

Внедрение кругового штампа при заданной постоянной температуре на плоской подошве штампа в непрерывно неоднородное термоупругое полупространство*

Л. И. Кренёв, С. М. Айзикович, Б. И. Митрин

Рассматривается осесимметричная квазистатическая задача термоупругости о внедрении цилиндрического штампа с плоской подошвой, на которой поддерживается постоянная температура, в функционально-градиентное полупространство, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициенты теплопроводности и линейного расширения которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое независимо друг от друга. Вне контактной зоны поверхность идеально теплоизолирована и свободна от напряжений. При решении задачи используются полученные ранее с помощью численно-аналитических методов (аппарата интегральных преобразований Ханкеля и метода модулирующих функций) решение несмешанной задачи о произвольном термомеханическом воздействии на неоднородное по глубине термоупругое полупространство. Решение исходной задачи сводится к решению системы парных интегральных уравнений. Свойства трансформант ядер парных интегральных уравнений задачи позволяют применить хорошо обоснованный и развиваемый в настоящее время двусторонний асимптотический метод. С помощью данного метода найдены в аналитическом виде приближённые выражения для величин теплового потока и смещения поверхности полупространства, контактные напряжения под подошвой разогретого штампа. Приведены значения контактных напряжений для различных случаев изменения механических и температурных свойств в приповерхностном слое. Рассматриваются случаи, когда значения термоупругих свойств покрытия совпадают со значениями термоупругих свойств подложки, либо когда значение характеристики отличается в 2 раза (в большую или в меньшую сторону) на поверхности и линейно убывает (или растёт) по глубине до значения в подложке.

Ключевые слова: смешанные задачи, неоднородные материалы, термоупругость, функционально-градиентные материалы, аналитические методы.

Введение. Учёт неоднородности свойств материала при моделировании тепломеханического воздействия является актуальной задачей термоупругости. Такая задача возникает, например, при исследовании свойств защитных покрытий из функционально-градиентных материалов для частей машин и механизмов, подверженных интенсивному термомеханическому воздействию.

Первые аналитические решения задачи об индентировании полубесконечного изотропно-упругого тела осесимметричным нагреваемым штампом были получены в работах [1, 2]. Связанным задачам термоупругости были посвящены монографии В. Новацкого [3] и В. Г. Карнаухова [4]. Контактные задачи термоупругости рассматривались в статье [5] и последующих работах Д. В. Грилицкого и его соавторов. В работах Дж. Барбера (например, [6]) изучались задачи, связанные с контактом движущихся частей механизмов. Свой вклад в развитие термоупругих контактных задач также внесли R. A. Burton, N. Noda, B. Паук и многие другие. Из последних работ, рассматривающих задачу о внедрении горячего штампа, можно отметить [7]. В этой работе получено аналитическое решение задачи для трансверсально изотропного полупространства и рассмотрено его применение для сканирующей зондовой микроскопии.

В перечисленных выше работах предполагалось, что свойства деформируемой среды однородны по её объёму, и, таким образом, они не всегда являются применимыми для случая деформирования тел с покрытиями или функционально-градиентных тел. При этом современные экспериментальные исследования показывают эффективность их применения в промышленности.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 14.B37.21.1632) и РФФИ (гранты № 12-07-00639-а, № 13-08-01435-а).

Например, J. Q. Li в работе [8] рассмотрел температурные свойства YSZ-NiCr с промежуточным слоем, состоящим из ФГМ; им была показана высокая температурная устойчивость материала.

Интерес к моделированию термоупругого поведения ФГМ существовал с момента начала их использования в промышленности. В последнее десятилетие учёными по всему миру был получен ряд результатов [9–10], в которых различными методами строились математические модели такого поведения при различного вида нагрузках. Однако решения, используемые в приведённых работах, используют различные упрощённые модели изменения характеристик в объёме материала, и не могут быть применены для сложных случаев изменения термоупругих и механических свойств по глубине слоя.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная квазистатическая задача термоупругости для функционально-градиентного полупространства, модуль упругости и коэффициенты Пуассона, теплопроводности и линейного расширения которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое независимо друг от друга. Для её решения используется численно-аналитический метод, описанный в работе [11]. При этом используется полученное ранее [12] решение для определения искривления формы поверхности неоднородного по глубине термоупругого полупространства при локальном нагреве.

