается в виде квадратичного разложения по поперечной координате y . Такое обобщение классического профиля Куэтта позволяет учесть более сложные граничные условия на верхней пластине [5]:

$$V_x(y, z) = U(z) + y u_1(z) + \frac{y^2}{2} u_2(z). \quad (1)$$

Здесь функции $U(z)$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ представляют собой соответственно основную (осевую), линейную и квадратичную моды профиля скорости, зависящие только от координаты z .

Граничные условия формулируются на основе условия прилипания. На неподвижной нижней пластине ($z = 0$) задается полное отсутствие движения:

$$U(0) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0. \quad (2)$$

На верхней пластине ($z = h$) задается обобщенный профиль скорости:

$$U(h) = W, \quad u_1(h) = A, \quad u_2(h) = B, \quad (3)$$

где W — скорость поступательного движения пластины; A — коэффициент, определяющий линейный градиент скорости вдоль y ; B — коэффициент, определяющий кривизну профиля:

Неизвестные функции $U(z)$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ можно найти по уравнению Навье – Стокса для x -компоненты скорости. В предположении стационарности оно имеет вид [2]:

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \Big| V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big| V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \Big| \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \Big| \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Рассматриваемое течение — обобщение чистого течения Куэтта, для которого характерно отсутствие градиента давления вдоль канала ($\partial p/\partial x = 0$). Учтем это условие и то, что V_x не зависит от x , $V_y = 0$ и $V_z = V_w = const$ [3]. В данном случае (4) значительно упрощается:

$$\rho V_w \frac{\partial V_x}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \mid \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (5)$$

Подстановка (1) в (5) и вычисление соответствующих производных дает уравнение, которое должно выполняться для всех значений y . Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y и получим систему трех независимых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [11]:

$$\mu u_1'' - \rho V_w u_1' = 0, \quad (6)$$

$$u_2'' - \rho V_w u_2' = 0, \quad (7)$$

$$\mu U'' - \rho V_w U' = -\mu u_2. \quad (8)$$

Выражения (6) и (7) — линейные однородные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Для их решения вводится безразмерный параметр проницаемости $\alpha = \rho V_w / \mu$, который физически представляет собой отношение инерционных сил к вязким силам в нормальном направлении. Разделив (6) и (7) на μ , получаем каноническую форму:

$$u_1'' - \alpha u_1' = 0, \quad u_2'' - \alpha u_2' = 0. \quad (9)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$u_1(z) = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} e^{\alpha z}, \quad u_2(z) = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} e^{\alpha z}. \quad (10)$$

Применение граничных условий (2) и (3) позволяет определить константы интегрирования. Для функции $u_1(z)$ условия $u_1(0) = 0$ и $u_1(h) = A$ дают:

$$C_1^{(1)} = -C_2^{(1)}, \quad C_2^{(1)} = \frac{A}{e^{\alpha h} - 1}. \quad (11)$$

Аналогично для $u_2(z)$ из условий $u_2(0) = 0$ и $u_2(h) = B$ находим:

$$C_1^{(2)} = -C_2^{(2)}, \quad C_2^{(2)} = \frac{B}{e^{\alpha h} - 1}. \quad (12)$$

Окончательные выражения для линейной и квадратичной мод профиля скорости:

$$u_1(z) = \frac{A}{e^{\alpha h} - 1} (e^{\alpha z} \mid 1), \quad (13)$$

$$u_2(z) = \frac{B}{e^{\alpha h} - 1} (e^{\alpha z} \mid 1). \quad (14)$$

Уравнение (8) для основной моды $U(z)$ является неоднородным. Подставим в него найденное выражение для $u_2(z)$ (14) и разделим на μ :

$$U'' - \alpha U' = -\frac{B}{e^{\alpha h} - 1} (e^{\alpha z} \mid 1). \quad (15)$$

Для уравнения (15) применяется метод неопределенных коэффициентов [13]. Его общее решение — это сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. После определения констант интегрирования из граничных условий (2) и (3) окончательное выражение для основной моды принимает вид [14]:

$$U(z) = \left[\frac{W}{e^{\alpha h} - 1} \mid \frac{Bh(e^{\alpha h} + 1)}{\alpha(e^{\alpha h} - 1)^2} \right] (e^{\alpha z} \mid 1) - \frac{B}{\alpha(e^{\alpha h} - 1)} z (e^{\alpha z} \mid 1). \quad (16)$$

Таким образом, подстановка (13), (14) и (16) в исходный анзац (1) дает определение полного поля продольной компоненты скорости. Полученное аналитическое решение удовлетворяет как уравнению движения (5), так и всем граничным условиям, т. е. (2) и (3).

Для подтверждения физической состоятельности решения рассмотрим предельный переход $V_w \rightarrow 0$, что эквивалентно $\alpha \rightarrow 0$. В этом пределе, используя разложение экспоненты в ряд Тейлора, получаем для квадратичной моды:

$$u_2(z) \rightarrow \frac{Bz}{h}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (17)$$

Аналогично для линейной моды:

$$u_1(z) \rightarrow \frac{Az}{h}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (18)$$

Для основной моды:

$$(z) \rightarrow \frac{Wz}{h} + \frac{B}{6h}(h^2z | z^3), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (19)$$

Численное моделирование. На данном этапе выполняются:

- верификация и анализ полученного решения;
- исследование влияния физических параметров на структуру течения.

Для этого авторы представленной статьи выполнили комплексное численное моделирование в среде Matlab.

Основные цели программной реализации:

- визуальное представление полей скорости;
- количественное сравнение характеристик течения для различных типов жидкостей и граничных условий.

Центральный элемент кода — функция *solve_couette_full*¹, которая реализует формулы (13), (14), (16).

На входе будут:

- физические свойства жидкости (плотность ρ и динамическая вязкость μ);
- геометрические параметры задачи (расстояние между пластинами h);
- кинематические характеристики (W, A, B, V_w);
- координатная сетка по z .

На выходе — базовые функции $U(z), u_1(z), u_2(z)$ и их производные по z для последующего расчета таких важнейших гидродинамических величин, как напряжение сдвига и завихренность.

Моделирование проходило в два этапа. На первом выполнили базовый расчет для стандартного набора параметров. Это позволило проверить выполнение граничных условий. Максимальное отклонение скорости от заданных значений на границах $z = 0$ и $z = h$ не превысило 10^{-12} , что подтвердило высокую точность аналитического подхода и корректность программной реализации.

