УДК 517.9 DOI: 10.12737/3501

Фредгольмовость составных двумерных интегральных операторов с однородными ядрами сингулярного типа в пространстве L_p*

В. М. Деундяк, Е. А. Романенко

Ранее авторами изучалась фредгольмовость двумерных интегральных операторов с однородными ядрами послойно сингулярного типа. Для такого класса операторов символическое исчисление строилось методами теории операторов билокального типа В. С. Пилиди, и фредгольмовость выражалась через обратимость двух семейств: семейства операторов одномерной свёртки и семейства одномерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами. Цель данной работы — изучение составных двумерных интегральных операторов с однородными ядрами послойно сингулярного типа, аналогичных введенным И. Б. Симоненко операторам составной континуальной свёртки. Это исследование проводится в рамках изучения более общей алгебры операторов с однородными ядрами, которые послойно являются сингулярными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами. Для изучаемых операторов построено символическое исчисление и найдены необходимые и достаточные условия фредгольмовости.

Ключевые слова: *сингулярные уравнения, операторы свёртки, однородные ядра, фредгольмовость.*

Введение. Исследование в пространстве $L_p\left(R^n\right)$, где $1 < p < +\infty$, $n \geq 2$, операторов вида:

$$\left(R_k\left(f\right)\right)\left(x\right) = \int\limits_{R^n} k\left(x, y\right) f\left(y\right) dy,$$

с однородными, степени ($-n$), ядрами начато Л. Г. Михайловым. Вопросам разрешимости таких операторов с переменными коэффициентами посвящены работы Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина и других авторов ([1, 2] и цитированные в них источники). Кроме условий однородности в данных работах на ядра накладывались и существенно использовались условия инвариантности относительно диагонального действия группы ортогональных преобразований SO(n). В [3, 4] рассматривались классы ядер компактного и сингулярного типа, включающие в себя SO(n)-инвариантные ядра, а также методами теории операторов локального [5] и билокального типа [6] исследовалась разрешимость операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами. Топологические свойства пространств обратимых и фредгольмовых операторов из этого класса изучались в [7]. Ключевым моментом при исследовании различных классов операторов с однородными ядрами является установление связи с соответствующими алгебрами операторов сртки.

В работе И. Б. Симоненко [8] введены и исследованы операторы составной свёртки, связанные с семейством конусов. Представляет интерес изучение аналогов таких свёрток в теории операторов с однородными ядрами, и целью настоящей работы является изучение составных двумерных интегральных операторов с однородными ядрами сингулярного типа. Отметим однако, что исследование фредгольмовости таких операторов целесообразно проводить в рамках изучения более общей алгебры двумерных операторов с однородными ядрами PC -сингулярного типа, которые послойно являются одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами. Основная часть настоящей статьи состоит из трёх разделов. В первом вводятся составные двумерные интегральные операторы с однородными ядрами послойно сингулярного типа. Второй раздел посвящён построению символического исчисления и условиям фредгольмовости для двумерных интегральных

* Работа поддержана Минобрнауки РФ (соглашение 14.A18.21.0356) и внутренним грантом ЮФУ Мм 13–16 «Дифференциальные и интегральные уравнения. Приложения к математической физике и финансовой математики».

операторов с однородными ядрами PC-сингулярного типа. В третьем — выписаны условия фредгольмовости составных операторов в модельном случае.

1. Составные двумерные интегральные операторы с однородными ядрами сингулярного типа. Введём необходимые общие обозначения. Если B — произвольное банахово пространство, то $End(B)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в B, $Comp(B)$ — идеал компактных операторов, $Fr(B)$ — пространство фредгольмовых операторов. Через U^+ обозначим унитализацию произвольной банаховой алгебры U. Изоморфизм банаховых пространств $\alpha: B_1 \to B_2$ задаёт изоморфизм подобия банаховых алгебр $\hat{\alpha}: End(B_1) \to End(B_2)$ по правилу:

$$\hat{\alpha}(A) = \alpha A \alpha^{-1},\ A \in End(B_1). \tag{1}$$

Для компакта X и банахова пространства Y через $C(X;Y)$ обозначим пространство непрерывных отображений X в Y. Если Y — банахова алгебра, то и $C(X;Y)$ — банахова алгебра с обычными операциями. Для локально компактного не компактного X через $\dot{X} = X^{\cdot}$ обозначим компактификацию точкой ∞; пусть $C_0(X;Y) = \{\varphi:\ \varphi \in C(\dot{X};Y), \varphi(\infty) = 0\}$. Тождественное преобразование произвольного множества X будем обозначать через id_X.

На прямой R, плоскости R^2 и единичной окружности $T\,(\subset R^2)$ введём стандартные меры и ориентации. Пусть R_+ и R_- — положительная и отрицательная полуоси прямой R. Определённая на R^2 функция k называется однородной степени (-2), если выполняется условие:

$$\forall \alpha \in R_+,\ \forall x, y \in R^2:\ k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-2} k(x, y). \tag{2}$$

Далее $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Будем полагать, что однородная степени (-2) функция k принадлежит классу $M_p(R^2)$, если почти для всех $\rho \in R^2$

$$\int_{R^2} |k(1,\rho)| |\rho|^{\frac{-2}{p}} d\rho < \infty, \int_{R^2} |k(\rho,1)| |\rho|^{\frac{-2}{q}} d\rho < \infty.$$

Оператор

$$(L_k(f))(x) = \int_{R^2} k(x, y) f(y) dy, \tag{3}$$

где $k \in M_p(R^2)$, является ограниченным в пространстве $L_p(R^2)$ [1]. Замкнутую подалгебру банаховой алгебры $End(L_p(R^2))$, порождённую операторами вида (3), обозначим через $Op(M_p(R^2))$. При исследовании операторов с однородными ядрами удобно перейти от декартовой системы координат в R^2 к полярной системе. Этот переход задаёт изоморфизм

$$\pi:\ L_p(R^2) \to L_p(R_+ \times T, r \otimes 1),$$

который определяет изоморфизм подобия банаховых алгебр (см (1))

$$\hat{\pi}:\ End(L_p(R^2)) \to End(L_p(R_+ \times T, r \otimes 1)). \tag{4}$$

Пусть $Op'(M_p(R^2)) = \hat{\pi}(Op(M_p(R^2)))$.