1. Постановка задачи о воздействии горячего штампа на термоупругое неоднородное покрытие, сцепленное с полупространством. Рассмотрим полупространство Ω , термомеханические характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины H , а затем стабилизируются и остаются постоянными. С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . При этом полагаем, что $0 \leq r < \infty$, а $z < 0$. Обозначим через u, v, w смещения вдоль осей r, φ, z , а через $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$ — радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно. Кроме того, введём обозначения для температуры — T , коэффициента теплопроводности — $\lambda_T(z)$, коэффициента линейного расширения — $\alpha_T(z)$, коэффициента теплоёмкости — $c_T(z)$. В ненапряжённом состоянии температуру полупространства примем равной T_0 и будем анализировать разность температур $\theta = T - T_0$.

На поверхность Γ неоднородного полупространства Ω воздействует жёсткий круговой в плане штамп-теплоизолятор, который вдавлируется в полупространство силой P . На контактной площадке $0 \leq r < a$ поддерживается постоянная температура и образуется тепловой поток, направленный внутрь неоднородного полупространства.

Далее будем полагать, что коэффициенты Ламе $M(z)$ и $\Lambda(z)$, и коэффициенты теплопроводности $\lambda_T(z)$ и линейного расширения $\alpha_T(z)$ являются непрерывными функциями координаты z , такими, что

1. $M(z) = M(-H) = M^S, -\infty \leq z \leq -H$
 $\Lambda(z) = \Lambda(-H) = \Lambda^S, \lambda_T(z) = \lambda_T(-H) = \lambda_T^S,$
 $\alpha_T(z) = \alpha_T(-H) = \alpha_T^S.$
2. $M(z) = M^C(z), \Lambda(z) = \Lambda^C(z), -H \leq z \leq 0$
 $\lambda_T(z) = \lambda_T^C(z), \alpha_T(z) = \alpha_T^C(z).$
3. $M^C(-H) = M^S, \Lambda^C(-H) = \Lambda^S,$
 $\lambda_T^C(-H) = \lambda_T^S, \alpha_T^C(-H) = \alpha_T^S.$

$$\begin{aligned}
 \min_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) &\geq \Lambda_* > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) &\leq \Lambda^* < \infty, \\
 \min_{z \in (-\infty, 0)} M(z) &\geq M_* > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} M(z) &\leq M^* < \infty, \\
 \min_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) &\geq \lambda_{T*} > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) &\leq \lambda_T^* < \infty, \\
 \min_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) &\geq \alpha_{T*} > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) &\leq \alpha_T^* < \infty,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где H — толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим полупространством, то есть глубина, с которой мы полагаем термомеханические характеристики полупространства постоянными; индекс S соответствует подстилающему однородному полупространству; C — неоднородному слою; $\Lambda_*, \Lambda^*, M_*, M^*, \lambda_{T*}, \lambda_T^*, \alpha_{T*}, \alpha_T^*$ — произвольные константы.

Наряду с парой коэффициентов Ламе для описания упругого поведения твёрдого изотропного тела используются: модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν или модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Коэффициенты Ламе Λ и M (иногда обозначаемый G и называемый модулем сдвига) связаны с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и изотермическим модулем объёмного расширения K соотношениями

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E = \frac{M(2M+3\Lambda)}{M+\Lambda}, \\
 \nu &= \frac{\Lambda}{2(M+\Lambda)}, \quad 3K(z) = 3\Lambda(z) + 2M(z).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Под действием центрально приложенной силы P штамп переместится в направлении оси z на величину δ . Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид:

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a, \\ w = -\delta(r) = -(\delta - \psi(r)), & r \leq a, \\ \theta = \theta_0, & r \leq a, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, & r > a. \end{cases} \tag{3}$$

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при $z = -H$ в силу непрерывности, должны выполняться условия сопряжения по смещениям, их производным, температуре и тепловому потоку.

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^C(r, -H) &= \sigma_z^S(r, -H), \quad \tau_{rz}^C(r, -H) = \tau_{rz}^S(r, -H), \quad u^C(r, -H) = u^S(r, -H), \\
 w^C(r, -H) &= w^S(r, -H), \quad \theta^C(r, -H) = \theta^S(r, -H), \quad (\theta^C)'(r, -H) = (\theta^S)'(r, -H).
 \end{aligned} \tag{4}$$

На бесконечности при $(r, -z) \rightarrow \infty$ значения величин смещений, деформаций и напряжений стремятся к нулю. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю.