На втором этапе код расширили для анализа двух ключевых аспектов. Во-первых, детально исследовали влияние знаков и величин коэффициентов A и B в граничном профиле скорости на верхней пластине. Рассматривались четыре комбинации: $A > 0, B > 0$; $A > 0, B < 0$; $A < 0, B > 0$; $A < 0, B < 0$. Это позволило смоделировать несколько физических сценариев (от ускорения потока к центру канала до его торможения у стенок), а также переход от выпуклых к вогнутым профилям скорости. Для каждой комбинации строились двумерные карты распределения скорости $V_x(y, z)$ и профили скорости вдоль нормали к пластинам при фиксированных значениях поперечной координаты y . Это дало наглядное представление о том, как изменение знака квадратичного члена B кардинально меняет форму изолиний скорости, а знак линейного коэффициента A определяет асимметрию профиля относительно плоскости $y = 0$.

Во-вторых, рассчитали течение для различных жидкостей. В модель заложили физические свойства воды, моторного масла SAE 30² и сырой нефти при температурах 20 °C, 40 °C или 60 °C [14]. Использование справочных данных для динамической вязкости и плотности позволило перейти от абстрактной математической модели к практически значимым инженерным расчетам. Для каждой жидкости автоматически определялось число Рейнольдса $Re = Wh/\nu$, что дало возможность оценить режим течения. Как и ожидалось, для воды при комнатной температуре число Рейнольдса достигало $Re \approx 1000$. При этом течение оставалось ламинарным, что согласуется с известной устойчивостью классического течения Куэтта. Для масла и нефти течение оставалось глубоко ламинарным ($Re < 20$).

Особое внимание уделили расчету производных величин. Для каждого значения координаты y аналитически вычислили напряжение сдвига $\tau_{xz} = \mu \partial V_x / \partial z$ и завихренность $\omega_y = -\partial V_x / \partial z$. Это позволило избежать ошибок численного дифференцирования [15] и обеспечило высокую точность при построении распределений указанных величин как вдоль зазора между пластинами, так и в зависимости от поперечной координаты y .

Таким образом, разработанная в Matlab программа представляет собой инструмент для комплексного анализа обобщенного течения Куэтта. С ее помощью можно:

- подтвердить корректность аналитического решения;
- глубоко изучить влияние физических свойств рабочей среды и сложных граничных условий на гидродинамику потока;
- получить обширный визуальный и количественный материал для дальнейшего анализа.

¹ Полное решение Куэтта (англ.).

² От названия американской организации Society of Automotive Engineers — Ассоциация автомобильных инженеров (англ.).

Функции $u_1(z)$, $u_2(z)$, $U(z)$ параметрически исследовали методом численного моделирования в Matlab на основе аналитического решения, выведенного из (13), (14) и (16). Расчеты выполнены при фиксированных параметрах (рис. 2–5): $h = 1,0$ м, $W = 0,3$ м/с, $V_w = 0,001$ м/с, $\mu = 0,01$ Па·с для четырех комбинаций знаков: $A = \pm 0,03$ с⁻¹ и $B = \pm 0,005$ м⁻¹·с⁻¹.

Для реальных жидкостей расчеты выполнялись при $h = 0,02$ м, $W = 0,05$ м/с, $A = 0,1$ с⁻¹, $B = 0,02$ м⁻¹·с⁻¹, $V_w = 0,0005$ м/с. Использовались: вода при 20 °С ($\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$ Па·с) и 40 °С ($\mu = 0,653 \cdot 10^{-3}$ Па·с); нефть при 20 °С ($\mu = 9,15 \cdot 10^{-3}$ Па·с) и 40 °С ($\mu = 4,72 \cdot 10^{-3}$ Па·с); масло SAE 30 при 20 °С ($\mu = 0,290$ Па·с) и 60 °С ($\mu = 0,050$ Па·с).

Результаты исследования. На рис. 2 представлены поля завихренности ω_y . При $A > 0$ максимальные положительные значения ω_y находятся в области положительных координат y . При $A < 0$ максимумы ω_y смещены в область $y < 0$. Амплитуда значений ω_y варьируется с изменением коэффициента B .