В пространстве $L_p(R_+, r)$ рассмотрим банахову алгебру $V_{p,r}(R_+)$, порождённую операторами вида:

$$(R_k(f))(r) = \int_0^{+\infty} k(r, \rho) f(\rho) d\rho, \tag{5}$$

где ядро $k(r, \rho)$ удовлетворяет двум условиям: однородности степени (-1), то есть

$$\forall \alpha \in R_+, \ \forall r, \ \rho \in R_+ : \ k(\alpha r, \alpha \rho) = \alpha^{-1} k(r, \rho)$$

и суммируемости ([1], раздел 4.1):

$$\int_0^{+\infty} |k(1, \rho)| |\rho|^{\frac{-2}{p}} d\rho < \infty, \quad \int_0^{+\infty} |k(\rho, 1)| |\rho|^{\frac{-2}{q}} d\rho < \infty. \tag{6}$$

Пространство ядер, удовлетворяющих таким условиям, обозначим $J_1(R_+)$. Рассмотрим в пространствах $L_p(R)$ и $L_p(T)$ сингулярные интегральные операторы Коши:

$$(S_R f)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_R \frac{f(y)}{x - y} dy, \ (S_T f)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{f(y)}{x - y} dy. \tag{7}$$

Пусть $P_{R,\pm} = \frac{1}{2}(I_R \pm S_R)$, $P_{T,\pm} = \frac{1}{2}(I_T \pm S_T)$, $w_p(T)$ — банахова алгебра, порождённая S_T и операторами умножения на функции из $C(T)$.

Рассмотрим топологическое тензорное произведение $Ц'_p = V_{p,r}(R_+) \otimes w_p(T)$ $\left(\subset End_p(R_+ \times T), r \otimes 1\right)$ [6, 11, 15]. При расслоении проколотой нулем плоскости на центрированные окружности операторы из $Ц_p = \hat{\pi}^{-1}(Ц'_p)$ можно интерпретировать как послойно сингулярные операторы с непрерывными коэффициентами [12]. Пусть χ_0 — характеристическая функция единичного круга плоскости R^2 с центром в нуле, $\chi_\infty = 1 - \chi_0$, а $Ш_p$ — замкнутая подалгебра банаховой алгебры $End\left(L_p(R^2)\right)$, порождённая операторами вида:

$$A = \lambda I + \chi_0 A_0 + \chi_\infty A_\infty + F, \tag{8}$$

где $\lambda \in C$, $F \in Comp\left(L_p(R^2)\right)$, $A_0, A_\infty \in Ц_p$. Операторы из $Ш_p$ назовём двумерными интегральными операторами с однородными ядрами сингулярного типа [4].

По аналогии с [8] введём составные операторы с однородными ядрами. Пусть γ_j — положительная ориентированная дуга T с началом в t_j и концом в t_{j+1}, где $j = 1, \dots, m$, $t_{m+1} = t_1$; $\operatorname{int}(\gamma_j) = \gamma_j \setminus \Xi$. Пусть Γ_j — угол в R^2 с центром в 0 и высекающий на T дугу γ_j, а $P_{\Gamma_j} \in End\left(L_p(R^2)\right)$ — оператор умножения на характеристическую функцию χ_{Γ_j}. При переходе к полярной системе координат $P_{\Gamma_j} = 1 \otimes P_{\gamma_j}$. Составным оператором с однородным ядром будем называть оператор вида:

$$\sum_i P_{\Gamma_i} A_i, \ A_i \in Ш_p. \tag{9}$$

Приведём модельный пример такого оператора. В силу того, что операторы с однородными ядрами естественно рассматривать в полярной системе координат, то будем предполагать, что определённый ниже оператор действует в пространстве $L_p(R_+ \times T, r \otimes 1)$. Пусть

$$B = \sum_i P_{\Gamma_i} \left(\left(\chi_0 B_{a_{i,-}} + \chi_\infty B_{a_{i,+}} \right) \otimes \left(c_{i,-} P_{T,-} + c_{i,+} P_{T,+} \right) \right), \tag{10}$$

где χ_0 и χ_∞ — характеристические функции множеств $(0, 1]$ и $[1, \infty)$; $B_{a_{i,\pm}}$ — оператор вида (5); $c_{i,\pm} \in C(T)$.

В разделе 2 будет построена банахова алгебра двумерных интегральных операторов с однородными ядрами PC-сингулярного типа $Ш_p(\Xi)$, содержащая как операторы из банаховой алгебры $Ш_p$, так и операторы вида (9).

2. Разрешимость двумерных интегральных операторов с однородными ядрами *PC*-сингулярного типа.

