

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 534.1, 539.3, 539.5

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2272>

## Прикладная теория поперечных колебаний слоистой конструкции с полимерными матрицами и включениями из расположенных вдоль слоя пористых пьезокерамических стержней



EDN: OLMHAS

 А.Н. Соловьев<sup>1,2</sup>  , М.С. Германчук<sup>1,3</sup> , П.А. Оганесян<sup>4</sup> 
<sup>1</sup> Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Республика Крым

<sup>2</sup> Научно-производственный центр инжиниринговых технологий, Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Республика Крым

<sup>3</sup> Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Республика Крым

<sup>4</sup> Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

 [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

### Аннотация

**Введение.** Развитие ультразвуковой техники требует создания пьезоэлектрических преобразователей с улучшенными эксплуатационными и метрологическими характеристиками. Одним из наиболее перспективных направлений является применение композиционных материалов. Как показано в литературе, пористая пьезокерамика обладает уникальным свойством: ее пьезомодуль  $d_{33}$  практически не зависит от пористости, тогда как модули упругости заметно убывают при её увеличении. Это открывает возможности для проектирования высокоэффективных устройств, в частности композитов с полимерной матрицей и пористыми пьезокерамическими стержнями с осевой поляризацией. Однако, несмотря на достаточную изученность статических свойств, теоретический анализ динамического поведения таких структур, включая их упрощённые двумерные модели, при изгибных колебаниях и продольной поляризации в научной литературе практически отсутствует. В этой связи целью работы является разработка упрощённой математической модели для анализа изгибных колебаний слоистой пластины указанного композита и выявление влияния пористости на её динамические характеристики.

**Материалы и методы.** Материал конструкции — пьезоэлектрический композит, состоящий из нескольких слоёв. Каждый слой представляет собой пьезокомпозит связности 1–3, образованный полимерной матрицей и пористыми продольно поляризованными пьезокерамическими стержнями. Математическая постановка краевых задач выполнена в рамках линейной теории электроупругости. На основе гипотез типа Кирхгоффа-Лява и предположений о распределении электрического потенциала предложен прикладной метод расчёта установившихся изгибных колебаний слоистой пластины. Адекватность подхода проверена сопоставлением с результатами конечно-элементного моделирования, реализованного в пакете ACELAN.

**Результаты исследования.** Ключевым итогом работы стала разработка и успешная апробация прикладной теории, позволяющей свести трёхмерную краевую задачу электроупругости для слоистых пьезоэлементов к более простой двумерной постановке. Это обеспечило существенное сокращение времени расчёта по сравнению с традиционными методами конечных элементов при сохранении требуемой точности. Для верификации предложенной модели выполнено численное тестирование путём сравнения с расчётами в программном комплексе ACELAN. Сравнительный анализ показал практически полное совпадение результатов в низкочастотном диапазоне, включая точное определение частоты первой изгибной моды. Полученное соответствие подтверждает высокую адекватность и достоверность разработанного метода, демонстрируя его применимость в качестве эффективного инструмента для анализа и оптимального проектирования пьезоэлектрических устройств.

**Обсуждение.** Одной из ключевых проблем при проектировании слоистых пьезоэлектрических преобразователей является высокая ресурсоёмкость трёхмерного моделирования без перехода к эффективным характеристикам, что существенно ограничивает возможности оптимизации. Предложенный подход, основанный на сведениях

трёхмерной задачи к двумерной, представляет значимый шаг вперёд в решении этой проблемы. Его основное преимущество — снижение вычислительных затрат и возможность использования более простого программного инструментария по сравнению с «тяжёлыми» САЕ-пакетами при численном анализе, что открывает путь к множественным прогонам, в том числе с применением эволюционных алгоритмов, в процессе поиска оптимальной геометрии и структуры пьезоэлемента. Валидация модели на основе сравнения с расчётами в конечно-элементном пакете ACELAN показала высокую степень соответствия в низкочастотной области, что подтверждает её адекватность для практического применения. Вместе с тем выявленные ограничения, связанные с частотным диапазоном и различиями в упругих свойствах слоёв, очерчивают границы применимости и задают направления для последующих исследований.

**Заключение.** В результате проведённого исследования создан и апробирован эффективный метод расчёта, сводящий трёхмерную краевую задачу электроупругости для слоистых пьезоэлементов к двумерной постановке. Главный итог — существенное ускорение численного моделирования при сохранении точности. Показано, что предложенная теория обеспечивает высокую корректность результатов в низкочастотном диапазоне, вплоть до первой изгибной моды, что подтверждено сравнением с эталонными данными конечно-элементного анализа в ACELAN. Тем самым продемонстрирована практическая значимость метода как эффективного инструмента для итерационного поиска оптимальной конструкции преобразователей. Открываются перспективы его применения в инженерной практике при проектировании новых типов пьезокерамических устройств, а также для дальнейшего развития прикладной теории — в направлении расширения частотного диапазона и адаптации к более сложным многослойным структурам.

**Ключевые слова:** композитные материалы, пористая пьезокерамика, слоистая пластина, изгиб, прикладная теория, метод конечных элементов

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакции журнала и рецензентам за внимательное отношение к статье.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 22-11-00302 П) в Южном федеральном университете, <https://rscf.ru/project/22-11-00302/>

**Для цитирования.** Соловьев А.Н., Германчук М.С., Оганесян П.А. Прикладная теория поперечных колебаний слоистой конструкции с полимерными матрицами и включениями из расположенных вдоль слоя пористых пьезокерамических стержней. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026;26(1):2272. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2272>

*Original Theoretical Research*

## Applied Theory of Transverse Vibrations of Layered Structure with Polymer Matrices and Inclusions of Porous Piezoceramic Rods Arranged along the Layer

Arkadiy N. Soloviev<sup>1,2</sup>  , Maria S. Germanchuk<sup>1,3</sup> , Pavel A. Oganesyanyan<sup>4</sup> 

<sup>1</sup> Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Simferopol, Republic of Crimea

<sup>2</sup> Research and Production Center for Engineering Technologies, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Simferopol, Republic of Crimea

<sup>3</sup> V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Republic of Crimea

<sup>4</sup> Southern Federal University, Rostov-on-Don

✉ [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

### Abstract

**Introduction.** The development of ultrasonic technology requires the creation of piezoelectric transducers with improved operational and metrological characteristics. One of the most promising directions is the use of composite materials. As shown in the literature, porous piezoceramics possess a unique property: their piezoelectric modulus  $d_{33}$  is practically independent of porosity, whereas the elastic moduli noticeably decrease as porosity increases. This opens up possibilities for the design of high-performance devices, particularly composites with a polymer matrix and porous piezoelectric ceramic rods with axial polarization. However, despite the sufficient study of their static properties, theoretical analysis of the dynamic behavior of such structures, including their simplified two-dimensional models, under bending vibrations and longitudinal polarization, is virtually absent in the scientific literature. In this regard, the objective of the work is to develop a simplified mathematical model for the analysis of bending vibrations of a layered plate of the specified composite and to identify the effect of porosity on its dynamic characteristics.

**Materials and Methods.** The structure is made of a piezoelectric composite consisting of several layers. Each layer is 1–3 piezoelectric composite, formed by a polymer matrix and porous longitudinally polarized piezoceramic rods. The mathematical formulation of the boundary value problems is performed within the framework of the linear theory of electroelasticity. Based on Kirchhoff-Love hypotheses and assumptions regarding the electric potential distribution, an applied method for calculating steady-state bending vibrations of a layered plate is proposed. The adequacy of the approach is verified through its comparison with the results of finite element modeling implemented in the ACELAN package.

**Results.** The key outcome of the study was the development and successful testing of an applied theory that reduced the three-dimensional boundary-value problem of electroelasticity for layered piezoelectric elements to a simpler two-dimensional formulation. This significantly reduced calculation time compared to traditional finite element methods while maintaining the required accuracy. To verify the proposed model, numerical testing was performed by comparing it with calculations in the ACELAN software package. The comparative analysis showed almost complete agreement between the results in the low-frequency range, including the precise determination of the first bending mode frequency. The obtained correspondence confirmed the high adequacy and reliability of the developed method, demonstrating its applicability as an efficient tool for the analysis and optimal design of piezoelectric devices.