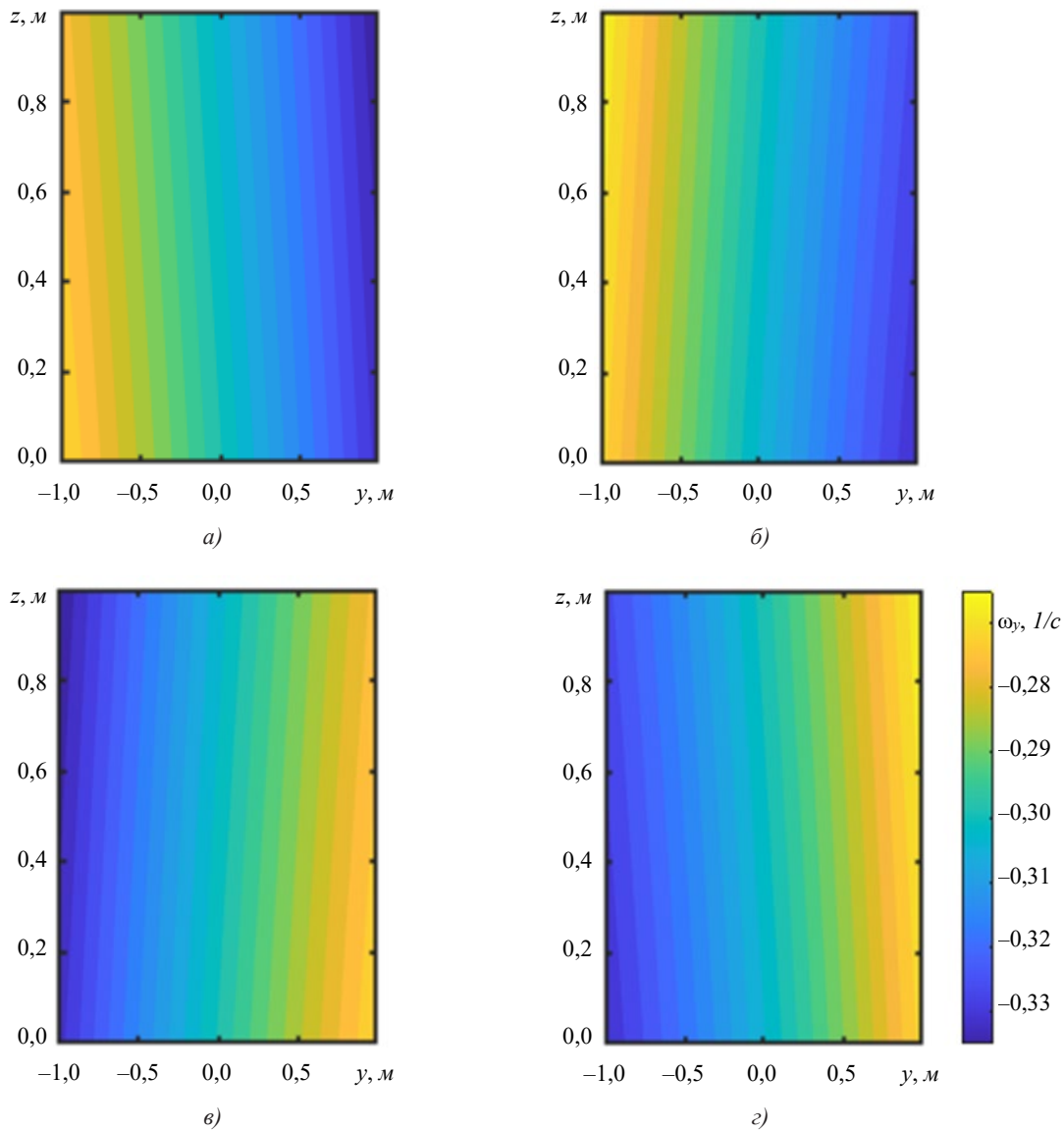


Рис. 2. Распределение завихренности ω_y для различных комбинаций знаков параметров A и B :
 a — $A > 0, B > 0$; b — $A > 0, B < 0$; v — $A < 0, B > 0$; z — $A < 0, B < 0$

На рис. 3 представлены поле модуля скорости $|V|$ и векторное поле для двух комбинаций знаков параметров A и B . При $A > 0$ векторы длиннее в области $y > 0$, что указывает на смещение максимума скорости в положительную область поперечной координаты. При $A < 0$ наблюдается обратная картина: векторы длиннее в области $y < 0$, что свидетельствует о смещении максимума в отрицательную область. Это проявление асимметрии течения, обусловленной линейным членом A в граничном условии. Форма изолиний $|V|$ различается для случаев $B > 0$ и $B < 0$, что связано с влиянием квадратичного члена B .

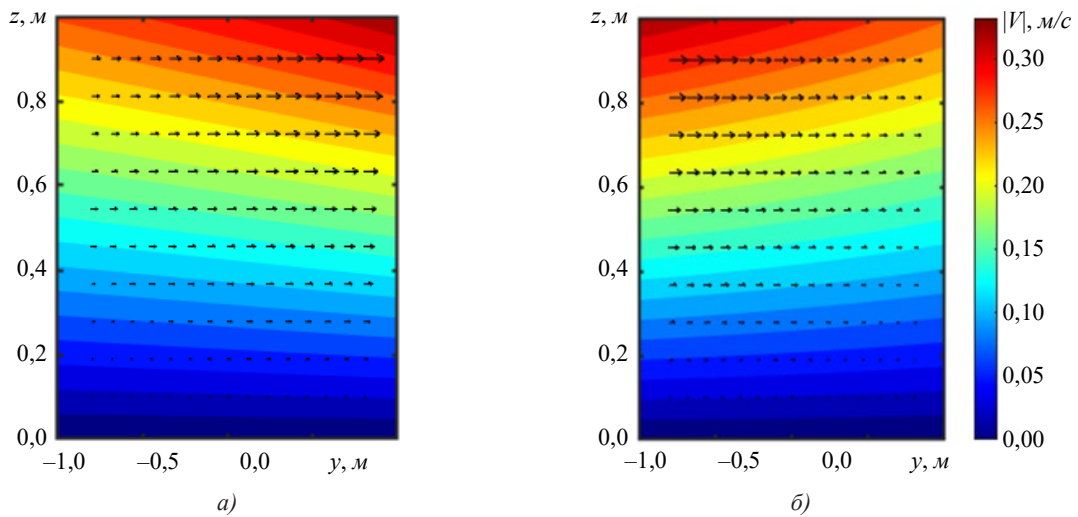


Рис. 3. Поле модуля скорости и векторное поле для различных комбинаций знаков параметров A и B :
 a — $A > 0, B > 0$; $A > 0, B < 0$; b — $A < 0, B > 0$; $A < 0, B < 0$

На рис. 4 представлены изолинии продольной скорости V_x и линии тока. Линии тока отклоняются от направления оси канала. Направление отклонения определяется знаком A . Изолинии V_x при $B > 0$ и $B < 0$ имеют различную кривизну.