2.1. Сингулярные операторы с *PC*-коэффициентами. Приведём необходимые для дальнейшего конструкции из [10]. Пусть $w_p(R)(\subset End(L_p(R)))$ банахова алгебра интегральных операторов вида:

$$A = a_- P_{R,-} + a_+ P_{R,+}, \tag{11}$$

где $a_\pm \in C$. Соответствие $(A \mapsto a_\pm)$ определяет гомоморфизмы

$$\psi_\pm : w_P(R) \to C. \tag{12}$$

Через U_p обозначим замкнутую подалгебру алгебры $End(L_p(R))$, порождённую $w_p(R)$ и оператором умножения на характеристическую функцию χ_- полуоси R_-. Сопоставление оператору из U_p его локальных представителей из $w_p(R)$ на $R_\pm$ задаёт гомоморфизмы

$$\varphi_\pm : U_p \to w_p(R). \tag{13}$$

Пусть $\bar{R}$ двухточечная компактификация прямой R точками $\pm\infty$, $C_p(\bar{R})$ замыкания пересечения $C(\bar{R})$ и пространства функций с ограниченной вариацией по норме пространства мультипликаторов в $L_p(R)$. Известно, что $C_p(\bar{R})$ — банахова алгебра, гомоморфно и непрерывно вложенная в $C(R)$, причём $C_p(\bar{R})$ плотно в $C(\bar{R})$ $C_2(\bar{R}) = C(\bar{R})$. Через B_P^2 обозначим банахову алгебру матриц-функций порядка 2, у которых элементы принадлежат $C_p(\bar{R})$, а значения в $\pm\infty$ есть блочно-диагональные мартицы; норма в B_P^2 задаётся равенством:

$$\|b\|_{B_P^2} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\|b_{jk}\|_{C_p(\bar{R})}.$$

Рассмотрим такой изоморфизм банаховых алгебр

$$\mu : U_p \to B_p^2, \tag{14}$$

что: 1) $\mu(a) = diag[a; a]$, $a \in L(2; C)$; 2) $\mu(\chi_-) = diag[1, 0]$; $\mu(\chi_+) = diag[0, 1]$; 3) при

$$(\mu(S_R))(y) = \begin{pmatrix} \text{th}(\pi\hat{y}) & -i\left(\text{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} \\ i\left(\text{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} & -\text{th}(\pi\hat{y}) \end{pmatrix},$$

где $\hat{y} = y - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)i$, $y \in R$. Пусть $H_P(\Xi)$ — банахова алгебра U_p-значных функций a, определённых на T, для которых: $a(t) \in w_p(R)$, где $t \in T \setminus \Xi$; a непрерывна в точках из $T \setminus \Xi$, а в точках из Ξ может иметь разрывы первого рода и $\lim\limits_{t \to t_0 \pm 0} a_t = \varphi_\pm(a(t_0))$. Норма в $H_P(\Xi)$ задаётся равенством $\|a\|_{H_p} = \sup\|a(t)\|_{Emd(L_p(T))}$. Обозначим через $w_p(T;\Xi)$ замкнутую подалгебру алгебры $End\left(L_p\left(T\right)\right)$, порождённую оператором S_T и операторами умножения на кусочно-непрерывные функции, которые определены на $\mathbb{T}$ и непрерывны на $T \setminus \Xi$.

Сопоставление оператору из $w_p\left(T;\Xi\right)$ его локальных представителей в точках из T определяет гомоморфизм

$$\sigma_{p.\Xi}: w_p\left(T;\Xi\right) \to H_p\left(\Xi\right), \tag{15}$$

называемый операторным символом. Теперь рассмотрим матричный символ. Пусть $T\left(\Xi\right) = \left(T \setminus \Xi\right) \cup \left(\Xi \times \bar{R}\right)$, где $\Xi \subset T$, с топологией, определяемой вклеиванием в $\mathbb{T}$ вместо каждой точки из Ξ экземпляра ориентированной прямой R. Через $N_p^2\left(\Xi\right)$ обозначим множество таких отображений $M: T\left(\Xi\right) \to L\left(2;C\right)$, которые при записи $M = \left(M_{jk}\right)_{j,\,k=1,\,2}$ удовлетворяют условиям:

1) если $t \in \Xi$, то $M\big|_{\{t\}\times\bar{R}} \in B_P^2$;

2) если $t \in T \setminus \Xi$, то $M_{12}\left(t\right) = M_{21}\left(t\right) = 0$;

3) $M_{11}, M_{12}, M_{21} \in C\left(T\left(\Xi\right); L\left(2;C\right)\right)$, а $M_{22} \in C(\left(T_-\left(\Xi\right); L\left(2;C\right)\right)$, где T_- — окружность с ориетацией, противоположной ориентациии на $\mathbb{T}$. Зафиксируем матрицу $V\left(\in C\left(\bar{R}; GL\left(2,C\right)\right)\right)$ с элементами из $C_p\left(\bar{R}\right)$, для которой

$$V\left(-\infty\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V\left(+\infty\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Пусть $a \in H_p\left(\Xi\right)$. Определим отображение $\lambda_{p,\,\Xi}^2\left(a\right): T\left(\Xi\right) \to L\left(2;C\right)$ следующим образом: для $t \in T \setminus \Xi$ пусть

$$\left(\lambda_{p,\,\Xi}^2\left(a\right)\right)\left(t\right) = diag\left[\psi_-\left(a\left(t\right)\right); \psi_+\left(a\left(t\right)\right)\right],$$

где $\psi_\pm$ — гомоморфизмы (12), а для $t = \left(t_0, y\right) \in \Xi \times \bar{R}$ пусть

$$\left(\lambda_{p,\,\Xi}^2\left(a\right)\right)\left(t\right) = V^{-1}\left(y\right)\left(\left(\mu\left(a\left(t_0\right)\right)\right)\left(y\right)\right)V\left(y\right),$$

где μ — изоморфизм (14). Сопоставление $\left(a \mapsto \lambda_{p,\,\Xi}^2\left(a\right)\right)$, где $a \in H_p\left(\Xi\right)$, определяет изоморфизм банаховых алгебр

$$\lambda_{p,\,\Xi}^2\left(a\right): H_p\left(\Xi\right) \to N_p^2\left(\Xi\right). \tag{17}$$

Матричнозначный символ для $w_p\left(T;\Xi\right)$ определяется как композиция:

$$\tilde{\sigma}_{p.\Xi}^2 = \lambda_{p,\,\Xi}^2 \sigma_{p.\,\Xi}^2: w_p\left(T;\Xi\right) \to N_p^2\left(\Xi\right). \tag{18}$$