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow -\infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0, \\
 \lim_{z \rightarrow \infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом и величину теплового потока в пределах контактной зоны:

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^C \Big|_{z=0} &= -p(r), \quad r \leq a, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \beta(r), \quad r \leq a.
 \end{aligned} \tag{6}$$

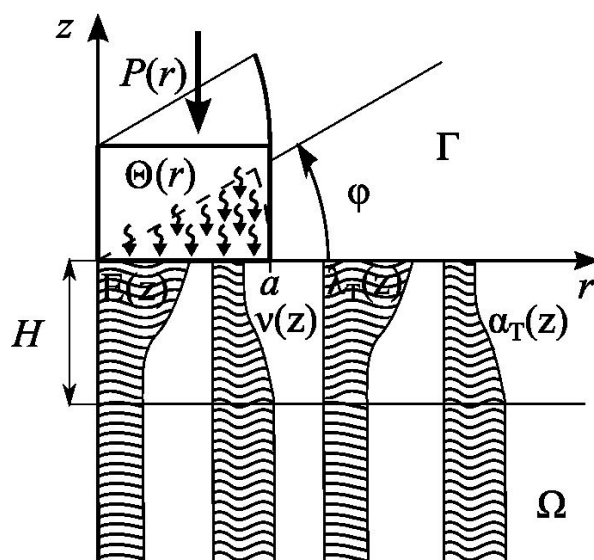


Рис. 1. Схема внедрения горячего штампа с плоской подошвой в неоднородное полупространство

2. Сведение задачи о внедрении гладкого кругового горячего штампа с плоской подошвой в неоднородное полупространство, к решению системы парных интегральных уравнений. При построении системы парных интегральных уравнений осесимметричной смешанной задачи статической термоупругости воспользуемся полученными в работе [12] формулами, выражающими зависимость величины смещения w и температуры θ через неизвестное распределение контактного давления $p(r)$ и теплового потока через контактную зону

$$\beta(r) = \left. \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

$$\begin{cases} w(r, 0) = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^3(r, z) = \int_0^a p(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_1^3(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma + \\ + \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_2^3(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma + \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^3(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma, \\ \theta(r, 0) = I_{30}^5(r, 0) = \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^5(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma. \end{cases} \quad (7)$$

Так как мы полагаем, что контакт штампа с неоднородным основанием гладкий, то отсюда следует равенство нулю значений $q(r) = 0$, $0 \leq r \leq a$, а также второго интеграла в выражении (7). Теперь условие (7) можно записать в виде:

$$\begin{cases} w(r, 0) = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^3(r, 0) = \int_0^a p(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_1^3(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma + \\ + \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^3(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma, \\ \theta(r, 0) = I_{30}^5(r, 0) = \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^5(\gamma, 0) J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma r) d\gamma. \end{cases} \quad (8)$$

В рассматриваемой нами задаче упругие характеристики не зависят от температуры, поэтому решение системы (8) разбивается на два этапа.

На первом (рассмотренном в работе [12]) определяется величина теплового потока и распределение температуры в неоднородном полупространстве, а также деформация поверхности

неоднородного термоупругого полупространства при его нагреве с поверхности источником с постоянной температурой.

В настоящей работе решается смешанная задача о внедрении гладкого кругового штампа с плоской подошвой в неоднородное полупространство, деформированное воздействием найденного нами теплового потока через контактную зону.

Заметим также, что в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства, для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $p(a) \geq 0$ для всех $r \leq a$.

Для решения поставленной задачи приведём её к эквивалентному парному интегральному уравнению относительно $p(r)$, для этого воспользуемся результатами работы [11]. Запишем граничное условие на поверхности слоя в пределах контактной зоны, при этом обозначим $L_3(u, 0)$ через $L(u)$:

$$\begin{cases} \int_0^\infty P(a) L(\lambda a) J_0(ar) da = \frac{E(0)}{1-\nu} f(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty P(a) J_0(ar) a da = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$P(a) = \int_0^1 p(\rho) J_0(a\rho) \rho d\rho, \quad (10)$$

$$f(r) = \delta - \varphi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\varphi(ra) = 0$ для плоского штампа, δ — величина внедрения штампа в полупространство, $\lambda = H/a$ — характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda a)$ — трансформанта ядра парного интегрального уравнения. При выполнении условий:

$$\begin{aligned} \min_{z \in (-\infty; 0]} E(z)(1-\nu)^{-1} \geq c_1 > 0, \quad \max_{z \in (-\infty; 0]} E(z)(1-\nu)^{-1} \leq c_2 < \infty, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} E(z)(1-\nu)^{-1} = \text{const}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично [15] может быть показано, что трансформанта ядра $L(a)$ обладает следующими свойствами:

$$L(a) = A + \beta_1 |a| + O(a^2), \quad a \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$L(a) = 1 + \beta_2 |a|^{-1} + O(a^{-2}), \quad a \rightarrow \infty,$$

$$A = \lim_{z \rightarrow -\infty} E(0) E(z)^{-1}. \quad (13)$$

Здесь β_1, β_2 — постоянные. Свойства (12)–(13) функции $L(a)$ позволяют аппроксимировать её дробно-рациональным выражением специального вида.

Введём следующие определения. Будем говорить, что $L(\gamma)$ принадлежит классу Π_N , если она имеет вид:

$$L_N(\gamma) = \prod_{i=1}^N (\gamma^2 + A_i^2) (\gamma^2 + B_i^2)^{-1}, \quad (B_i - B_k)(A_i - A_k) \neq 0, \quad i \neq k. \quad (14)$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — некоторые комплексные постоянные.

В свою очередь будем считать функцию $L(\gamma)$ принадлежащей классу Σ_M , если её можно представить в виде:

$$L_M^\Sigma(\gamma) = \sum_{k=1}^M C_k \gamma (\gamma^2 + D_k^2)^{-1}. \quad (15)$$

Здесь C_k — действительные константы, а D_k ($k = 1, 2, \dots, M$) — комплексные.

В работах [13, 14] доказано, что если функция $L(a)$ обладает свойствами (12)–(13), то она может быть представлена в виде:

$$L(a\lambda) = L_N^\Pi(a\lambda) + L_M^\infty(a\lambda). \quad (16)$$

3. Построение приближённого аналитического решения задачи о внедрении нагретого штампа в термоупругое полупространство. Решение (9) ищется следующим образом: парное интегральное уравнение приводится к более простому виду, ядро аппроксимируется дробно-рациональным выражением, с помощью операционного исчисления находится решение, а затем обратными преобразованиями задача сводится к решению линейной алгебраической системы.

Рассмотрим парное интегральное уравнение вида:

$$\begin{cases} \int_0^\infty P(\gamma) L(\lambda\gamma) J_0(r\gamma) d\gamma = \Theta_0 \delta(1 + f(r)), & r \leq 1, \\ \int_0^\infty P(\gamma) J_0(r\gamma) \gamma d\gamma = 0, & r > 1. \end{cases} \quad (17)$$

Функция $f(r)$ описывает деформацию поверхности под действием источника тепла с постоянной температурой. Её можно представить в виде ряда Фурье-Бесселя:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r). \quad (18)$$

Учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, $J_0(r\varepsilon) \rightarrow 1$, уравнение (17) посредством операторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^\zeta \Phi(r) &= \frac{d}{d\zeta} \int_0^\zeta \frac{r}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \Phi(r) dr; \quad (\mathbf{U}_1^\zeta J_0(ar) = \cos a\zeta), \\ \mathbf{U}_2^\zeta \Phi(r) &= \frac{d}{d\zeta} \int_\zeta^\infty \frac{r}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \Phi(r) dr; \quad (\mathbf{U}_2^\zeta J_0(ar) = a^{-1} \cos a\zeta), \end{aligned}$$

можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Theta_0 \delta} \int_0^\infty P(\gamma) L(\lambda\gamma) \cos t\gamma d\gamma = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \mu_k t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \int_0^\infty P(\gamma) \cos t\gamma d\gamma = 0, & t > 1. \end{cases} \quad (19)$$

В случае, когда

$$L(\lambda\gamma) = L_N(\lambda\gamma) = \frac{P_1(\lambda^2 \gamma^2)}{P_2(\lambda^2 \gamma^2)} = \prod_{i=1}^N \frac{\lambda^2 \gamma^2 + A_i^2}{\lambda^2 \gamma^2 + B_i^2}, \quad (20)$$

можно получить решение задачи в аналитическом виде.

Введём функцию

$$p(t) = \int_0^\infty P(a) \cos at da. \quad (21)$$

Тогда (19) можно представить в виде:

$$P_1(-D) p(t) = P_2(-D) g_1(t), \quad D = \frac{d^2}{dt^2}, \quad t \in [0; 1], \quad (22)$$

где полиномы P_1 и P_2 определяются, как в выражении (20).