**Discussion.** One of the key challenges in the design of layered piezoelectric transducers is the high resource intensity of three-dimensional modeling without transitioning to efficient characteristics, which significantly limits optimization possibilities. The proposed approach, based on reducing the three-dimensional problem to a two-dimensional one, represents a significant step forward in addressing this issue. Its main advantage is the reduction in computational costs and the possibility of using simpler software tools compared to “heavy” CAE packages in numerical analysis. This opens the way to multiple runs, including those employing evolutionary algorithms, in the process of searching for the optimal geometry and structure of the piezoelectric element. Validation of the model based on comparison with calculations in the ACELAN finite element package has shown a high degree of correspondence in the low-frequency region, which confirms its adequacy for practical application. At the same time, the identified limitations related to the frequency range and differences in the elastic properties of the layers outline the boundaries of applicability and set directions for subsequent research.

**Conclusion.** As a result of the conducted research, an efficient calculation method has been developed and tested. It reduces the three-dimensional boundary value problem of electroelasticity for layered piezoelectric elements to a two-dimensional formulation. The main outcome is a significant acceleration of numerical modeling while maintaining accuracy. It is shown that the proposed theory provides high correctness of results in the low-frequency range, up to the first flexural mode, which has been confirmed by comparison with reference data from finite element analysis in ACELAN. This demonstrates the practical significance of the method as an efficient tool for the iterative search for the optimal design of converters. Prospects are opening up for its application in engineering practice when designing new types of piezoceramic devices, as well as for the further development of applied theory — in the direction of expanding the frequency range and adapting to more complex multilayer structures.

**Keywords:** composite materials, porous piezoceramics, layered plate, bending, applied theory, finite element method

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the editorial board and reviewers for their attentive attitude towards the article.

**Funding Information.** The research is done with the financial support from RFFI (grant no. 22–11–00302 II) at the Southern Federal University. <https://rscf.ru/project/22-11-00302/>

**For Citation.** Soloviev AN, Germanchuk MS, Oganessian PA. Applied Theory of Transverse Vibrations of Layered Structure with Polymer Matrices and Inclusions of Porous Piezoceramic Rods Arranged along the Layer. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026;26(1):2272. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2026-26-1-2272>

**Введение.** С целью повышения эффективности пьезоэлектрических преобразователей ведутся исследования, направленные на поиск оптимальной конфигурации устройства — его размеров, формы, схемы гальванопокрытия, способов нагружения и применяемых материалов. Несмотря на значительный объем выполненных работ, задачи определения результативных конструкций пьезоэлектрических генераторов и отбора пьезоматериалов с улучшенными характеристиками для накопителей энергии остаются актуальными. Одним из наиболее перспективных путей повышения характеристик таких преобразователей является использование пьезокомпозитных материалов. Наиболее известны и глубоко изучены волокнистые пьезокомпозиты, или системы 1–3-связности по терминологии Ньютонхема [1], в которых стержневые пьезокерамические элементы вмонтированы в упругую диэлектрическую матрицу. Среди многочисленных работ, посвящённых композитам 1–3-связности, следует отметить [2], где рассмотрены приложения для гидрофонов; в [3] эффективные свойства вычислены решением краевых задач методом конечных элементов для элементарной ячейки с периодическими граничными условиями;

в [4] соответствующие коэффициенты представлены в замкнутой форме; в [5] выведены формулы на основе асимптотического усреднения, причём сопоставление с экспериментом демонстрирует хорошее согласие. Теория гомогенизации для проектирования оптимальных пьезокомпозитов применена в [6]. В исследовании [7] также получены аналитические выражения для эффективных констант при условии, что период структуры существенно меньше длины упругих волн, и предложены новые композиты с улучшенными глобальными свойствами для биомедицинской визуализации. Анализ электроупругих композитов методами самосогласования и асимптотической гомогенизации проведён в [8]. В [9] изложена теоретическая основа для проектирования пьезокомпозитов с заданными обобщёнными характеристиками. Дополнительные сведения собраны в обзоре [10]. Композиты 1–3-связности обеспечивают высокие значения ряда ключевых параметров, важных для приложений — коэффициента гидростатического пьезоэлектрического заряда, коэффициента гидростатического напряжения, коэффициента электромеханической связи по толщине, гидростатического показателя добротности и др.

Макроволокнистые композиты, изначально разработанные для авиационной отрасли, также успешно применяются в системах сбора энергии. Эти миниатюрные маломощные генераторы представляют собой тонкие балки и включают пьезоэлектрические волокна, размещённые в диэлектрической среде. Волокна интегрированы в единую многослойную структуру со встречно-штыревыми электродами на боковых поверхностях балок с обеих сторон. Цель исследования [11] — оценить влияние неопределённости физических свойств как пьезоэлектрических волокон, так и эпоксидной матрицы на отклик модели и выявить параметры, определяющие наибольшую вариативность выходных данных. В работе [12] предложена потенциальная технология интеграции источников сбора энергии в сложные конструкции планера в аэрокосмической технике, позволяющая генерировать энергию, необходимую для мониторинга состояния окружающей среды или контролируемых конструктивных характеристик. Сравнительный анализ генераторов из монолитной и композитной пьезокерамики, проведённый в [13], показал высокую результативность применения макроволокнистых композитов. В статье [14] представлена разработка микрогенератора на основе микрокомпозитных пьезоэлектрических материалов для рекуперации энергии в перчаточных конструкциях. Описанные устройства состоят из пьезоэлектрических волокон диаметром 90–250 мкм, выровненных в однонаправленном порядке и встроенных в композитную структуру.

Для повышения характеристик композита 1–3-связности возможно варьировать материалы пьезоэлектрических волокон и упругой диэлектрической матрицы. В частности, в качестве матрицы могут применяться пористые материалы с пониженным модулем Юнга и существенно изменяющимся коэффициентом Пуассона [2, 14]. В [15, 16] метод Мори-Ганаки использован для определения эффективных модулей сперва для пористой матрицы, после чего проведён анализ композитов 1–3. При этом в [15, 16] дополнительно рассматривались варианты ориентации пор относительно направления поляризации, что, однако, трудно реализовать на практике. В [2] использованы приближения метода эффективной среды, а в [17, 18] на базе подходов из [2] выполнена топологическая оптимизация пористой структуры матрицы. В [19] проведено моделирование композита 0–3 с пьезоэлектрическими частицами в пористой матрице и показано, что применение пористой матрицы не приводит к улучшению электромеханических свойств системы 0–3. Вместе с тем коэффициенты пьезочувствительности в указанной работе не анализировались.

Другое направление модификации связано с использованием пористой пьезокерамики, которая в последние годы рассматривается как перспективный активный материал для устройств накопления энергии. По сравнению с плотной керамикой пористые материалы характеризуются сниженным акустическим импедансом, повышенной пьезочувствительностью и рядом высоких показателей качества. Так, в работе [20] исследован пьезоэлемент типа Розена, использующий продольный пьезомодуль. В [21] показано, что введение пористого слоя в многослойный элемент на основе титаната бария значительно улучшает характеристики при сборе пьезоэлектрической энергии. В экспериментальном исследовании [22] описан пьезогенератор, изготовленный с применением пористой керамики. В [23] дан обзор современного состояния и перспектив использования пористой пьезокерамики.

Настоящее исследование опирается на результаты [20, 24] и в определённой степени объединяет подходы к внедрению пористой пьезокерамики в качестве активной фазы в волокнах композита 1–3-связности и к варьированию материалов матриц с различной жёсткостью. Иными словами, рассматриваются пьезоэлектрические композиты 1–3, в которых в качестве пьезоактивного материала применяется пористая пьезокерамика.