2.2. Банахова алгебра $\boldsymbol{Ш_p(\Xi)}$. Рассмотрим банахову алгебру

$$Ц_P'\left(\Xi\right) = V_{p,r}\left(R_+\right) \otimes w_p\left(T;\Xi\right)\left(\subset End\left(L_p\left(R_+ \times \left(T;\Xi\right)\right), r \otimes 1\right)\right).$$

При расслоении проколотой плоскости на центрированные окружности операторы из банаховой алгебры $Ц_P\left(\Xi\right) = \hat{п}^{-1}\left(V_{p,\,r}\left(R_+\right) \otimes w_p\left(T;\Xi\right)\right)\left(\subset End\left(L_p\left(R^2\right)\right)\right)$ можно рассматривать как послойно сингулярные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами. Далее операторы из $Ц_P\left(\Xi\right)$ будем называть двумерными интегральными операторами с однородными ядрами

PC -сингулярного типа. Пусть $Ш_p(\Xi)$ — замкнутая подалгебра $End\left(L_p\left(R^2\right)\right)$, порождённая операторами вида:

$$A = \lambda I + \chi_0 A_0 + \chi_\infty A_\infty + F, \tag{19}$$

где $\lambda \in C$, $F \in Comp\left(L_p\left(R^2\right)\right)$, $A_0, A_\infty \in Ц_p(\Xi)$ (см. (8)). Установим связь этой алгебры с теорией операторов билокального типа.

Рассмотрим замкнутую подалгебру $V_p(R)$ банаховой алгебры $End\left(L_p(R)\right)$, порождённую операторами свёртки

$$\left(C_a(f)\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x-y) f(y) dy, \tag{20}$$

где $a \in L_1(R)$. Отметим, что эта алгебра пространственно подобна алгебре $V_{p,r}(R_+)$. Действительно, изоморфизм подобия задаётся конструкцией (1) и изоморфизмом $v: L_p(R_+, r) \to L_p(R)$, определённым формулой

$$\left(v(g)\right)(t) = \exp\left(-\frac{2t}{p}\right) g\left(\exp(-t)\right), \ t \in R. \tag{21}$$

Через $W_p(R)$ обозначим замкнутую подалгебру алгебры $End\left(L_p(R)\right)$, порождённую операторами вида

$$B = \lambda I + M_{\chi_-} A_- + M_{\chi_+} A_+ + F, \tag{22}$$

где $A_\pm \in V_p(R)$, $\lambda \in C$, $F \in Comp\left(L_p(R)\right)$, $\chi_\pm$ — характеристическая функция $R_\pm$, $M_{\chi_\pm}\left(\in End\left(L_p(R)\right)\right)$ — оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_\pm$. Покажем, что алгебра $Ш_p(\Xi)$ пространственно подобна алгебре операторов билокального типа [6, 9, 13]:

$$W_p(R) \otimes w_p(T, \Xi) \left(\subset End\left(L_p(R \times T)\right)\right).$$

Для произвольной ненулевой точки $x = (x_1, x_2) \in R^2$ через $\bar{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ обозначим точку $\bar{x} / \|\bar{x}\| \in (T)$ и изоморфизм $u_p: L_p\left(R^2\right) \to L_p(R \times T)$ определим по формуле

$$\left(u_p(g)\right)(t, \sigma) = \left(\exp\left(-\frac{2t}{p}\right)\right) g\left(x_1^0 \exp(-t), x_2^0 \exp(-t)\right), \tag{23}$$

где $t \in R$, $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in T$, и рассмотрим изоморфизм подобия (см. (1)):

$$\hat{u}_p\colon End\left(L_p\left(R^2\right)\right) \to End\left(L_p(R \times T)\right). \tag{24}$$

По схеме из [4], с. 166, доказывается

Теорема 1. $\hat{u}_p\left(Ш_p(\Xi)\right) = W_p(R) \otimes w_p(T, \Xi)$.

2.3. Символическое исчисление и фредгольмовость. При построении символического исчисления для алгебры $Ш_p(\Xi)$ будем следовать методам теории операторов билокального типа. Прежде всего напомним конструкцию символа для банаховой алгебры $W_p(R)$ [8]. Сопоставим оператору C_a вида (20) преобразование Фурье $\hat{a}$ ядра a и тем самым зададим мономорфизм

$$s_{R,p}: V_p(R) \to C_0(R), \tag{25}$$

являющийся в случае $p=2$ изометрическим изоморфизмом. Пусть $S_0=\{-1;+1\}$ — 0-мерная сфера, $\Lambda=(R\times S_0)^{\cdot}$, $S_p(R)=\left\{\varphi\in C(\Lambda):\ \varphi_{\pm}=\varphi|_{R\times\{\pm1\}}\in C_p(R)\right\}$, тогда правило $\{B\mapsto\sigma_R(B)\}$, где

$$(\sigma_R(B))(\infty)=\lambda,\ (\sigma_R(B))(t,\pm1)=\lambda+(s_{R,p}(A_{\pm}))(t)(t\in R),$$

порождает символ-эпиморфизм банаховых алгебр

$$\sigma_{p,R}:\ W_p(R)\to S_p(R). \tag{26}$$

Рассмотрим банаховы алгебры

$$\Xi_{p,f}=W_p(R)\otimes N_p^2(\Xi)\left(\subset C\left((T,\Xi)\times\{-1;+1\}\right);W_p^2(R)\right),$$

$$\Xi_{p,r}=S_p(R)\otimes w_p(T;\Xi)=\left\{\varphi\in C(\Lambda;w_p(T,\Xi)):\ \varphi_{\pm}=\varphi|_{R\times\{\pm1\}}\in C_p(\dot R)\otimes w_p(\Xi)\right\},$$

$$\Xi_{p,0}=S_p(R)\otimes N_p^2(\Xi)=\left\{\varphi\in C(\Lambda;w_p(T,\Xi)):\ \varphi_{\pm}=\varphi|_{R\times\{\pm1\}}\in C_p(\dot R)\otimes N_p^2(\Xi)\right\},$$