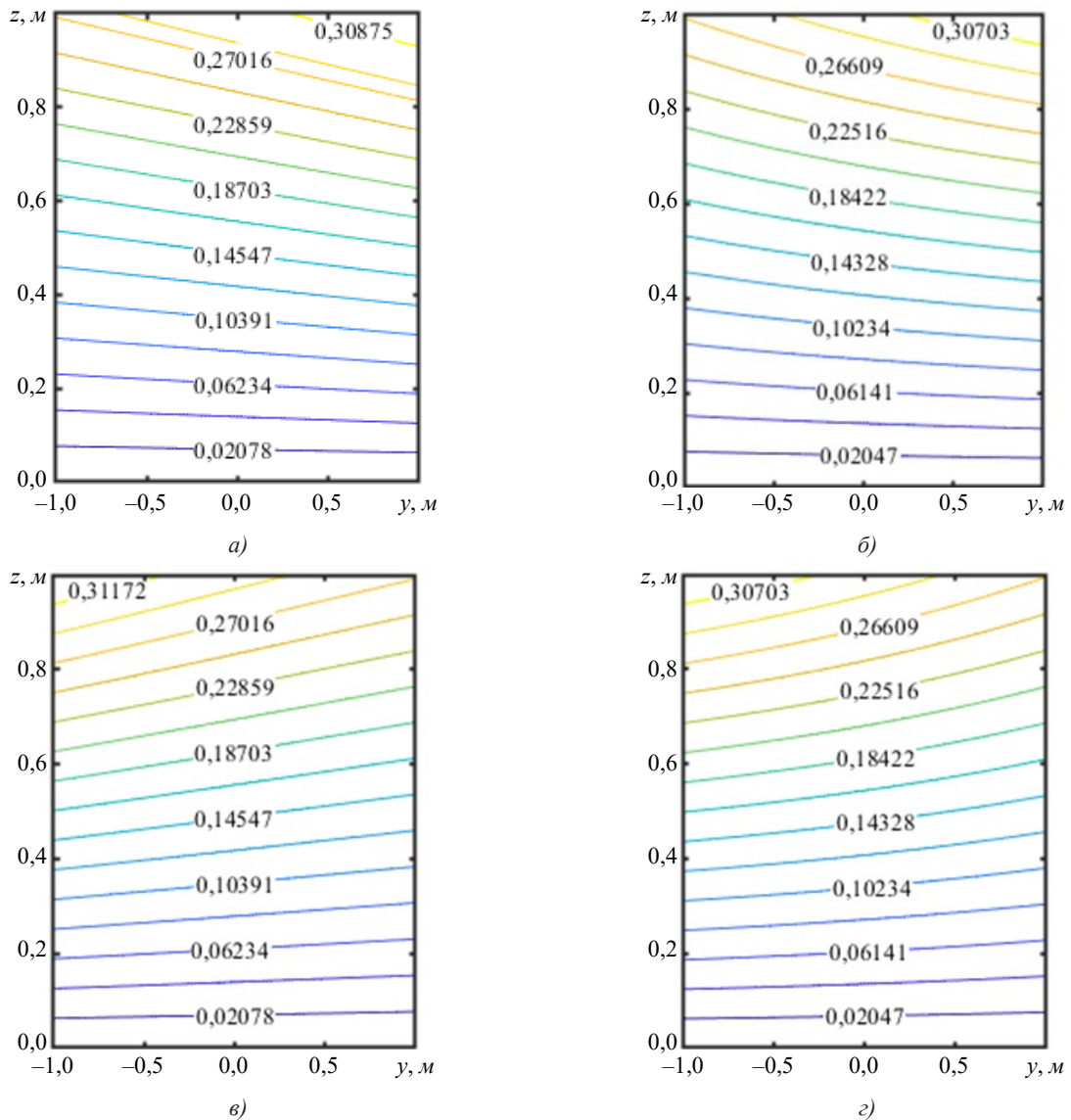


Рис. 4. Изолинии компоненты скорости V_x и линии тока для различных комбинаций знаков параметров A и B :
 a — $A > 0, B > 0$; b — $A > 0, B < 0$; c — $A < 0, B > 0$; d — $A < 0, B < 0$

На рис. 5 показаны профили $V_x(y)$ на разных уровнях, т. е. при z , равном $0, h/4, h/2$ и $3h/4$. При $z = 0$ скорость V_x равна нулю. С ростом z вариация V_x по y увеличивается и достигает максимума при $z = h$, где профиль определяется параметрами A и B . При $z = h/2$ профиль близок к линейному.

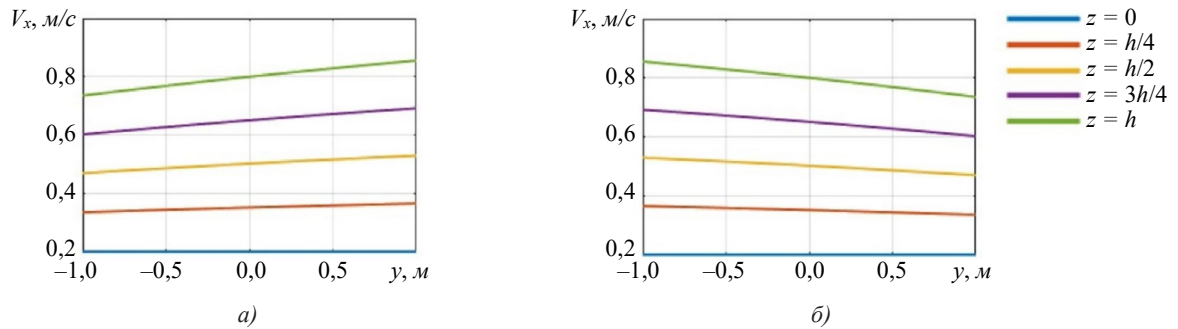


Рис. 5. Распределение компоненты скорости V_x по поперечной координате y на различных уровнях высоты канала:
 a — $A > 0, B > 0$; $A > 0, B < 0$; b — $A < 0, B > 0$; $A < 0, B < 0$

Расчеты выполнены для реальных жидкостей при $h = 0,02$ м, $W = 0,05$ м/с, $A = 0,1$ с⁻¹, $B = 0,02$ м⁻¹·с⁻¹, $V_w = 0,0005$ м/с (рис. 6–8). Использовались: вода при 20 °С ($\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$ Па·с) и 40 °С ($\mu = 0,653 \cdot 10^{-3}$ Па·с); нефть при 20 °С ($\mu = 9,15 \cdot 10^{-3}$ Па·с) и 40 °С ($\mu = 4,72 \cdot 10^{-3}$ Па·с); масло SAE 30 при 20 °С ($\mu = 0,290$ Па·с) и 60 °С ($\mu = 0,050$ Па·с).

На рис. 6 приведены профили $V_x(z)$ при $y = 0$. Все профили построены в диапазоне $z \in [0, 20]$ мм, соответствующем толщине слоя.