Таким образом, анализ литературы показывает, что основные усилия исследователей сосредоточены на определении эффективных электроупругих свойств композитов 1–3-связности. Разработан широкий спектр методов — от аналитических формул до детализированных численных процедур — позволяющих с высокой точностью предсказывать гомогенизированные (усреднённые) характеристики материала в зависимости от свойств составляющих фаз: волокон и матрицы. Эти сведения, безусловно, важны, однако они описывают поведение материала в целом, а не конечного конструктивного элемента, что и является целью инженерного проектирования.

Переход от эффективных свойств к анализу динамики реальных конструкций, таких как пластины и оболочки, представляет собой самостоятельную и нетривиальную задачу. Хотя для высокоточного анализа применим метод конечных элементов (МКЭ), как это реализовано во многих программных пакетах, полноразмерное трёхмерное моделирование на этапах предварительного проектирования и оптимизации часто оказывается чрезмерно ресурсоёмким. Одновременно разработка прикладных двумерных теорий (теорий пластин и оболочек), учитывающих специфику композитов 1–3-связности (особенно при наличии пористых компонент 3–0 и 3–3-связности), позволила бы существенно упростить и ускорить вычисления, сохранив при этом достаточную для инженерных приложений точность. В научной литературе ощущается явный дефицит таких моделей, способных выступать мостом между микромеханикой материала и макромеханикой конструкции.

Цель данной работы — построение двумерной прикладной теории расчёта поперечных колебаний слоистых пластин из пьезоэлектрического композита 1–3-связности с последующей верификацией результатов, полученных по предложенной теории, путём сравнения с решением в конечно-элементном пакете ACELAN.

**Материалы и методы** Построение математической на основе линейной теории электроупругости и компьютерной модели многослойного преобразователя с поляризацией вдоль слоев осуществлено в конечно элементном пакете ACELAN. Компьютерная модель устройства далее используется для проверки адекватности разработанной прикладной теории.

### Математическая модель

В работе рассматриваются модели пьезопреобразователей, состоящих из электроупругих композиционных материалов, свойства которых задаются эффективными константами [20, 24]. Введем индекс  $j$  для нумерации тел и запишем уравнения и определяющие соотношения [25]:

$$\begin{aligned} \rho_j \omega^2 \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_j \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f}_j; \nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}_j^E \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{E}; \mathbf{E} = -\nabla \varphi; \\ \mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{e}_j \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \varepsilon_j^S \cdot \mathbf{E}; \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений;  $\rho_j$  — плотность тела;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции;  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{f}_j$  — вектор массовых сил;  $\varphi$  — электрический потенциал;  $\alpha, \beta, \zeta, \beta_{dj}, \zeta_d$  — коэффициенты демпфирования;  $\mathbf{c}_j^E, \mathbf{e}_j^T, \varepsilon_j^S$  — тензоры упругих констант, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, индекс  $j$  отвечает номеру тела в модели.

К системе (1) добавляются соответствующие механические и электрические граничные условия. В частности, на электродах задается значение электрического потенциала  $\varphi$ , на неэлектропроводящей части поверхности условие отсутствия зарядов т.е. равенство нулю нормальной компоненты вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$ . В случае свободного электрода  $S_E$  потенциал  $V_0$  на нем неизвестен и находится из дополнительного условия:

$$\int_{S_E} \dot{D}_n ds = 0. \quad (2)$$

Это же условие ставится при нахождении частот антирезонанса.

Для анализа эффективности устройства используются значения выходного электрического потенциала, механические напряжения и коэффициент электромеханической связи (КЭМС), который рассчитывается по формуле:

$$k = \sqrt{1 - (f_r / f_a)^2}, \quad (3)$$

где  $f_r$  и  $f_a$  — частоты резонанса и антирезонанса соответственно.

Расчет коэффициентов затухания при вычислении выходного потенциала на резонансных частотах проводился с использованием подхода [25], для которого предполагалось постоянное значение добротности  $Q$  на первых двух резонансных частотах:

$$\alpha_d = \frac{2\pi f_{r1} f_{r2}}{Q(f_{r1} + f_{r2})}, \quad \beta_d = \zeta_d = \frac{1}{2\pi Q(f_{r1} + f_{r2})}. \quad (4)$$

В качестве таких резонансных частот выбираются рабочие частоты ( $f_{r1}$ ) и следующие ближайшие к ним ( $f_{r2}$ ). Для рассматриваемых конструкций рабочей частотой является первая изгибная мода.

При моделировании пористых композитов использовались эффективные модули, полученные для пористой пьезокерамики PZT-4 методом осреднения [20, 26] в пакете ACELAN-COMPOS. Данные были получены для материалов с пористостью до 80 %. Используемые в численных экспериментах эффективные модули приведены в таблице 1.

Эффективные модули пористой керамики [20]

Пористость, %	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7500	6750	6000	5250	4500	3750	3000	2250	1500
$c_{11}^E$ , ГПа	139	115,6	92,5	68,5	50,5	33,4	20,7	12,6	6,8
$c_{12}^E$ , ГПа	77,8	61,5	46,6	31,4	21	11,6	6,2	2,8	1,3
$c_{13}^E$ , ГПа	74,3	58,2	42,5	28,2	18,7	10,6	5,2	2,4	1
$c_{33}^E$ , ГПа	115	95,3	72,3	54,2	39,1	27,2	16,3	9,1	4,7
$c_{44}^E$ , ГПа	25,6	22,3	18,3	14,4	11	7,4	4,4	2,3	1
$e_{31}$ , Кл/м <sup>2</sup>	-5,2	-4,23	-3,14	-2,07	-1,32	-0,75	-0,43	-0,21	-0,1
$e_{33}$ , Кл/м <sup>2</sup>	15,1	13,38	11,37	9,59	7,68	5,93	3,93	2,3	1,25
$e_{15}$ , Кл/м <sup>2</sup>	12,7	10,96	8,96	6,91	5	3,3	1,95	1	0,44
$\vartheta_{11}^S / \varepsilon_0$	730	663	582	509	439	349	263	191	122
$\vartheta_{33}^S / \varepsilon_0$	635	567	492	413	345	270	199	130	75

При моделировании композита связности 1–3 (рис. 1) эффективные свойства (таблицы 2, 3) взяты из работы [24].

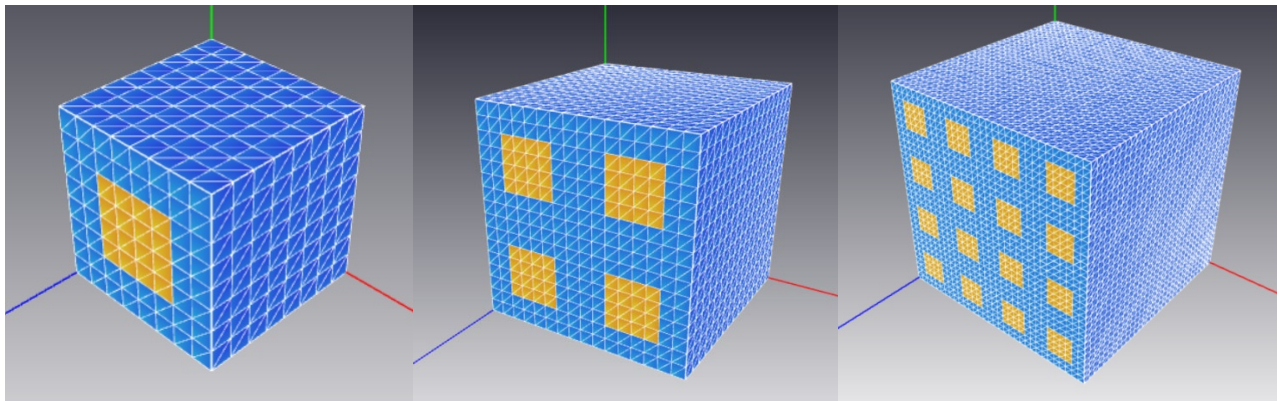


Рис. 1. Примеры представительных объемов со связностью 1–3, построенных в комплексе ACELAN-COMPOS