с естественными нормами. В алгебре $Ш_p(\Xi)$ выделим модельные операторы вида:

$$A=\lambda I+\chi_0\hat{п}^{-1}\left(A_{0,-}\otimes a_{0,-}P_-+A_{0,+}\otimes a_{0,+}P_+\right)+\chi_\infty\hat{п}^{-1}\left(A_{\infty,-}\otimes a_{\infty,-}P_-+A_{\infty,+}\otimes a_{\infty,+}P_+\right), \tag{27}$$

где $A_{0,\pm},A_{\infty,\pm}\in V_p(R_+)$, $a_{0,\pm},a_{\infty,\pm}\in C(T,\Xi)$, $\hat{п}$ — изоморфизм вида (4) и определим два частичных символа оператора A — радиальный $\sigma_{p,r}(A)(\in\Xi_{p,r})$:

$$\sigma_{p,r}(A)|_{R\times\{+1\}}=\lambda I+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{0,-})\right)a_{0,-}P_-+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{0,+})\right)a_{0,+}P_+,$$

$$\sigma_{p,r}(A)|_{R\times\{-1\}}=\lambda I+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{\infty,-})\right)a_{\infty,-}P_-+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{\infty,+})\right)a_{\infty,+}P_+,$$

и послойный $\sigma_{p,f}(A)(\in\Xi_{p,f})$:

$$\sigma_{p,f}(A)=\lambda I+\chi_+\hat v(A_{0,-})\otimes\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{0,-}P_-)+\chi_+\hat v(A_{0,+})\otimes\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{0,+}P_+)+\chi_-\hat v(A_{\infty,-})\otimes\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{\infty,-}P_-)+$$
$$+\chi_-\hat v(A_{\infty,+})\otimes\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{\infty,+}P_+),$$

а также слабый символ

$$\sigma_{p,0}(A)|_{R\times\{+1\}\times T(\Xi)}=\lambda I+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{0,-})\right)\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{0,-}P_-)+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{0,+})\right)\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{0,+}P_+),$$

$$\sigma_{p,0}(A)|_{R\times\{-1\}\times T(\Xi)}=\lambda I+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{\infty,-})\right)\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{\infty,-}P_-)+\sigma_{p,R}\left(\hat v(A_{\infty,+})\right)\tilde\sigma^2_{p.\Xi}(a_{\infty,+}P_+).$$

Лемма 1. Сопоставления

$$A\mapsto\sigma_{p,r}(A),\ A\mapsto\sigma_{p,f}(A),\ A\mapsto\sigma_{p,*}(A),$$

где A — оператор вида (27), распространяются до эпиморфизмов банаховых алгебр

$$\sigma_{p,r}=\left(\sigma_{p,R}\otimes id_{w_p(T,\Xi)}\right)\hat u_P^{-1}:\ Ш_p(\Xi)\to\Xi_{p,r},\quad \sigma_{p,f}=\left(id_{W_p(R)}\otimes\sigma_{p,\Xi}\right)\hat u_P^{-1}:\ Ш_p(\Xi)\to\Xi_{p,f},$$

$$\sigma_{p,0}=\left(\sigma_{p,R}\otimes\sigma_{p,\Xi}\right)\hat u_P^{-1}:\ Ш_p(\Xi)\to\Xi_{p,*},$$

при этом выполняется равенство:

$$\left(id_{S_p(R)}\otimes\sigma_{p.\Xi}\right)\sigma_{p,r}=\left(\sigma_{p,R}\otimes id_{N_p^2(\Xi)}\right)\sigma_{p,f}\ (=:\sigma_{p,0}). \tag{28}$$

Пара эпиморфизмов $\upsilon=\left(\left(id_{W_p(R)}\otimes\sigma_{p.\Xi}\right),\left(\sigma_{p,R}\otimes id_{w_p(T,\Xi)}\right)\right)$ в соответствии с [14], с. 96, задаёт расслоённую сумму $\Xi_{p,*}=\Xi_{p,r}\oplus_\upsilon\Xi_{p,f}$, т. е. банахову алгебру

$$\Xi_{p,*}=\left\{(b_r,b_f)\in\Xi_{p,r}\times\Xi_{p,f}:\ \left(id_{W_p(R)}\otimes\sigma_{p.\Xi}\right)(b_r)=\left(\sigma_{p,R}\otimes id_{w_p(T,\Xi)}\right)(b_f)\in\Xi_{p,*}\right\}.$$

Следующая теорема содержит конструкцию полного символа $\sigma_{p,*}$ и условия фредгольмовости операторов из $Ш_p(\Xi)$.

Теорема 2. I. Правило

$$A \mapsto \sigma_{p,*}(A) = \left(\sigma_{p,r}(A), \sigma_{p,f}(A)\right), \; A \in Ш_p(\Xi),$$

определяет отображение $\sigma_{p,*} : Ш(\Xi) \to \Xi_{p,*}$, которое является эпиморфизмом банаховых алгебр с ядром $Comp\left(L_p\left(R^2\right)\right)$.

II. Пусть $B \in Ш_p(\Xi)$, тогда

1. $B \in Fr\left(Ш_p(\Xi)\right) \Leftrightarrow \sigma_{p,r}(B) \in G\Xi_{p,r}, \sigma_{p,f}(B) \in G\Xi_{p,f}$.
2. $B \in Fr\left(Ш_p(\Xi)\right) \Leftrightarrow \sigma_{p,*}(B) \in G\Xi_{p,*}$.
3. $B \in Fr\left(Ш_p(\Xi)\right) \Rightarrow \sigma_{p,0}(B) \in G\Xi_{p,0}$.

