УДК 517.982.274+517.983.22 DOI: 10.12737/3500

О представлении линейных операторов, коммутирующих с дифференцированием, в односвязной области*

А. В. Братищев

Пусть $H(G)$ есть пространство аналитических функций одной переменной в односвязной области G комплексной плоскости. Известно, что линейный оператор комплексной свёртки порождается аналитической функцией одной переменной, вообще говоря, многозначной. Решается известная задача, когда все такие функции будут однозначными. Оказалось, что решение связано с геометрией области G. Назовём вычетом области G множество $s(G)$ со свойством $s(G)+G \subseteq G$. Описан класс односвязных областей, вычет которых есть связное множество. Пусть линейный оператор непрерывен в пространстве функций, аналитических в односвязной области G, и коммутирует с дифференцированием. Тогда он представим в виде оператора комплексной свёртки. В работе доказано, что для областей со связным вычетом порождающая такой оператор функция всегда будет однозначной. Если вычет области G не связный, то всегда существует оператор комплексной свёртки, у которого порождающая ядро функция будет многозначной.

Ключевые слова: *вычет области, оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования, ядро оператора.*

Введение. Рассматриваемые в статье задачи входят в направление исследований, представленное работами [1–7]. Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и последовательность ограниченных расширяющихся областей $\{G_n\} \uparrow G$ с кусочно-гладкой границей исчерпывает G. $H(G)$ — пространство Фреше аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. $\mathcal{L}(G)$ — пространство непрерывных в $H(G)$ линейных операторов. Обозначим через $B(\bar{G}_n)$ банахово пространство аналитических в G_n и непрерывных на $\bar{G}_n$ функций с нормой $\|f(z)\|_n := \max\limits_{z \in \bar{G}_n} |f(z)|$. Тогда $\forall n \ \exists N := N(n)$ оператор $L \in \mathcal{L}(G)$ расширяется до непрерывного оператора $L_n : B(\bar{G}_N) \to B(\bar{G}_n)$.

Обозначим $k_n(t,z) := \left[L_n\left(\frac{1}{t-\zeta}\right)\right](z)$, $t \in \bar{G}'_N$, $\zeta \in \bar{G}_N$, $z \in \bar{G}_n$. Эта функция голоморфна на односвязной области $\bar{G}'_N \times G_n \subseteq \mathbb{C}^2$, и связана с линейным оператором L формулой $[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma G_{N+1}} y(t) \cdot k_n(t,z)\,dt$, $z \in G_n$ [2]. Локально аналитическая на $G' \times G$ функция $k(t,z)$, совпадающая с $k_n(t,z)$ на соответствующей области $\bar{G}'_N \times G_n$, называется ядром оператора L.

Обозначим через $\mathcal{L}_d(G)$ подпространство в $\mathcal{L}(G)$ операторов, коммутирующих с операцией дифференцирования: $L\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz}L$. Назовём вычетом области G множество $s(G) := \{z \in \mathbb{C} : \ z + G \subseteq G\}$. Для вычета справедливо тождество $(G' - G)' = s(G)$ [6].

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

ТЕОРЕМА. Пусть G есть односвязная область. Функция $k_n(t,z_0)$, $z_0 \in G$ аналитически продолжается до локально аналитической функции $A(t)$ на $G' - G = (s(G))'$ и $k(t,z) \equiv A(t-z)$. При этом в случае несвязного $s(G)$ всегда найдётся оператор $L \in \mathcal{L}_d(G)$, для которого функция $A(t)$ многозначная, а в случае связного $s(G) \neq \{0\}$ функция $A(t)$ всегда однозначная.

Вспомогательные утверждения. В следующей лемме доказаны необходимые свойства вычета области и получено аналитическое описание класса односвязных областей, вычет которых содержит луч.

ЛЕММА. 1) Для односвязной области G множество $s(G) \cup \{\infty\}$ замкнуто.

2) Если нуль есть предельная точка $s(G)$, то $s(G)$ содержит некоторый луч $l_{\varphi_0} := \{r \exp\{i\varphi_0\} : \ r \geq 0\}$.

3) Произвольная односвязная область G с $l_{\varphi_0} \subseteq s(G)$ задаётся полунепрерывной сверху на $(-\infty, +\infty)$ функцией $k(x)$ со связной областью определения $\{x : \ k(x) < \infty\}$ по формуле $G = \{z = re^{\varphi i} : \ k(r\sin(\varphi_0 - \varphi)) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\}$.