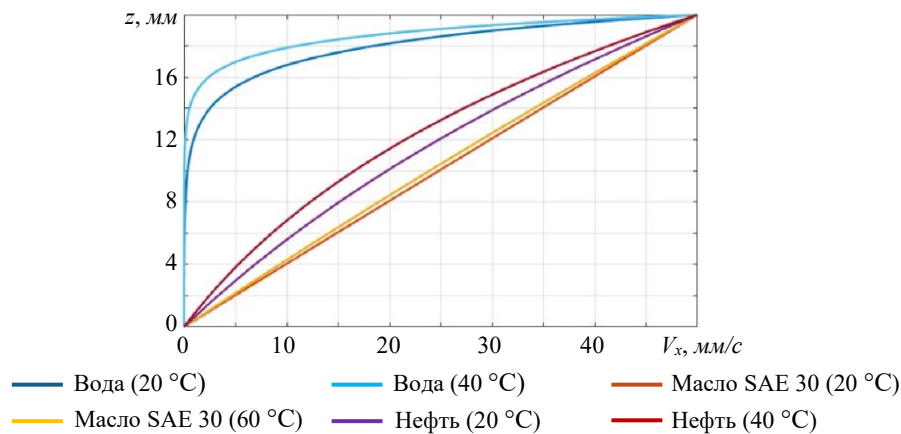
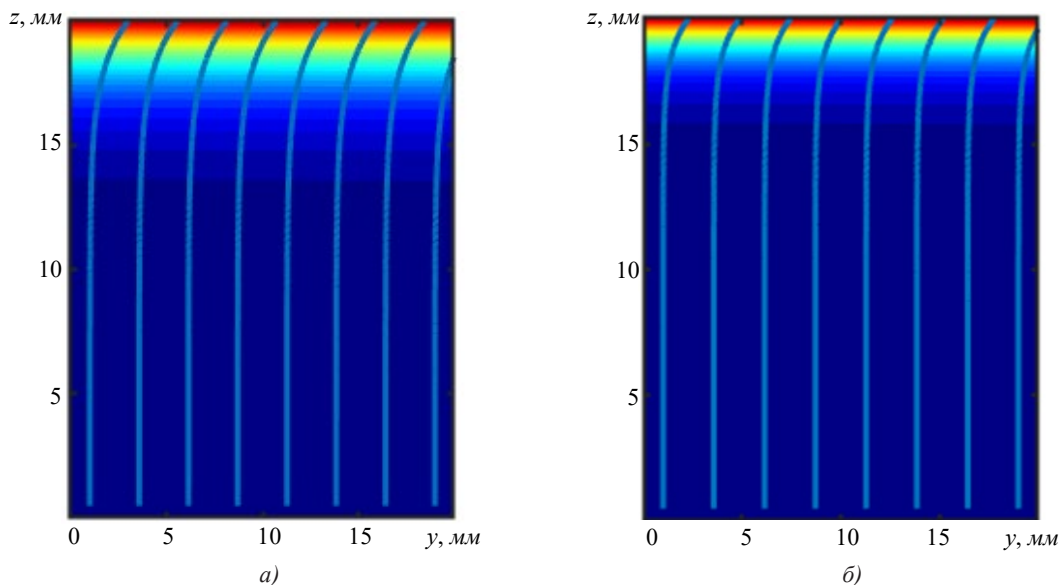


Рис. 6. Сравнение профилей скорости $V_x(z)$ при $y = 0$ для различных жидкостей

На рис. 7 отображены изолинии $|V|$ и линии тока. Для воды линии тока минимально отклоняются от горизонтали, а для масла при 20 °С — значительно искривляются вблизи верхней стенки.



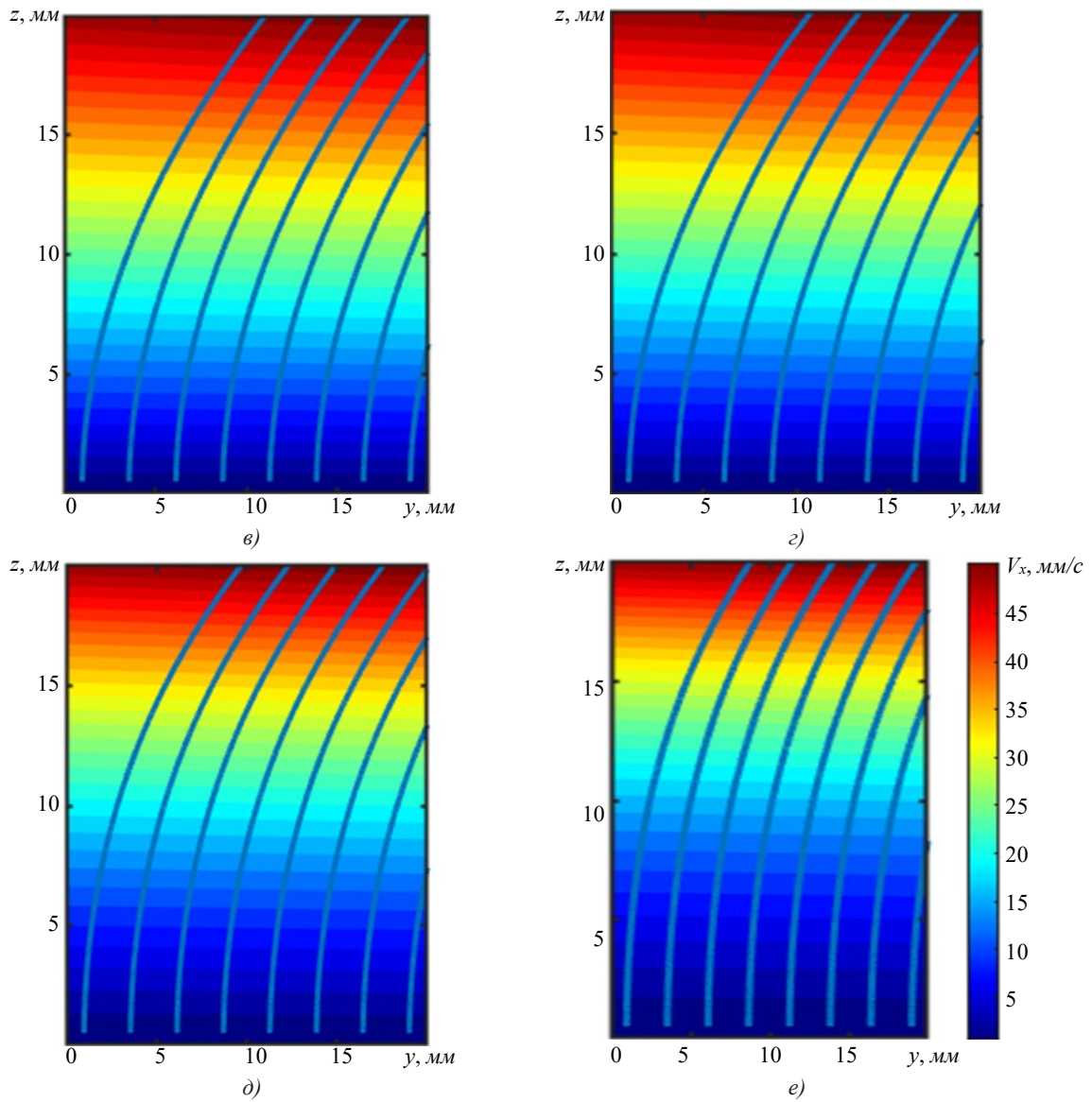
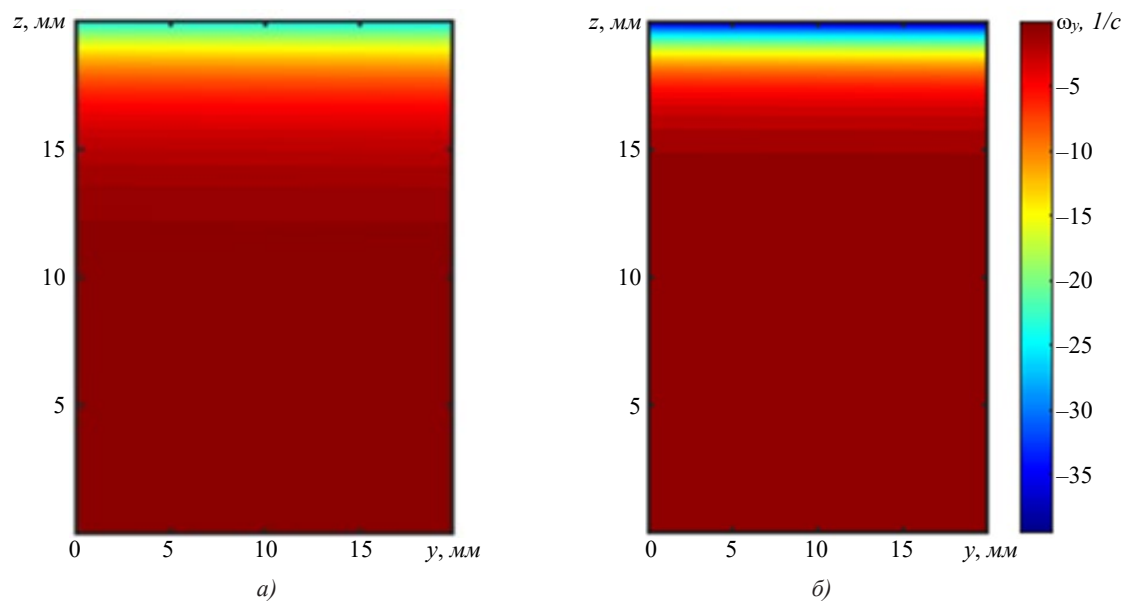