Доказательство этой теоремы, являющейся обобщением теоремы 3 из [4], в данной работе не приводится. Отметим, что необходимые и достаточные условия фредгольмовости, содержащиеся в положениях II, 1 и II, 2 теоремы 2, очень громоздки, однако в следующем разделе для операторов вида (10) условия фредгольмовости будут выписаны явно.

3. Условия фредгольмовости составных операторов. Перепишем оператор $B \in L_p\left(R_+ \times T, r \otimes 1\right)$ вида (10) в форме:

$$B = \sum_i \left(I \otimes P_{\gamma_i}\right)\left(\left(\chi_0 B_{a_{i,-}} + \chi_\infty B_{a_{i,+}}\right) \otimes \left(c_{i,-}P_- + c_{i,+}P_+\right)\right), \tag{29}$$

где $P_{\gamma_j} \in L_p(T)$ — оператор умножения на характеристическую функцию χ_{γ_j}; $B_{a_{i,\pm}}$ — оператор вида (5):

$$\left(B_{a_{i,\pm}} f\right)(r) = \int_0^{+\infty} a_{i,\pm}(r,\rho) f(\rho)\, d\rho.$$

Оператор $A_{a_{i,\pm}} = vB_{a_{i,\pm}}v^{-1}$ является оператором свёртки с ядром из $L_1(R)$ (см. [4], с. 164):

$$\left(A_{a_{i,\pm}} f\right)(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{i,\pm}(\tau - t) f(\tau)\, d\tau, \quad g_{i,\pm}(\lambda) = e^{\frac{2}{p}\lambda} a_{i,\pm}\left(e^\lambda, 1\right).$$

Введём оператор $A = \hat{u}\left(\hat{\pi}^{-1}(B)\right)$ из $W_p(R) \otimes w_p(T,\Xi) \subset End\left(L_2(R \times T)\right)$:

$$A = \sum_i \left(A_{1,i} \otimes A_{2,i}\right), \tag{30}$$

где

$$A_{1,i} = \chi_- A_{a_{i,-}} + \chi_+ A_{a_{i,+}} \in W_p(R), \;\; A_{2,i} = P_{\gamma_i}\left(c_{i,-}P_- + c_{i,+}P_+\right) \in w_p(T,\Xi),$$

и в соответствии с леммой 1 будем вычислять два частичных символа:

$$\sigma_1(A) = \sum \sigma_{p,R}\left(A_{1,i}\right) \otimes A_{2,i} = \sigma_{p,r}(B), \quad \sigma_2(A) = \sum A_{1,i} \otimes \sigma_{p,\Xi}\left(A_{2,i}\right) = \sigma_{p,f}(B). \tag{31}$$

Сначала вычислим символ $\sigma_{p,R}\left(A_{1,i}\right)$. Рассмотрим преобразования Фурье $\hat{a}_{i,\pm}$, ядер $a_{i,\pm}$, операторов свёртки $A_{a_{i,\pm}}$ и согласно определению $\sigma_{p,R}$ получим, что

$$\left(\sigma_{p,R}\left(\chi_- A_{a_{i,-}} + \chi_+ A_{a_{i,+}}\right)\right)(t,\xi) = \begin{cases} \hat{a}_{i,+}, & (t,\xi) \in R \times \{+1\}, \\ \hat{a}_{i,-}, & (t,\xi) \in R \times \{-1\}. \end{cases} \tag{32}$$

Чтобы найти символ $\sigma_{p,\Xi}(A_{2,i})$, сначала вычислим $\sigma_{p,\Xi}(c_{i,-}P_- + c_{i,+}P_+)$, $\sigma_{p,\Xi}(P_{\gamma_i})$. Локальным представителем в точке $t_0 \in T$ для оператора $c_{i,-}P_- + c_{i,+}P_+$ является оператор $c_{i,-}(t_0)P_- + c_{i,+}(t_0)P_+ \in U_p$. В силу свойств изоморфизма μ (см. (14)) получаем, что

$$\mu(a_{i,\pm}(t_0)) = diag\left[c_{i,\pm}(t_0), c_{i,\pm}(t_0)\right],$$

$$\mu\left(\frac{1}{2}(I_R \pm S_R)\right)(y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \pm \operatorname{th}(\pi\hat{y}) & \mp i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} \\ \pm i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} & 1 \mp \operatorname{th}(\pi\hat{y}) \end{pmatrix},$$

где $\hat{y} = y - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)i$, $y \in R$. Тогда в силу (17) и (18)

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{p,\Xi}(c_{i,-}P_- + c_{i,+}P_+)\right)(t) = \frac{1}{2}\left[c_{i,+}(t_0), c_{i,+}(t_0)\right]\begin{pmatrix} 1 + \operatorname{th}(\pi\hat{y}) & -i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} \\ i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} & 1 - \operatorname{th}(\pi\hat{y}) \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2}\left[c_{i,-}(t_0), c_{i,-}(t_0)\right]\begin{pmatrix} 1 - \operatorname{th}(\pi\hat{y}) & i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} \\ -i\left(\operatorname{ch}(\pi\hat{y})\right)^{-1} & 1 + \operatorname{th}(\pi\hat{y}) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{33}$$