Таблица 2

Материальные свойства композита 1–3 с матрицей 1

Процент пористости	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	5250	5060	4880	4690	4500	4310	4130	3940	3750
$c_{11}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	6,36	6,12	5,83	5,44	5,05	4,54	4,05	3,63	3,27
$c_{12}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	2,77	2,66	2,52	2,31	2,09	1,8	1,53	1,28	1,09
$c_{13}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	2,82	2,67	2,48	2,25	2,03	1,78	1,54	1,36	1,22
$c_{33}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	6,22	5,89	5,51	5,12	4,76	4,43	4,08	3,83	3,67
$c_{44}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	1,64	1,58	1,51	1,43	1,35	1,25	1,16	1,08	1,02
$e_{33}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	-1,3	-1,05	-0,785	-0,523	-0,33	-0,185	-0,108	-0,053	-0,025
$e_{31}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	3,77	3,35	2,86	2,4	1,93	1,49	0,972	0,58	0,31
$e_{15}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	3,66	3,26	2,81	2,31	1,83	1,3	0,845	0,465	0,221
$\vartheta_{11}^{S\text{eff}} / \varepsilon_0$	51,4	46,5	40,7	35,2	30,1	24,1	18,3	13,1	8,61
$\vartheta_{33}^{S\text{eff}} / \varepsilon_0$	159	142	124	104	86,9	68,2	50,5	33,2	19,5

Материальные свойства композита 1–3 с матрицей 2

Процент пористости	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	3000	2810	2630	2440	2250	2060	1880	1690	1500
$c_{11}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	1,15	1,13	1,1	1,06	1,02	0,956	0,882	0,796	0,685
$c_{12}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	0,237	0,233	0,228	0,222	0,214	0,202	0,186	0,158	0,133
$c_{13}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	0,332	0,315	0,294	0,269	0,246	0,219	0,184	0,155	0,125
$c_{33}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	2,25	2,03	1,78	1,54	1,32	1,12	0,904	0,74	0,632
$c_{44}^{E\text{eff}}$ , 10 <sup>10</sup> , Н/м <sup>2</sup>	0,425	0,415	0,403	0,388	0,369	0,341	0,304	0,261	0,219
$e_{33}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	-1,3	-1,05	-0,785	-0,523	-0,33	-0,185	-0,108	-0,053	-0,025
$e_{31}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	3,77	3,35	2,86	2,39	1,93	1,49	0,972	0,58	0,31
$e_{31}^{\text{eff}}$ , Кл/м <sup>2</sup>	1,44	1,35	1,24	1,1	0,959	0,783	0,591	0,381	0,209
$\varepsilon_{11}^{\text{Seff}} / \varepsilon_0$	14,1	12,9	11,5	10,1	8,9	7,39	5,93	4,62	3,47
$\varepsilon_{33}^{\text{Seff}} / \varepsilon_0$	159	142	123	104	86,9	68,2	50,5	33,2	19,5

**Конструкции слоистой пластины и конечноэлементная модель**

Рассматривается пьезоэлемент представляющий собой слоистую пластину (рис. 2), в которой каждый слой является пьезокомпозитом 1–3 связности, причем пьезокерамические стержни (отмечены черными кружочками на рис. 2) выполнены из пористой пьезокерамики. Примечательно, что два симметричных относительно срединной поверхности слоя имеют встречную продольную поляризацию.

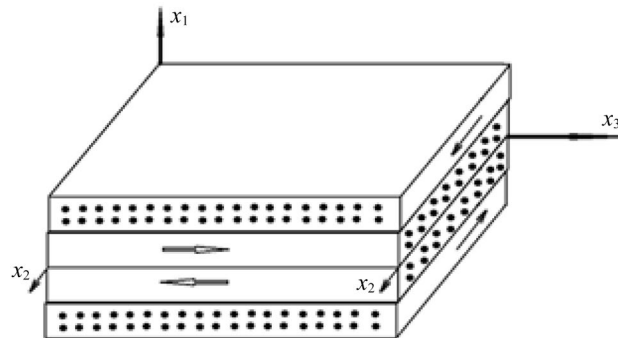


Рис. 2. Конструкции слоистой пластины

В случае, когда пьезоэлемент состоит из двух слоев, построена его конечно элементная модель. На рис. 3 а представлена геометрическая модель с двумя противоположно поляризованными слоями (красный и желтый цвета), а на рис. 3 б — сетка треугольных квадратичных конечных элементов (1350 конечных элементов, 2839 узел).

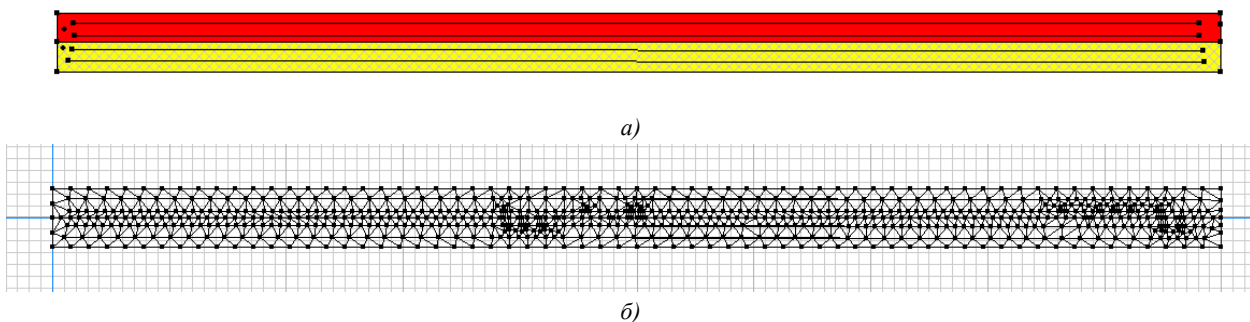


Рис. 3. Двухслойный пьезоэлемент: а — геометрическая модель; б — конечноэлементная сетка

Построенная в этом пункте конечно-элементная модель использовалась при проверке адекватности прикладной теории в расчетах в следующих пунктах.

**Результаты исследования**

*Построение прикладной теории расчета поперечных колебаний слоистой конструкции с поляризацией слоев в плоскости пластины.*

Прикладная теория изгибных колебаний рассматриваемой пластины, состоящей из четырех слоев, в которой верхний и нижний слои изотропны (толщиной  $H$  с коэффициентами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$ ), а внутренние электроупругие толщиной  $h$  строятся на основе гипотез типа Кирхгоффа-Лява. Первая гипотеза заключается в равенстве нулю нормальных напряжений во всем объеме пластины  $\sigma_{11} = 0$ , что позволяет выразить продольные деформации:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{e_{31} \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) + c_{12} \varepsilon_{22} + c_{13} \varepsilon_{33}}{c_{11}}. \quad (5)$$

Вторая гипотеза показывает распределение компонент вектора перемещений и электрического потенциала имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) = UX(y, z), u_2(x, y, z) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} UX(y, z)\right)x, u_3(x, y, z) = -\left(\frac{\partial}{\partial z} UX(y, z)\right)x, \\ \phi(x, y, z) = \Phi(y, z), \varepsilon_{22} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z)\right)x, \varepsilon_{33} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z)\right)x, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $UX(y, z)$  — прогиб срединной поверхности,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ .

Учет соотношений (5) и (6) в системе (1) в случае установившихся колебаний с круговой частотой  $\omega$  приводит к системе уравнений относительно двух неизвестных функций  $\Phi(y, z)$ ,  $UX(y, z)$ .