Рис. 7. Изолинии модуля скорости $|\vec{V}|$ и линии тока для различных жидкостей:
 а — вода (20 °С); б — вода (40 °С); в — масло SAE (20 °С); г — масло SAE (60 °С);
 д — нефть (20 °С); е — нефть (40 °С)

На рис. 8 представлены двумерные поля завихренности ω_y для различных жидкостей.



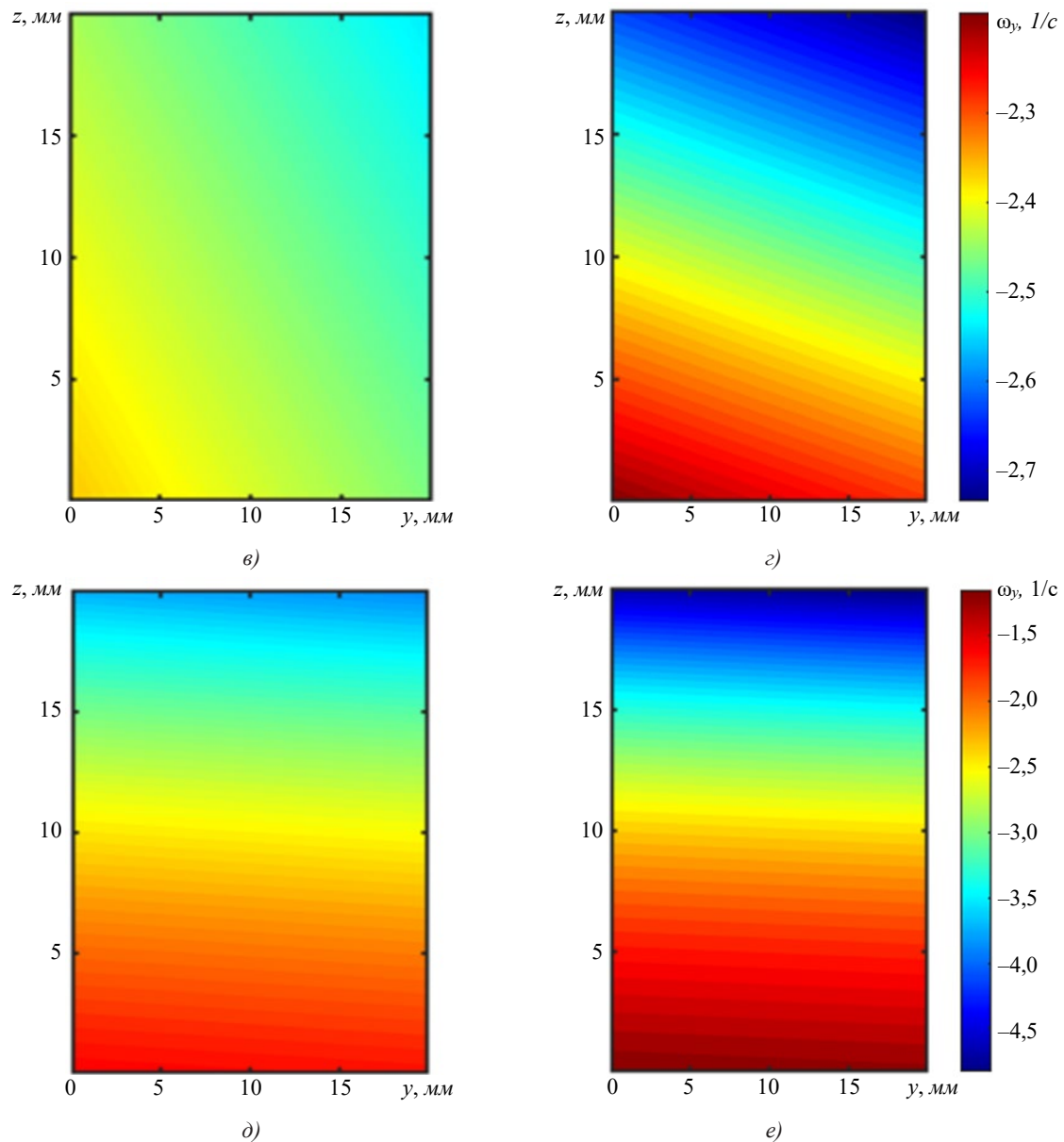


Рис. 8. Двумерные поля завихренности ω_y для различных жидкостей: *a* — вода (20 °C); *б* — вода (40 °C); *в* — масло SAE (20 °C); *г* — масло SAE (60 °C); *д* — нефть (20 °C); *е* — нефть (40 °C)