Теперь найдём $\sigma_{p,\Xi}(P_{\gamma_i})$. Пусть $t \notin \gamma_i$, тогда локальный представитель оператра P_{γ_i} в точке t, как оператора умножения на характеристическую функцию множества γ_i, равен 0. Если же $t \in \operatorname{int}\gamma_i$, то локальный представитель в этой точке равен 1. Рассмотрим теперь точки разрыва t_i и t_{i+1}. Локальный представитель P_{γ_i} в точке t_i равен оператору умножения на характеристическую функцию луча R_+:

$$\chi_+(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Локальный представитель P_{γ_i} в точке t_{i+1} равен оператору умножения на функцию вида $\chi_-(x) = 1 - \chi_+(x)$. Подействуем на $\chi_+(x)$ и $\chi_-(x)$ изоморфизмом μ (см. (14)) и получим:

$$\mu(\chi_+(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mu(\chi_-(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим (15), (17), (18) и вычислим символ $\sigma_{p,\Xi}(P_{\gamma_i}) \in N_p^2(\Xi)$:

$$\sigma_{p,\Xi}(P_{\gamma_i})(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in \operatorname{int}\gamma_i, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in \operatorname{int}\gamma_j,\ j \ne i, \end{cases} \tag{34}$$

$$\sigma_{p,\Xi}(P_{\gamma_i})(t_k, x) = \begin{cases} V^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}V(x), & k = i, \\ V^{-1}(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V(x), & k = i+1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & k \ne i, i+1. \end{cases} \tag{35}$$

Итак, символы $\sigma_{p,R}\left(A_{1,i}\right)$, $\sigma_{p,\Xi}\left(A_{2,i}\right)$ вычислены. Это позволяет вычислить частичные символы оператора A (см. (31)).

Теперь можно выписать для оператора B вида (10) частичные символы и сформулировать в их терминах условие фредгольмовости:

$$\sigma_{p,r}\left(B\right)=\sum\sigma_{p,R}\left(\chi_{-}A_{a_{i,-}}+\chi_{+}A_{a_{i,+}}\right)\otimes P_{\gamma_i}\left(c_{i,-}P_{T,-}+c_{i,+}P_{T,+}\right),$$

$$\sigma_{p,f}\left(B\right)=\sum\left(\chi_{-}A_{a_{i,-}}+\chi_{+}A_{a_{i,+}}\right)\otimes\left(\sigma_{p,\Xi}\left(P_{\gamma_i}\right)\sigma_{p,\Xi}\left(c_{i,-}P_{T,-}+c_{i,+}P_{T,+}\right)\right),$$

где $A_{a_{i,\pm}}=vB_{a_{i,\pm}}v^{-1}$, $\sigma_{p,R}\left(\chi_0A_{a_{i,-}}+\chi_\infty A_{a_{i,+}}\right)$ вычисляется по формуле (32), $\sigma_{p,\Xi}\left(P_{\gamma_i}\right)$ — по формулам (34) и (35), а $\sigma_{p,\Xi}\left(c_{i,-}P_{T,-}+c_{i,+}P_{T,+}\right)$ вычисляется по формуле (33). Из теоремы 2 вытекает, что оператор B фредгольмов тогда и только тогда когда семейство операторов $\sigma_{p,r}\left(B\right)$ и $\sigma_{p,f}\left(B\right)$ обратимы.

Библиографический список

1. Karapetiants, N., Samko, S. Equations with Involutive Operators. Boston, Basel, Berlin : Birkhauser, 2001, 427 p.

2. Авсянкин, О. Г. Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин // Математические заметки. — 2003. — Т. 73, вып. 4. — С. 483–493.

3. Деундяк, В. М. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами / В. М. Деундяк // Математические заметки. — 2010. — Т. 87, № 5. — С. 713–729.

4. Деундяк, В. М. Об интегральных операторах с однородными ядрами послойно сингулярного типа в пространстве $L_p\left(R^2\right)$ / В. М. Деундяк, Е. А. Степанюченко // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2007. — Т. 7, № 2 (32). — С. 161–168.

5. Симоненко, И. Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов их огибающих / И. Б. Симоненко. — Ростов-на-Дону : ЦВВР, 2007. — 120 с.

6. Пилиди, В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p / В. С. Пилиди // Математические исследования. — 1972. — Т. 7, № 3. — С. 167–175.

7. Деундяк, В. М. Топологические методы в теории разрешимости многомерных парных интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа / В. М. Деундяк // Труды МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 59–67.

8. Симоненко, И. Б. Операторы типа свёртки в конусах / И. Б. Симоненко // Математический сборник. — 1967. — Т. 74, № 2. — С. 298–314.

9. Пилиди, В. С. Локальный метод в теории операторов типа бисингулярных уравнений / В. С. Пилиди, Л. И. Сазонов // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — 2005. — С. 100–106.

10. Деундяк, В. М. Символы и гомотопическая классификация семейств одномерных сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами / В. М. Деундяк, И. Б. Симоненко, Чинь Шок Минь // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 12. — С. 17–27.

11. Дудучава, Р. В. Интегральные операторы свёртки на квадранте с разрывными символами / Р. В. Дудучава // Известия АН СССР, серия «Математика». — 1976. — Т. 40, № 2. — С. 388–407.

12. Деундяк, В. М. Об одной алгебре операторов билокального типа в $L_p\left(R \times T\right)$ / В. М. Деундяк, Е. А. Степанюченко // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения : межвуз. сб. науч. трудов. — Ростов-на-Дону, 2007. — С. 59–66.

13. Пилиди, В. С. Локальный метод в теории линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений / В. С. Пилиди // Математический анализ и его приложения. — 1971. — Т. 3. — С. 81–105.

14. Каш, Ф. Модули и кольца / Ф. Каш. — Москва : Мир, 1981. — 368 с.

15. Деундяк, В. М. Канонические представления и ядра предсимволов бисингулярных интегральных операторов / В. М. Деундяк // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2004. — Т. 4, № 1 (19). — С. 3–8.

Материал поступил в редакцию 18.10.2013.