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} \left(2e_{31} - \frac{2c_{12}e_{31}}{c_{11}}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right) - 2e_{15} \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right)\right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} \Phi(y, z)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}} + 2e_{33}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} \Phi(y, z)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}} + 2e_{33}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} \Phi(y, z)\right) + \\ & \quad + \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{2c_{12}^2}{c_{11}} - 2c_{11}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^3 - \frac{1}{8}h^3\right) - \frac{1}{24} \left(-2\lambda - 4\mu + \frac{2\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right) h^3\right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} UX(y, z)\right) + \left(\frac{1}{3}\mu h^3 + \frac{8}{3}c_{44} \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^3 - \frac{1}{8}h^3\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{2c_{12}c_{13}}{c_{11}} - 2c_{13}\right)\right) \times \\ & \quad \times \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^3 - \frac{1}{8}h^3\right) - \frac{1}{12} \left(\frac{2\lambda^2}{\lambda + 2\mu} - 2\lambda\right) h^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial y^2} UX(y, z)\right) + \\ & \quad + \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{2c_{13}^2}{c_{11}} - 2c_{33}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^3 - \frac{1}{8}h^3\right) - \frac{1}{24} \left(-2\lambda - 4\mu + \frac{2\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right) h^3\right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial^4}{\partial z^4} UX(y, z)\right) - \omega^2 \rho h UX(y, z) - p(y, z) = 0. \\ & -2g_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(y, z)\right) + \left(-\frac{2e_{31}^2}{c_{11}} - 2g_{33}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(y, z)\right) + \\ & + \frac{1}{H} \left(\left(\frac{c_{12}e_{31}}{c_{11}} - 2e_{15} - e_{31}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z)\right)\right) + \\ & + \frac{1}{H} \left(\left(\frac{c_{13}e_{31}}{c_{11}} - e_{33}\right) \left(\left(\frac{1}{2}h + H\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} UX(y, z)\right)\right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M_{22} &= \frac{1}{24} \left( -2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) - \right. \\
 &- \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( 2\lambda \left( - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) \lambda - \lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \right) - 2\lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \right) \times \\
 &- 2c_{13} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) - 2c_{11} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^3 - \frac{1}{8}h^3 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( 2e_{31} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi(y, z) \right) - \frac{2c_{12}e_{31} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi(y, z) \right)}{c_{11}} \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right). \\
 \\
 M_{33} &= \frac{1}{24} \left( - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( 2\lambda \left( - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) \lambda - \lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \right) - \right. \\
 &- 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) \lambda - 2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \right) h^3 + \\
 &+ \frac{1}{3} \left( - \frac{1}{c_{11}} \left( 2c_{13} \left( - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) c_{12} - c_{13} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \right) \right) - \right. \\
 &- 2c_{13} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} UX(y, z) \right) - 2c_{33} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} UX(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^3 - \frac{1}{8}h^3 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( - \frac{2c_{13}e_{31} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi(y, z) \right)}{c_{11}} + 2e_{33} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi(y, z) \right) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right). \\
 \\
 M_{23} &= - \frac{1}{6} \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} UX(y, z) \right) h^3 - \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} UX(y, z) \right) c_{44} \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^3 - \frac{1}{8}h^3 \right) + \\
 &+ e_{15} \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right). \\
 \\
 Q_2 &= \frac{1}{6} \mu \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) h^3 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) c_{44} \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^3 - \frac{1}{8}h^3 \right) - \\
 &- e_{15} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \Phi(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right) - \frac{1}{24} \left( -2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} UX(y, z) \right) - \right. \\
 &- \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( 2\lambda \left( - \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} UX(y, z) \right) \lambda - \lambda \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) \right) \right) - 2\lambda \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) \left. \right) h^3 - \\
 &- \frac{1}{3} \left( - \frac{1}{c_{11}} \left( 2c_{12} \left( - \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} UX(y, z) \right) c_{12} - c_{13} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) \right) \right) - \right. \\
 &- 2c_{13} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} UX(y, z) \right) - 2c_{11} \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} UX(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^3 - \frac{1}{8}h^3 \right) - \\
 &- \frac{1}{2} \left( 2e_{31} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \Phi(y, z) \right) - \frac{2c_{12}e_{31} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \Phi(y, z) \right)}{c_{11}} \right) \left( \left( \frac{1}{2}h + H \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3 = & -\frac{1}{24} \left( -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( 2\lambda \left( -\left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) \lambda - \lambda \left( \frac{\partial^3}{\partial z^3} UX(y, z) \right) \right) \right) - \right. \\
 & \left. - 2 \left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) \lambda - 2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^3}{\partial z^3} UX(y, z) \right) \right) h^3 - \\
 & -\frac{1}{3} \left( -\frac{1}{c_{11}} \left( 2c_{13} \left( -\left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) c_{12} - c_{13} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^3} UX(y, z) \right) \right) \right) - \right. \\
 & \left. - 2c_{13} \left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) - 2c_{33} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^3} UX(y, z) \right) \right) \left( \left( \frac{1}{2} h + H \right)^3 - \frac{1}{8} h^3 \right) - \\
 & -\frac{1}{2} \left( -\frac{2c_{13}e_{31} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(y, z) \right)}{c_{11}} + 2e_{33} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(y, z) \right) \right) \left( \left( \frac{1}{2} h + H \right)^2 - \frac{1}{4} h^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{6} \mu \left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) h^3 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} UX(y, z) \right) c_{44} \left( \left( \frac{1}{2} h + H \right)^3 - \frac{1}{8} h^3 \right) - \\
 & - e_{15} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(y, z) \right) \left( \left( \frac{1}{2} h + H \right)^2 - \frac{1}{4} h^2 \right).
 \end{aligned}$$

Для случая панели, состоящей из двух внутренних слоев (рис. 2 и 3 а), второе уравнение системы (7) приводится к виду:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{c_{13}e_{31}}{c_{11}} - e_{33} \right) h \left( \frac{d}{dz} UX(z) \right) + \left( -\frac{e_{31}^2}{c_{11}} - g_{33} \right) \Phi(z) + C_1 z + C_2 = 0, \quad (8)$$

из которого выражается электрический потенциал:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} \frac{(-c_{11}e_{33}h + c_{13}e_{31}h) \left( \frac{d}{dz} UX(z) \right)}{g_{33}c_{11} + e_{31}^2} + \frac{1}{4} \frac{4C_1c_{11}z + 4C_2c_{11}}{g_{33}c_{11} + e_{31}^2}. \quad (9)$$

После этого первое уравнение (7) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{1}{24} \left( \frac{2c_{13}^2}{c_{11}} - 2c_{33} \right) h^3 - \frac{1}{32} \frac{1}{c_{11}g_{33} + e_{31}^2} \left( \left( -\frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}} + 2e_{33} \right) h^2 (-c_{11}e_{33}h + c_{13}e_{31}h) \right) \right) \times \\
 & \times \left( \frac{d^4}{dz^4} UX(z) \right) - \omega^2 \rho h UX(z) - p(z) = 0.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнение (7) в общем случае решается численно, тогда как уравнение (10) может быть решено аналитически.

#### **Проверка адекватности предложенного метода на основе сравнения результатов с расчетами в пакете ACELAN**

В качестве проверки применимости предложенной прикладной теории решаются две задачи для двухслойной панели: определение первой резонансной частоты изгибной моды и задача об установившихся колебаниях на частоте 200 Гц под действием равномерно распределенной нагрузки на верхней плоскости пластины с амплитудой 1000 Па. При этом длина пластины — 0,1 м, толщина каждого слоя — 0,0025 м, материал — PZT-4. Пластина закреплена на левом конце и шарнирно оперта на правом (рис. 3 а).

Собственная резонансная частота первой изгибной моды (рис. 4) в расчете в пакете ACELAN оказалась равной 1348,68 Гц, расчет по прикладной теории — 1360 Гц, т.е. погрешность составляет 0,8 %.

Расчет вынужденных колебаний показал следующие результаты: на рис. 4 представлено распределение вертикальных смещений на деформированной пластине.