Доказательство. Покажем замкнутость $s(G) \cup \{\infty\}$. Пусть z_0 — предельная точка $s(G)$: $\exists \{z_k\} \subset S(G) \lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$. Фиксируем произвольную точку $z' \in G$ и покажем, что $z_0 + z' \in G$ (тогда $z_0 + G \subseteq G$, и значит $z_0 \in s(G)$). $\forall \varepsilon > 0 \ \ D(z', \varepsilon) \subset G \Rightarrow \forall k > k(\varepsilon) \ \ z_k + D(z', \varepsilon) \subset G$.

Выберем k таким, что

$$|z_0 - z_k| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow z_0 + D\left(z', \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset z_k + D\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) + D\left(z', \frac{\varepsilon}{2}\right) = z_k + D(z', \varepsilon) \subset G,$$

что и требовалось доказать.

Докажем утверждение 2). В силу условия существует последовательность $\{z_k = r_k \exp\{i\varphi_k\}\} \to 0$, $\{z_k\} \subset s(G)$. Считая $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, выберем сходящуюся подпоследовательность. Без потери общности считаем $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi_0$. Фиксируем на луче $l_{\varphi_0} := \{r \exp\{i\varphi_0\} : \ r \geq 0\}$ произвольную точку $r_0 \exp\{i\varphi_0\} =: z_0 \neq 0$ и покажем, что она будет предельной для множества точек вида $\{i \cdot z_k\}_{k=1,\ i=1}^{\infty \quad \infty} \subset s(G)$ (а значит принадлежит $s(G)$). С этой целью для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем такой номер k, чтобы

$$|\varphi_0 - \varphi_k| < \arcsin\left(\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2r_0}\right) \text{ и } |z_k| < \varepsilon.$$

Тогда луч $l_{\varphi_k} := \{r \exp\{i\varphi_k\} : \ r \geq 0\}$ пересекает ε-окрестность $D(z_0, \varepsilon)$ по хорде длины $> \varepsilon$. Поэтому на этой хорде лежит хотя бы одна точка вида $i \cdot z_k$, и значит $i \cdot z_k \in D(z_0, \varepsilon)$.

Утверждение 3) докажем сначала для случая $l_{\pi/2} \subseteq s(G)$. G пересекается с вертикальной прямой либо по пустому множеству, либо по интервалу (возможно совпадающему с этой прямой). В первом случае положим $k(x) := +\infty$, а во втором $k(x) := \inf\{y : \ x + yi \in G\}$. Если $-\infty \leq k(x) < +\infty$, то точка $x + k(x)i \in \Gamma(G)$. По определению имеем $G = \{z = x + yi : \ k(x) < y\}$.

Пусть $-\infty < k(x_0) < \infty$. В силу открытости G

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \delta < \varepsilon, \ D\left(x_0 + \left(k(x_0) + \varepsilon\right)i, \delta\right) \subset G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \ \exists z = x + yi \in D\left(x_0 + \left(k(x_0) + \varepsilon\right)i, \delta\right) \Rightarrow k(x) < y < k(x_0) + 2\varepsilon$$

Последнее означает полунепрерывность сверху $k(x)$ в точке x_0. По той же схеме рассматривается случай $k(x_0) = -\infty$. Связность области определения $k(x)$ следует из связности области G.

Обратно, пусть дана полунепрерывная сверху и со связной областью определения функция $k(x)$. Положим $G = \{z = x + yi : \ k(x) < y\}$. Из определения следует, что $l_{\pi/2} \subseteq s(G)$.

Покажем, что G есть односвязная область. Фиксируем $z_0 = x_0 + y_0 i \in G$, откуда $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ y_0 > k(x_0) + \varepsilon_0$. Покажем сначала, что $\exists \delta > 0 \ \ D(z_0, \delta) \subset G$, то есть множество открыто. Считаем для определённости $k(x_0) < \infty$. По определению полунепрерывности $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \ k(x) < k(x_0) + \varepsilon$. Полагая $\varepsilon + \delta < \varepsilon_0$, имеем $\forall z = x + yi \in D(z_0, \delta) \ \ y > y_0 - \delta > k(x_0) + \varepsilon_0 - \delta > k(x) - \varepsilon + \varepsilon_0 - \delta > k(x)$, то есть $z \in G$.

Покажем связность G. Для любых $z_1 = x_1 + y_1 i, \ z_2 = x_2 + y_2 i \in G, \ x_1 < x_2, \ k(x)$ ограничена сверху на $[x_1, x_2]$ [8]. Поэтому в G существует ломаная, соединяющая эти точки.