References

1. Karapetiants, N., Samko, S. Equations with Involutive Operators. Boston, Basel, Berlin : Birkhauser, 2001, 427 p.

2. Avsyankin, O. G. Ob algebre parnykh integralnykh operatorov s odnorodnymi yadrami. [On algebra of paired integral operators with homogeneous kernels.] Matematicheskiye zametki, 2003, vol. 73, iss. 4, pp. 483–493 (in Russian).

3. Deundyak, V. M. Mnogomernyye integralnyye operatory s odnorodnymi yadrami kompaktnogo tipa i multiplikativno slabo ostsilliruyushchimi koeffitsiyentami. [Multidemensional integral operators with homogeneous compact-type kernels and multiplicatively weakly oscillating coefficients.] Matematicheskiye zametki, 2010, vol. 87, no. 5, pp. 713–729 (in Russian).

4. Deundyak, V. M., Stepanyuchenko, E. A. Ob integralnykh operatorakh s odnorodnymi yadrami posloyno singulyarnogo tipa v prostranstve. [On integral operators with homogeneous kernels of fiber singular type in space.] Vestnik of DSTU, 2007, vol. 7, no. 2 (32), pp. 161–168 (in Russian).

5. Simonenko, I. B. Lokalnyy metod v teorii invariantnykh otnositelno sdviga operatorov ikh ogibayushchikh. [Local method in theory of envelope shift invariant operators.] Rostov-on-Don : TsVVR, 2007, 120 p. (in Russian).

6. Pilidi, V. S. O bisingulyarnom uravnenii v prostranstve. [On bisingular equation in space.] Matematicheskiye issledovaniya, 1972, vol. 7, no. 3, pp. 167–175 (in Russian).

7. Deundyak, V. M. Topologicheskiye metody v teorii razreshimosti mnogomernykh parnykh integralnykh operatorov s odnorodnymi yadrami kompaktnogo tipa. [Topological methods in solvability theory of multidimensional pair integral operators with homogeneous kernels of compact type.] Trudy MIAN, 2012, vol. 278, pp. 59–67 (in Russian).

8. Simonenko, I. B. Operatory tipa svertki v konusakh. [Operators of convolution type in cones.] Matematicheskiy sbornik, 1967, vol. 74, no. 2, pp. 298–314 (in Russian).

9. Pilidi, V. S., Sazonov, L. I. Lokalnyy metod v teorii operatorov tipa bisingulyarnykh uravneniy. [Local method in theory of bisingular equation operators.] Izvestiya vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki. Spetsvypusk. Psevdodifferentsialnyye uravneniya i nekotoryye problemy matematicheskoy fiziki. [Natural Sciences. Special ed. Pseudodifferential equations and some problems of Mathematical Physics.] 2005, pp. 100–106 (in Russian).

10. Deundyak, V. M., et al. Simvoly i gomotopicheskaya klassifikatsiya semeystv odnomernykh singulyarnykh operatorov s kusochno-nepreryvnymi koeffitsiyentami. [Symbols and homotopy classification of one-dimensional singular operator families with piecewise continuous coefficients.] Izvestiya vuzov. Matematika, 1988, no. 12, pp. 17–27 (in Russian).

11. Dudachava, R. V. Integralnyye operatory svertki na kvadrante s razryvnymi simvolami. [Integral operators of convolution on quadrant with discontinuous symbols.] Izvestiya AN SSSR, seriya "Matematika", 1976, vol. 40, no. 2, pp. 388–407 (in Russian).

12. Deundyak, V. M., Stepanyuchenko, E. A. Ob odnoy algebre operatorov bilokalnogo tipa v $L_p(R \times T)$ [On one algebra of bilocal operators in $L_p(R \times T)$.] Integro-differentsialnyye operatory i ikh prilozheniya : mezhvuz. sb. nauch. trudov. [Integro-differential operators and their application: Interuniversity coll. of research papers.] Rostov-on-Don, 2007, pp. 59–66 (in Russian).

13. Pilidi, V. S. Lokalnyy metod v teorii lineynykh operatornykh uravneniy tipa bisingulyarnykh integralnykh uravneniy. [Local method in theory of linear operator equations of bisingular equation operator type.] Matematicheskiy analiz i yego prilozheniya, 1971, vol. 3, pp. 81–105 (in Russian).

14. Kash, F. Moduli i koltsa. [Modules and rings.] Moscow : Mir, 1981, 368 p. (in Russian).

15. Deundyak, V. M. Kanonicheskiye predstavleniya i yadra predsimvolov bisingulyarnykh integralnykh operatorov. [Canonical presentations and presymbol kernels of bisingular equation operators.] Vestnik of DSTU, 2004, vol. 4, no. 1 (19), pp. 3–8 (in Russian).

FREDHOLM PROPERTY OF COMPOSITE TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS SINGULAR-TYPE KERNELS IN L_p SPACE*

V. M. Deundyak, E. A. Romanenko

The authors have previously studied two-dimensional Fredholm integral operators with homogeneous kernels of fiber-singular type. For this class of operators, the symbolic calculus is built using the theory of bilocal operators by V. Pilidi, and Fredholm criterion is formulated through the inversibility of two families: the family of one-dimensional convolution operators, and the family of one-dimensional singular integral operators with continuous coefficients. The aim of this work is to study composite two-dimensional integral operators with homogeneous kernels of fiber-singular type analogous to Simonenko's continual convolution integral operators. This investigation is a part of a more general study of algebra of operators with homogeneous kernels which layers are singular operators with piecewise continuous coefficients. For the considered operators, the symbolic calculus and the necessary and sufficient Fredholm conditions are obtained.

Keywords: *singular equations, convolution operators, homogeneous kernels, Fredholm property.*

* The research is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement no. 14.A18.21.0356), and by the internal Southern Federal University grant Мм 13–16 "Differential and integral equations. Applications to mathematical physics and financial mathematics".