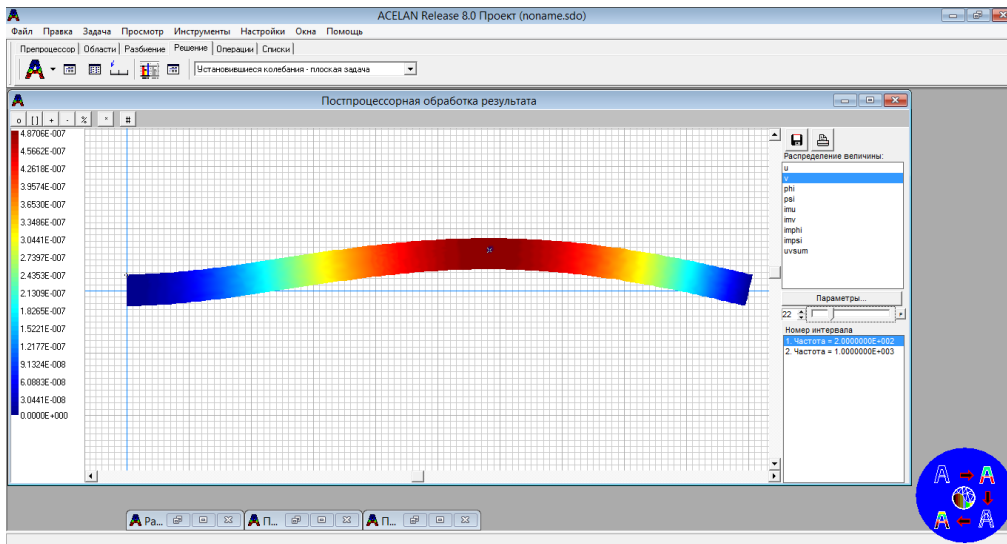
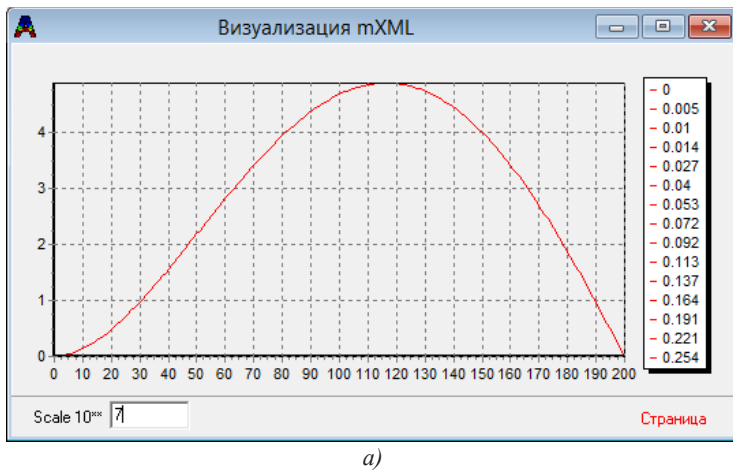
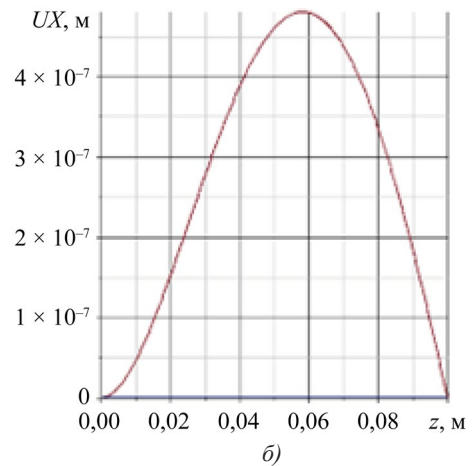


Рис. 4. Распределение вертикального смещения на частоте 200 Гц

На рис. 5 представлены графики прогиба серединной поверхности пластины.



а)



б)

Рис. 5. Прогиб пластины: а — ACELAN; б — прикладная теория уравнения (8)–(10)

На рис. 6 и 7 представлены аналогичные результаты для горизонтального смещения, а на рис. 8 и 9 — для электрического потенциала.

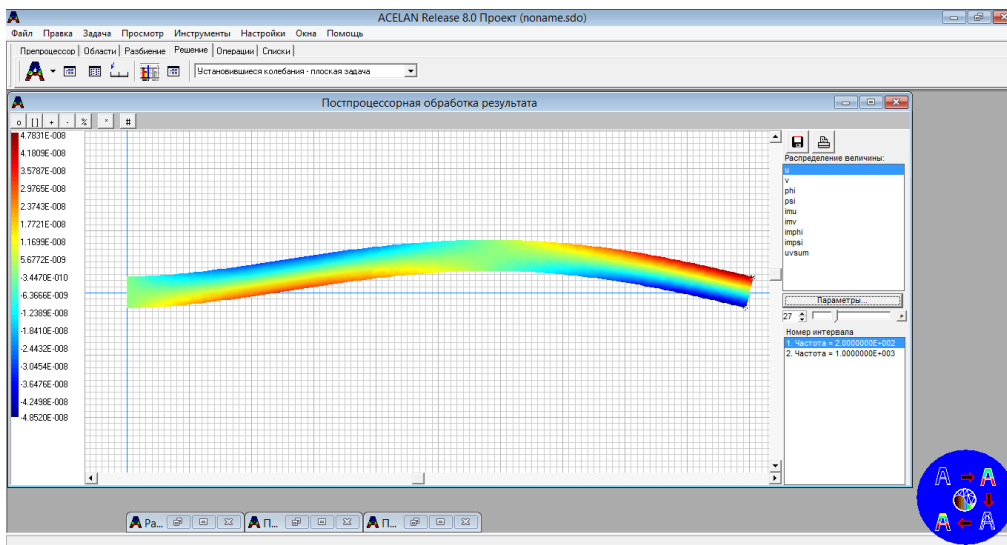


Рис. 6. Распределение горизонтального смещения на частоте 200 Гц

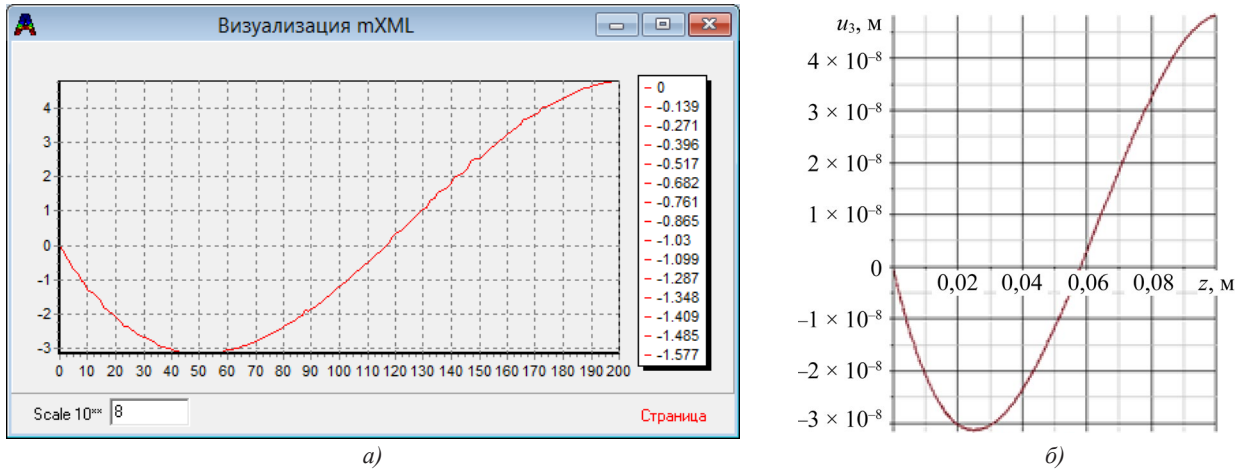


Рис. 7. Горизонтальное смещение на поверхности пластины: а — ACELAN; б — прикладная теория