Заметим, что луч $l_{\varphi_0} := \{r \exp\{i\varphi_0\} : \ r \geq 0\} = [0, \infty \cdot \exp\{i\varphi_0\}) \subseteq s(G)$ тогда и только тогда, когда вертикальный луч $l_{\pi/2} \subseteq G_1 := G \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\right\}$. Поэтому проведённое доказательство распространяется на случай произвольного луча $l_{\varphi_0} \subseteq s(G)$. В этом случае

$$G \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\right\} = G_1 = \{z = x + yi : \ k(x) < y\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G = \left\{\zeta = z \exp\left\{i\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right\} : \ k(x) < y\right\} = \left\{\zeta = re^{\varphi i} : \ k\left(r \sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r \cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выберем по точке в двух компонентах связности вычета $s(G)$: $\zeta_1 \in K_1, \ \zeta_2 \in K_2$, и образуем линейный оператор $[Ly](z) := \int\limits_{z_0}^{z+\zeta_2} y(v)dv - \int\limits_{z_0}^{z+\zeta_1} y(v)dv, \ z_0 \in G$, в $H(G)$. Он принадлежит $\mathcal{L}_d(G)$.

По определению ядра

$$k(t, z) = \left[L\left(\frac{1}{t - \zeta}\right)\right](z) = \int\limits_{z_0}^{z+\zeta_2} \frac{1}{t - \zeta} y(\zeta) d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z+\zeta_1} \frac{1}{t - \zeta} y(\zeta) d\zeta = \ln\left(\frac{t - z - \zeta_1}{t - z - \zeta_2}\right).$$

Отсюда $A(\zeta) := \ln\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}\right)$. Эта функция многозначна на $G' \times G = (s(G))'$, так как при обходе переменной ζ одной из компонент K_1 или K_2 она приобретает слагаемое $2\pi i$.

Пусть теперь вычет $s(G)$ связный и $\neq \{0\}$. По предыдущей лемме $s(G)$ содержит луч. Без потери общности считаем, что $l_{\pi/2} \subseteq G$, то есть область G содержит вместе с каждой точкой вертикальный луч с началом в этой точке.

Определим теперь функцию $A(\zeta)$. При достаточно малом ε ряд $k(t,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\frac{(z-z_0)^i}{(t-z_0)^{j+1}}$ абсолютно сходится при $|z-z_0|<\varepsilon,\ |t-t_0|>\frac{1}{\varepsilon}$, и потому в нём можно произвольно менять порядок суммирования.

Вычислим коэффициенты этого ряда, используя инвариантность оператора L относительно сдвига аргумента на пространстве многочленов [8]:

$$\left[Lt^i\right](a)=\left[L(t+a)^i\right](0),\ a\in\mathbb{C},\ n\geq 0,$$

$$a_{ij}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{(z-z_0)^{i+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1/\varepsilon}(t-z_0)^j\,k(t,z)\,dtdz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{(z-z_0)^{i+1}}\left[L(t-z_0)^j\right](z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{i!}\left[L(t-z_0)^j\right]^{(i)}(z_0)=\frac{1}{i!}\left[L\left[(t-z_0)^j\right]^{(i)}\right](z_0)=$$

$$=\frac{j!}{i!(j-i)!}\begin{cases}0, & i>j,\\ \left[L(t-z_0)^{j-i}\right](z_0)=\left[Lt^{j-i}\right](0), & i\leq j.\end{cases}$$

Тогда имеем

$$k(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(t-z_0)^{j+1}}\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}(z-z_0)^i=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(t-z_0)^{j+1}}\sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\left[Lt^{j-i}\right](0)(z-z_0)^i=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(t-z_0)^{j+1}}\sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\left[Lt^{i}\right](0)(z-z_0)^{j-i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[Lt^i\right](0)\sum_{j=i}^{\infty}\frac{j!}{(j-i)!}\frac{(z-z_0)^{j-i}}{(t-z_0)^{j+1}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[Lt^i\right](0)\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^j}{(t-z_0)^{j+1}}\right]^{(i)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[Lt^i\right](0)}{(t-z)^{i+1}}$$

при $|z-z_0|<\varepsilon,\ |t-t_0|>\frac{1}{\varepsilon}$.

Так как $\left|\left[Lt^i\right](0)\right|\leq\max_{z\in\bar{G}_n}\left|\left[L(t-z_0)^i\right](z)\right|\leq C_n\max_{t\in\bar{G}_N}|t-z_0|^i<C_n\rho_N^i$, где ρ_N — диаметр множества $\bar{G}_N$, то сумма ряда $A(\zeta):=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[Lt^i\right](0)}{\zeta^{i+1}}$ аналитическая в $|\zeta|>\rho_N$. Поэтому $k(t,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[Lt^i\right](0)}{(t-z)^{i+1}}=A(t-z)$, где $z\in G_n,\ t\in G_N,\ |t|>\rho_N+R_n,\ R_n:=\sup\{|z|:\ z\in G_n\}$.