Обсуждение. Согласно данным рис. 6, для воды при температуре 20 °C характерно слабое отклонение профиля $V_x(z)$ от линейного закона, что связано с ее малой вязкостью. При повышении температуры до 40 °C это отклонение становится еще менее выраженным, а общий наклон профиля несколько сокращается. Для масла SAE 30 (20 °C) наблюдается умеренная нелинейность профиля, которая при нагреве до 60 °C значительно ослабевает. В данном случае профиль приближается к линейному, что соответствует снижению вязкости при повышении температуры. Для нефти (20 °C) профиль характеризуется выраженной нелинейностью. При увеличении температуры до 40 °C кривая становится ближе к линейной, что также согласуется с уменьшением вязкости.

Как показывает рис. 8, для воды при 20 °C и 40 °C завихренность отрицательная и изменяется в диапазоне от -35 до -5 с^{-1} , что соответствует слабой завихренности по всему каналу. Для масла SAE 30 при 20 °C наблюдается локализованная область повышенной по модулю завихренности ($|\omega_y| > 2,3$ с^{-1}), сосредоточенная вблизи верхней стенки. При нагреве до 60 °C область повышенной завихренности расширяется, а ее значения по модулю снижаются, что согласуется с уменьшением вязкости. Для нефти при 20 °C завихренность достигает значений до $-4,5$ с^{-1} , а при 40 °C — до $-1,5$ с^{-1} , что также соответствует снижению вязкости.

Итоги работы позволяют утверждать, что совместное действие проницаемости, нелинейных граничных условий и вязкости обуславливает качественно новые режимы течения, не сводимые к простой суперпозиции известных эффектов [5].

Определяющее влияние знака коэффициента A на асимметрию течения (рис. 2–5) объясняется его физическим смыслом как градиента скорости $\partial V_x / \partial y$ на границе. Этот градиент, заданный на верхней стенке, за счет вязкой диффузии формирует поперечную составляющую потока во всем объеме, что приводит к смещению линий тока и максимумов завихренности. Коэффициент B , управляющий кривизной профиля ($\partial^2 V_x / \partial y^2$), определяет распределение этого поперечного потока по ширине канала, что проявляется в изменении формы изолиний скорости (рис. 3, 4). Ослабление влияния граничных коэффициентов с удалением от верхней стенки (рис. 5) количественно описывается экспоненциальными зависимостями (13) и (14), что согласуется с представлениями о затухании возмущений от границы в вязкой жидкости [16].

Безразмерный параметр проницаемости α зависит от динамической вязкости μ ($\alpha = \rho V_w / \mu$). Этим объясняется резкое различие между течением воды и масла (рис. 6, 8).

Для высоковязких жидкостей (малые показатели α) решение вдали от границ стремится к линейному профилю. Однако неоднородность в уравнении (8) для $U(z)$, обусловленная членом с B , приводит к концентрации сдвига в тонком пристенном слое, толщина которого обратно пропорциональна $|\alpha|$. Таким образом, вязкость — не просто множитель, а параметр, управляющий пространственной локализацией сдвиговой деформации. Это имеет важное практическое значение, например, для расчета трения в подшипниках с пористой смазкой [17].

Полученное решение верифицировано, т. к. корректно воспроизводит известные предельные случаи. При $\alpha \rightarrow 0$ оно переходит в решение для течения с квадратичным условием на непроницаемой стенке [18]. При $A, B \rightarrow 0$ сводится к классическому экспоненциальному профилю для проницаемых стенок [19]. Одновременный переход $\alpha, A, B \rightarrow 0$ дает линейный профиль классического течения Куэтта [2].

Явный вид решения позволяет напрямую оценивать влияние каждого параметра на поле течения, что ценно для инженерного проектирования. Например, в микрофлюидном микшере можно варьировать микрорельеф стенки (через A и B) для генерации заданной вихревой структуры, улучшающей перемешивание [20]. В задаче смазки пористого подшипника модель позволяет аналитически связать вязкость масла, скорость просачивания и шероховатость поверхности (через A, B) с распределением напряжения сдвига и диссипацией энергии [21].

Основное ограничение модели — допущения о стационарности, ламинарности и неньютоновском поведении жидкости. Расширение модели для учета турбулентности выходит за рамки данной работы. Это отдельная сложная задача, требующая перехода к осредненным уравнениям Рейнольдса (RANS)³ или моделям крупных вихрей (LES)⁴ [20]. Еще одно перспективное направление — обобщение для неньютоновских жидкостей [21] и нестационарных режимов [22]. Это позволит охватить более широкий класс таких прикладных задач, как пульсирующие течения в биомедицинских устройствах.

Заключение. Впервые получено точное аналитическое решение стационарных уравнений Навье – Стокса, описывающее обобщенное течение Куэтта ньютоновской жидкости между проницаемыми пластинами с квадратичным профилем скорости на границе.

Параметрический анализ выявил, что линейный коэффициент A граничного условия определяет направление асимметрии полей скорости и завихренности, а квадратичный коэффициент B — степень их пространственной нелинейности.

Динамическая вязкость показана как ключевой параметр, контролирующей толщину сдвигового слоя. Для высоковязких сред основной перепад скорости локализуется в тонкой пристенной области, в то время как для маловязких жидкостей профиль скорости близок к линейному по всей высоте канала.

Результаты работы создают аналитическую основу для решения прикладных задач в микрофлюидике, мембранных технологиях и трибологии, где необходимо управление потоком в условиях проницаемости границ и сложных граничных условий.