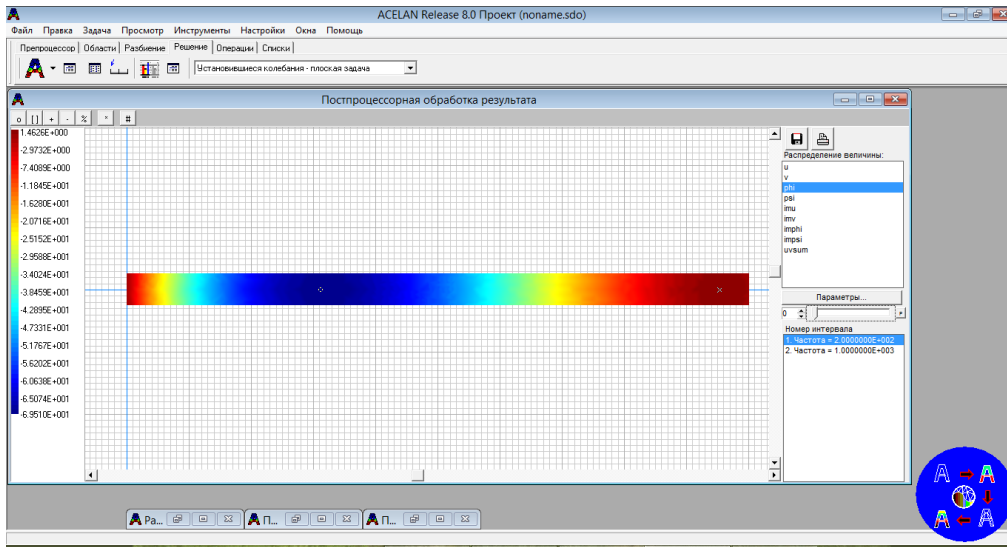


Рис. 8. Распределение электрического потенциала на частоте 200 Гц

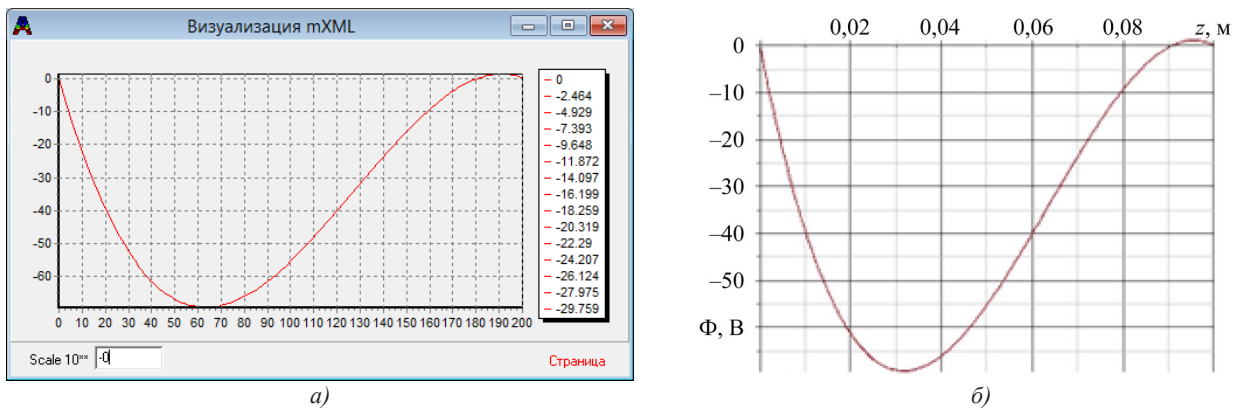


Рис. 9. Электрический потенциал в пластине: а — ACELAN; б — прикладная теория

**Обсуждение.** Ключевым результатом настоящей работы является прикладная двумерная теория и демонстрация высокой степени соответствия между полученными на её основе решениями и данными моделирования в конечно-элементном пакете ACELAN. Отклонение в расчёте первой резонансной частоты составило всего 0,8 %, что более чем достаточно для инженерных приложений. Визуальное и количественное сопоставление графиков прогибов, горизонтальных смещений и распределения электрического потенциала при вынужденных колебаниях также показывает их практически полное совпадение (рис. 5, 7, 9), что подтверждает адекватность предложенной модели в рассматриваемом диапазоне частот.

Основная область применения разработанной теории — низкочастотный диапазон; геометрия конструкции — тонкие пластины; диапазон вариации материальных параметров слоёв — относительно небольшой. Для более широких интервалов свойств при построении прикладной теории потребуются учитывать ломаную нормаль и использовать более высокий порядок аппроксимации характеристик механического и электрического полей по толщине конструкции.

Предложенная теория позволяет избежать ресурсоёмкого трёхмерного моделирования на этапах предварительного проектирования. Практическая значимость результатов заключается в создании эффективного и быстрого инструмента для инженеров и исследователей: вместо длительных расчётов в «тяжёлых» САЕ-пакетах могут применяться аналитические или численно-аналитические решения уравнений (7)–(10) для оперативной оценки динамических характеристик, проведения параметрических исследований и оптимизации конструкций пьезоэлектрических преобразователей, сенсоров и устройств сбора энергии.

**Заключение.** В рамках исследования успешно решена задача построения и верификации прикладной двумерной теории для расчёта поперечных колебаний слоистых пластин из пьезокомпозита 1–3 связности с пористыми пьезоактивными элементами 3–0 и 3–3 связности.

Разработана математическая модель на основе гипотез Кирхгофа-Лява, описывающая динамическое поведение тонкой слоистой электроупругой пластины со встречной продольной поляризацией слоёв.

Получена система дифференциальных уравнений, которая для частного случая двухслойной панели сводится к одному уравнению, допускающему аналитическое решение.

Проведена верификация предложенной теории путём сопоставления её результатов с данными численного моделирования в конечно-элементном пакете ACELAN; погрешность в определении первой резонансной частоты не превысила 0,8 %.

Доказана адекватность теории при расчёте вынужденных колебаний: профили вертикальных и горизонтальных смещений, а также распределение электрического потенциала, вычисленные по прикладной теории, практически полностью совпали с результатами конечно-элементного моделирования.

Таким образом, показано, что предложенная двумерная теория является эффективным и вычислительно экономичным инструментом для анализа и проектирования тонкостенных конструкций из пьезокомпозитных материалов, что позволяет существенно ускорить разработку по сравнению с использованием универсальных конечно-элементных пакетов.

Перспективы дальнейших исследований связаны с развитием следующего уровня гомогенизации — переходом к эффективным свойствам композита 2–2 связности с последующим рассмотрением двухслойной пластины, а также с усложнением аппроксимации механических и электрических полей, включая учёт краевых эффектов. Вместе с тем при усложнении модели следует помнить, что основная практическая цель подобных теорий — расчёт выходных интегральных характеристик устройств: резонансных частот, выходного электрического потенциала, мощности и др.

#### Список литературы / References

1. Newnham RE, Skinner DP, Cross LE. Connectivity and Piezoelectric-Pyroelectric Composites. *Materials Research Bulletin*. 1978;13(5):525–536. [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7)
2. Avellaneda M, Swart PJ. Calculating the Performance of 1–3 Piezocomposite for Hydrophone Applications: An Effective Medium Approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1998;103(3):1449–1467. <http://doi.org/10.1121/1.421306>
3. Berger H, Kari S, Gabbert U, Rodriguez-Ramos R, Guinovart-Diaz R, Otero JA, et al. An Analytical and Numerical Approach for Calculating Effective Material Coefficients of Piezoelectric Fiber Composites. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(21–22):5692–5714. <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.016>
4. Bravo-Castillero J, Guinovart-Diaz R, Sabina FJ, Rodriguez-Ramos R. Closed-Form Expressions for the Effective Coefficients of a Fiber-reinforced Composite with Transversely Isotropic Constituents – II. Piezoelectric and Square Symmetry. *Mechanics of Materials*. 2001;33(4):237–248. [http://doi.org/10.1016/S0167-6636\(00\)00060-0](http://doi.org/10.1016/S0167-6636(00)00060-0)
5. Castillero JB, Diaz RG, Hernandez JAO, Ramos RR. Electromechanical Properties of Continuous Fibre-reinforced Piezoelectric Composites. *Mechanics of Composite Materials*. 1997;33:475–482. <https://doi.org/10.1007/BF02256903>
6. Gibiansky LV, Torquato S. On the Use of Homogenization Theory to Design Optimal Piezocomposites for Hydrophone Applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997;45(5):689–708. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(96\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(96)00106-8)
7. Guinovart-Diaz R, Bravo-Castillero J, Rodriguez-Ramos R, Sabina FJ, Martinez-Rosado R. Overall Properties of Piezocomposite Materials 1–3. *Materials Letters*. 2001;48(2):93–98. [http://doi.org/10.1016/S0167-577X\(00\)00285-8](http://doi.org/10.1016/S0167-577X(00)00285-8)