Докажем теперь, что функция $A(\zeta)$ аналитически продолжается до локально голоморфной на $G'-G=(s(G))'$, то есть $\forall\zeta_0\in G'-G,\ \zeta_0\neq\infty$ и любых точек $t_1,t_2\in G',\ z_1,z_2\in G$ со свойством $\zeta_0=t_1-z_1=t_2-z_2$ следует $k(t_1,z_1)=k(t_2,z_2)$. Множество $(G'-z_1)\cap(G'-z_2)$ связное, так как составлено из отрезков, параллельных мнимой оси и содержащих бесконечно удалённую точку. Поэтому оно содержится в связной компоненте открытого множества $(\bar{G}'_N-z_1)\cap(\bar{G}'_N-z_2)$. $A(\zeta)$ продолжается в области $\bar{G}'_N-z_1$, $\bar{G}'_N-z_2$ соответственно по формулам $A(\zeta):=k(\zeta+z_1,z_1)$, $A(\zeta):=k(\zeta+z_2,z_2)$. По теореме единственности функция $A(\zeta)$ однозначна на этой компоненте:

$$A(\zeta)\equiv k(\zeta+z_1,z_1),\ A(\zeta)\equiv k(\zeta+z_2,z_2).$$

В частности

$$A(\zeta_0) := k(\zeta_0 + z_1, z_1) = k(t_1, z_1),\ A(\zeta_0) := k(\zeta_0 + z_2, z_3) = k(t_2, z_2).$$

Таким образом, $\exists \varepsilon_0 > 0$ $A(\zeta)$ голоморфна в $(G' - G) \cup D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$.

В заключение заметим, что последовательность $\{N(n)\}$ можно подобать так, чтобы $\forall n\ \exists N\ \bar{G}'_N - G_n \subset (G' - G) \cup D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$.

Сначала выберем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ так, чтобы $G' - G_n + D(0, \varepsilon) \subset \bar{G} - G$. Затем N, чтобы $G'_N \subset (G' + D(0, \varepsilon)) \cup D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0} + R_n\right)$.

Тогда

$$\bar{G}'_N - G_n \subset (G' + D(0, \varepsilon)) \cup D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0} + R_n\right) - G_n =$$

$$= (G' + D(0, \varepsilon) - G_n) \cup \left(D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0} + R_n\right) - G_n\right) \subset (G' - G) \cup D'\left(0, \frac{1}{\varepsilon_0}\right).$$

Теорема доказана. Из неё следует такое представление операторов из $\mathcal{L}_d(G)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G есть односвязная область, а её вычет $s(G)$ связный и $\neq 0$. Тогда для каждого оператора $L \in \mathcal{L}_d(G)$ существует локально голоморфная на $G' - G = (s(G))'$ функция $A(\zeta)$ со свойством:

$$\forall z \in G_n\ [Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma G_{N+1}} y(t) A(t - z) dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вычет неограниченной выпуклой области G очевидно связный, и $\exists \varphi_0\ l_{\varphi_0} \subseteq s(G)$. В этом случае теорема доказана в [9]. Для односвязной ограниченной области $s(G) = 0$, то есть $G' - G = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, голоморфность функции $A(\zeta)$ в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ доказана независимо и разными методами в [4], [5]. Гипотеза о том, что аналогичное утверждение имеет место в случае неограниченной области G с $s(G) = 0$, остаётся недоказанной, так как доказательство в [9] имеет пробел.

Заключение. Получено аналитическое описание класса односвязных областей, вычет которых содержит луч. Этот класс областей характеризуется тем, что ядро любого оператора из класса $\mathcal{L}_d(G)$ порождается однозначной функцией. Результаты статьи докладывались на международной Казанской летней научной школе-конференции [10].

Библиографический список

1. Schwartz, L.Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques / L. Schwartz // Ann. of Math. — 1947. — Series 2. — V. 48. — Pp. 857–929.

2. Köthe, G.-J. Dualitat in der Funktionentheorie / G.-J. Köthe. — Reine angew. math. — 1953. — Bd. 191. — S. 30–49.

3. Dickson, D. G. Analytic mean periodic functions / D. G. Dickson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 110. — Pp. 361–374.

4. Царьков, Ю. М. Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочных со степенью оператора дифференцирования / Ю. М. Царьков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1970. — Т. 11. — С. 86–92.