Дальнейшие исследования связаны с доработкой, расширением модели. В перспективе она могла бы учитывать неньютоновские свойства жидкости, нестационарные режимы и устойчивость течений.

Список литературы / References

1. Papanastasiou T, Georgios G, Alexandrou AN. *Viscous Fluid Flow*. Boca Raton FL: CRC Press; 2021. 434 p. <https://doi.org/10.1201/9780367802424>
2. Temam R. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, 3rd rev. ed. Providence, RI: AMS; 2001. 500 p.
3. Ganie AH, Memon AA, Memon MA, Al-Bugami AM, Bhatti K, Khan I. Numerical Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer through a Rectangular Channel Containing Perforated Plate at Different Angles. *Energy Reports*. 2022;8:539–550. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.11.232>
4. Vafai K. *Handbook of Porous Media*. Boca Raton, FL: CRC Press; 2015. 959 p. <https://doi.org/10.1201/B18614>

³ От англ. Reynolds-averaged Navier — Stokes — уравнения Навье — Стокса, осредненные по Рейнольдсу.

⁴ От англ. large eddy simulation — метод крупных вихрей.

5. Wang FZ, Animasaun IL, Muhammad T, Okoya SS. Recent Advancements in Fluid Dynamics: Drag Reduction, Lift Generation, Computational Fluid Dynamics, Turbulence Modelling, and Multiphase Flow. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2024;49(8):10237–10249. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08945-3>
6. Almuthaybiri SS, Tisdell CC. Laminar Flow in Channels with Porous Walls: Advancing the Existence, Uniqueness and Approximation of Solutions via Fixed Point Approaches. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2022;24:55. <https://doi.org/10.1007/s11784-022-00971-8>
7. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла. *Прикладная математика и механика*. 2018;82(1):25–30.
Shvarts KG. Plane-Parallel Adjective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer with an Internal Linear Heat Source. *Fluid Dynamics*. 2019;53(1):524–528.
8. Waqas H, Farooq U, Dong Liu, Abid M, Imran M, Muhammad T. Heat Transfer Analysis of Hybrid Nanofluid Flow with Thermal Radiation through a Stretching Sheet: A Comparative Study. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2022;138:106303. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106303>
9. Karmakar S, Usha R, Chattopadhyay G, Millet S, Ramana Reddy JV, Shukla P. Stability of a Plane Poiseuille Flow in a Channel Bounded by Anisotropic Porous Walls. *Physics of Fluids*. 2022;34(3):034111. <https://doi.org/10.1063/5.0083217>
10. Mirzaei A, Jalili P, Afifi MD, Jalili B, Ganji DD. Convection Heat Transfer of MHD Fluid Flow in the Circular Cavity with various obstacles: Finite element approach. *International Journal of Thermofluids*. 2023;20:100522. <https://doi.org/10.1016/j.ijft.2023.100522>
11. Gubareva KV, Eremin AV. Numerical Solution to the Problem of Thermal Conductivity in a Porous Plate with a Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):23–31. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31>
12. Goruleva LS, Prosviryakov EYu. Exact Solutions to the Navier-Stokes Equations for Describing Inhomogeneous Isobaric Vertical Vortex Fluid Flows in Regions with Permeable Boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2023;1:41–53. <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2023.1.041-053>
13. Polyanin AD, Zaitsev VF. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press; 2003. 816 p.
14. Goruleva LS, Prosviryakov EYu. Unidirectional Steady-State Inhomogeneous Couette Flow with a Quadratic Velocity Profile Along a Horizontal Coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2022;3:47–60. <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2022.3.047-060>
15. Roache PJ. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers; 1998. 446 p.
16. Peiqing Liu. Boundary Layer Theory and Its Approximation. In book: *Aerodynamics*. New York, NY: Springer; 2022. P. 307–393 https://doi.org/10.1007/978-981-19-4586-1_6
17. Zhixiang Feng, Qingqing Ye. Turbulent Boundary Layer over Porous Media with Wall-Normal Permeability. *Physics of Fluids*. 2023;35(9):095111. <https://doi.org/10.1063/5.0160773>
18. Kulikovskiy A. Laminar Flow in a PEM Fuel Cell Cathode Channel. *Journal of The Electrochemical Society*. 2023;170(2):024510. <https://doi.org/10.1149/1945-7111/acba47>
19. Nield DA, Bejan A. *Convection in Porous Media*. New York, NY: Springer; 2017. 640 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0>
20. Pope SB. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. 807 p.
21. Das D, Mondal K, Poddar N, Ping Wang. Transient Dispersion of a Reactive Solute in an Oscillatory Couette Flow through an Anisotropic Porous Medium. *Physics of Fluids*. 2024;36(2):023610. <https://doi.org/10.1063/5.0184921>
22. Lemarie-Rieusset PG. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*, 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC; 2023. 778 p. <https://doi.org/10.1201/9781003042594>

Об авторах:

Кристина Владимировна Губарева, кандидат технических наук, доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика» Самарского государственного технического университета (443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), r.kristina2017@mail.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы управления» Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (620062, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19), заведующий сектором нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук (620049, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), evgen_pros@mail.ru

Антон Владимирович Еремин, доктор технических наук, доцент, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика» Самарского государственного технического университета (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244). [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), a.v.eremin@list.ru

Заявленный вклад авторов:

К.В. Губарева: проведение исследования, разработка программного обеспечения, написание черновика рукописи, визуализация.

Е.Ю. Просвиряков: разработка концепции, курирование данных, разработка методологии, написание рукописи — внесение замечаний и исправлений.

А.В. Еремин: формальный анализ, валидация результатов, написание рукописи — внесение замечаний и исправлений.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Kristina V. Gubareva, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), r.kristina2017@mail.ru

Evgenii Yu. Prosviryakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Information Technology and Control Systems, Ural Federal University (19, Mira Str., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation), Head of the Nonlinear Vortex Hydrodynamics Sector, Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch) (34, Komsomolskaya Str., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), evgen_pros@mail.ru

Anton V. Eremin, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Vice-Rector for Scientific Work, Head of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), a.v.eremin@list.ru

Claimed Contributorship:

KV Gubareva: investigation, software, writing – original draft preparation, visualization.

EYu Prosviryakov: conceptualization, data curation, methodology, writing – review & editing.

AV Eremin: formal analysis, validation, writing – review & editing.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 04.12.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 22.12.2025

Принята к публикации / Accepted 14.01.2026