8. Levin VM, Sabina FJ, Bravo-Castillero J, Guinovart-Díaz R, Rodríguez-Ramos R, Valdiviezo-Mijangos OC. Analysis of Effective Properties of Electroelastic Composites Using the Self-Consistent and Asymptotic Homogenization Methods. *International Journal of Engineering Science*. 2008;46(8):818–834. <http://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.01.017>
9. Sevostianov I, Levin V, Kachanov M. On the Modeling and Design of Piezocomposites with Prescribed Properties. *Archive of Applied Mechanics*. 2001;71:733–747. <http://doi.org/10.1007/s004190100181>
10. Pramanik R, Arockiarajan A. Effective Properties and Nonlinearities in 1–3 Piezocomposites: A Comprehensive Review. *Smart Materials and Structures*. 2019;28(10):103001. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ab350a>
11. Aloui R, Larbi W, Chouchane M. Uncertainty Quantification and Global Sensitivity Analysis of Piezoelectric Energy Harvesting Using Macro Fiber Composites. *Smart Materials and Structures*. 2020;29(9):095014. <http://doi.org/10.1088/1361-665X/ab9f12>
12. Yu Shi, Hallett SR, Meiling Zhu. Energy Harvesting Behaviour for Aircraft Composites Structures Using Macro-Fibre Composite: Part I – Integration and Experiment. *Composite Structures*. 2017;160:1279–1286. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.037>
13. Hyun J Song, Young-Tai Choi, Wereley NM, Purekar A. Comparison of Monolithic and Composite Piezoelectric Material-based Energy Harvesting Devices. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014;25(14):1825–1837. <http://doi.org/10.1177/1045389X14530592>
14. Swallow LM, Luo JK, Siores E, Patel I, Dodds D. A Piezoelectric Fibre Composite Based Energy Harvesting Device for Potential Wearable Applications. *Smart Materials and Structures*. 2008;17(2):025017. <http://doi.org/10.1088/0964-1726/17/2/025017>
15. Della CN, Dongwei Shu. Performance of 1–3 Piezoelectric Composites with Porous Piezoelectric Matrix. *Applied Physics Letters*. 2013;103:132905. <https://doi.org/10.1063/1.4822109>
16. Della ChN, Dongwei Shu. The Performance of 1–3 Piezoelectric Composites with a Porous Non-piezoelectric Matrix. *Acta Materialia*. 2008;56(4):754–761. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.10.022>
17. Gibiansky LV, Torquato S. On the Use of Homogenization Theory to Design Optimal Piezocomposites for Hydrophone Applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997;45(5):689–708. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(96\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(96)00106-8)
18. Sigmund O, Torquato S, Aksay IA. On the Design of 1–3 Piezocomposites Using Topology Optimization. *Journal of Materials Research*. 1998;13:1038–1048. <https://doi.org/10.1557/JMR.1998.0145>
19. Sladek J, Novak P, Bishay PL, Sladek V. Effective Properties of Cement-based Porous Piezoelectric Ceramic Composites. *Construction and Building Materials*. 2018;190:1208–1214. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.09.127>
20. Nasedkin AV, Oganessian PA, Soloviev AN. Analysis of Rosen Type Energy Harvesting Devices from Porous Piezoceramics with Great Longitudinal Piezomodulus. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2021;101(3):e202000129. <http://doi.org/10.1002/zamm.202000129>
21. Roscow JI, Lewis RWC, Taylor J, Bowen CR. Modelling and Fabrication of Porous Sandwich Layer Barium Titanate with Improved Piezoelectric Energy Harvesting Figures of Merit. *Acta Materialia*. 2017;128:207–217. <http://doi.org/10.1016/j.actamat.2017.02.029>
22. Rybyanets AN, Naumenko AA, Lugovaya MA, Shvetsova NA. Electric Power Generations from PZT Composite and Porous Ceramics for Energy Harvesting Devices. *Ferroelectrics*. 2015;484(1):95–100. <https://doi.org/10.1080/00150193.2015.1060065>
23. Mingyang Yan, Zhida Xiao, Jingjing Ye, Xi Yuan, Zihé Li, Chris Bowen, et al. Porous Ferroelectric Materials for Energy Technologies: Current Status and Future Perspectives. *Energy & Environmental Science*. 2021;14(12):6158–6190. <http://doi.org/10.1039/d1ee03025f>
24. Do TB, Nasedkin A, Oganessian P, Soloviev A. Multilevel Modeling of 1-3 Piezoelectric Energy Harvester Based on Porous Piezoceramics. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023;9(3):763–774. <http://doi.org/10.22055/jacm.2023.42264.3900>
25. Belokon' AV, Nasedkin AV, Solov'ev AN. New Schemes for the Finite-Element Dynamic Analysis of Piezoelectric Devices. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002;66(3):481–490. [http://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00058-8](http://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00058-8)
26. Oganessian PA, Shtein OO. Implementation of Basic Operations for Sparse Matrices when Solving a Generalized Eigenvalue Problem in the ACELAN-COMPOS Complex. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(2):121–129. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-121-129>

**Об авторах:**

**Аркадий Николаевич Соловьев**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математика и физика» Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, д. 8), главный научный сотрудник Научно-производственного центра инжиниринговых технологий Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, д. 8), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

**Мария Сергеевна Германчук**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатика» Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, (295007, Республика Крым, г. Симферополь, пр. Вернадского, д. 4), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [m.german4uk@yandex.ru](mailto:m.german4uk@yandex.ru)

**Павел Артурович Оганесян**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» Южного федерального университета. (344058 г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8 а, ИММиК), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [poganesyan@sfedu.ru](mailto:poganesyan@sfedu.ru)

**Заявленный вклад авторов:**

**А.Н. Соловьев:** разработка концепции, научное руководство, получение финансирования, разработка методологии, написание черновика рукописи, написание рукописи — внесение замечаний и исправлений.

**М.С. Германчук:** формальный анализ, валидация результатов, создание и подготовка рукописи, визуализация.

**П.А. Оганесян:** проведение исследования, разработка программного обеспечения, получение финансирования, визуализация.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

**About the Authors:**

**Arkadiy N. Soloviev**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Mathematics and Physics Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), Chief Researcher of the Research and Production Center for Engineering Technologies, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

**Maria S. Germanchuk**, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Informatics Department, V.I. Vernadsky Crimean Federal University (4, Vernadskogo Prospect, Simferopol, 295007, Republic of Crimea), Associate Professor of the Mathematics and Physics Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [m.german4uk@yandex.ru](mailto:m.german4uk@yandex.ru)

**Pavel A. Oganessian**, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Mathematical Modeling Department, Vorovich Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science, Southern Federal University (8a, Milchakova Str., Rostov-on-Don, 344058, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [poganesyan@sfedu.ru](mailto:poganesyan@sfedu.ru)

**Claimed Contributorship:**

**AN Soloviev:** conceptualization, supervision, funding acquisition, methodology, writing – original draft preparation, writing – review & editing.

**MS Germanchuk:** formal analysis, validation, visualization.

**PA Oganessian:** investigation, software, funding acquisition, visualization.

**Conflict of Interest Statement:** the authors declare no conflict of interest.

**All authors have read and approved the final version of the manuscript.**

Поступила в редакцию / Received 01.12.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 18.12.2025

Принята к публикации / Accepted 12.01.2026