5. Братищев, А. В. Общий вид линейных операторов, перестановочных с операцией дифференцирования / А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник // Математические заметки. — 1972. — Т. 12. — С. 187–195.

6. Коробейник, Ю. Ф. Об одном классе линейных операторов / Ю. Ф. Коробейник // Висши технически учебни заведения. Математика. — 1973. — Т. IX, кн. 3. — С. 23–31.

7. Коробейник, Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов операторных уравнений / Ю. Ф. Коробейник. — Ростов-на-Дону : ООО «ЦВВР», 2005. — 246 с.

8. Бурбаки, Н. Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. — Москва : Наука, 1965. — 424 с.

9. Братищев, А. В. Операторы обобщённого дифференцирования Гельфонда—Леонтьева и полиномы Бренке / А. В. Братищев // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2010. — Т. 10. — № 6 (79). — С. 813–824.

10. Братищев, А. В. Об операторах комплексной свёртки и обобщённого дифференцирования / А. В. Братищев // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. — 2013. — Т. 46. — С. 127–130.

Материал поступил в редакцию 19.06.2013.

References

1. Schwartz, L. Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques. Ann. of Math., 1947, Series 2, vol. 48, pp. 857–929.

2. Köthe, G.-J. Dualitat in der Funktionentheorie. Reine angew. math., 1953, Bd. 191, S. 30–49.

3. Dickson, D. G. Analytic mean periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, vol. 110, pp. 361–374.

4. Tsarkov, Y. M. Izomorfizmy nekotorykh analiticheskikh prostranstv, perestanovochnykh so stepenyu operatora differentsirovaniya. [Isomorphisms of some analytic spaces permutable with the differentiatial operator degree.] Teoriya funktsiy, funktsionalnyy analiz i ikh prilozheniya. 1970, vol. 11, pp. 86–92 (in Russian).

5. Bratishchev, A. V., Korobeynik, Y. F. Obshchiy vid lineynykh operatorov, perestanovochnykh s operatsiyey differentsirovaniya. [Standard form of linear operators permutable with differentiation.] Matematicheskiye zametki, 1972, vol. 12, pp. 187–195 (in Russian).

6. Korobeynik, Y. F. Ob odnom klasse lineynykh operatorov. [On one linear operator class.] Visshi tekhnicheski uchebni zavedeniya. Matematika. 1973, vol. IX, book 3, pp. 23–31 (in Russian).

7. Korobeynik, Y. F. O razreshimosti v kompleksnoy oblasti nekotorykh obshchikh klassov operatornykh uravneniy. [On decidability in complex domain of some general classes of operator equations.] Rostov-na-Donu: OOO "TsVVR", 2005, 246 p. (in Russian).

8. Bourbaki, N. Funktsii deystvitelnogo peremennogo. [Functions of real variable.] Moscow : Nauka, 1965, 424 p. (in Russian).

9. Bratishchev, A. V. Operatory obobshchennogo differentsirovaniya Gelfonda—Leonteva i polinomy Brenke. [Gelfond—Leontyev general differentiation operators and Brenke polynomials.] Vestnik of DSTU, 2010, vol. 10, no. 6 (49), pp. 813–824 (in Russian).

10. Bratishchev, A. V. Ob operatorakh kompleksnoy svertki i obobshchennogo differentsirovaniya. [On operators of complex convolution and generalized derivation.] Trudy matematicheskogo tsentra im. N. I. Lobachevskogo, 2013, vol. 46, pp. 127–130 (in Russian).

ON PRESENTATION OF LINEAR OPERATORS COMMUTING WITH DIFFERENTIATION IN SIMPLY-CONNECTED DOMAIN*

A. V. Bratishchev

Let $H(G)$ be a space of analytic functions of one variable in simply-connected domain G of the complex plane. It is known that a linear complex convolution operator is generated by a one-variable analytic function, a multivalued one in general. A known problem when all such functions are single-valued is solved. As it turned out, the solution to the problem is connected with the geometry of G domain. Set $s(G)$ with property $s(G)+G \subseteq G$ is termed residue of G domain. A class of simply connected regions whose residue is a connected set is described. Let the linear operator be continuous in function space, analytical in simply-connected domain G, and let it commute with differentiation. Then it can be reduced to a complex convolution operator. It is proved that the function generating such an operator will always be single-valued for regions with a connected residue. When the residue of region G is not connected, there is always a complex convolution operator with a multivalued function generating a kernel.
Keywords: *residue of region, operator commuting with operator of differentiation, kernel of operator.*

* The research is done within the frame of the independent R&D.