Решая неоднородное дифференциальное уравнение (22) и выполняя затем обратное преобразование Фурье для (21) получим выражение для контактных напряжений под горячим штампом:

$$p(r) = \frac{2\Theta_0 \delta}{\pi} \left\{ L^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \Psi(r, A_i \lambda^{-1}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j X(r, \mu_j) L_N^{-1}(\lambda \mu_j) \right\}. \quad (23)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Psi(r, A) = \frac{\operatorname{ch} A}{\sqrt{1-r^2}} - A \int_r^1 \frac{\operatorname{sh} A t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad X(r, \mu) = \frac{\cos \mu}{\sqrt{1-r^2}} + \mu \int_r^1 \frac{\sin t \mu dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i a \left(\frac{A_i}{\lambda}, \frac{B_k}{\lambda} \right) + \frac{B_k^{-1} \lambda}{L_N(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \beta \left(\mu_j, \frac{B_k}{\lambda} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где

$$a(B, A) = \frac{B \operatorname{ch} A + A \operatorname{sh} A}{B^2 - A^2}; \quad \beta(B, \mu) = \frac{B \cos \mu - \mu \sin \mu}{L_N(\lambda \mu)(\mu^2 + B^2)}.$$

В данном случае связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид:

$$P = 4a^2 \delta \Theta_0 \left[L^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i A_i^{-1} \lambda \operatorname{sh} A_i \lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j L_N^{-1}(\lambda \mu_j) \mu_j^{-1} \sin \mu_j \right]. \quad (25)$$

4. Определение контактных напряжений под поверхностью горячего штампа, внедряемого в неоднородное термоупругое покрытие. Используя выражение (23), рассчитаем значения контактных давлений под горячим штампом для 5 характерных случаев изменения свойств по глубине:

0 — значение характеристики в покрытии не отличаются от соответствующих значений в подложке;
3 — значение характеристики на поверхности в 2 раза превышает значение в подложке и линейно убывает по всей толщине покрытия до значения в подложке;

4 — значение характеристики на поверхности в 2 раза меньше значения в подложке и линейно возрастает по всей толщине покрытия до значения в подложке.

Наглядное изображение законов изменения термомеханических характеристик приводится на рисунке 2.

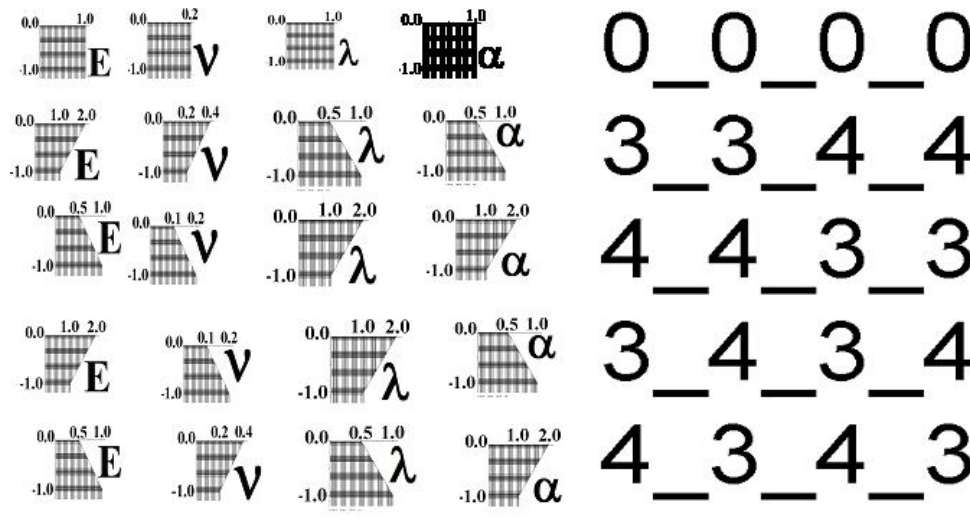


Рис. 2. Схема характерных случаев изменения свойств в термоупругом покрытии

На рис. 3 представлены значения контактных напряжений под поверхностью горячего штампа с плоской подошвой, внедряемого в непрерывно неоднородное полупространство. Обозначения кривых соответствуют законам изменения термоупругих характеристик, описанным выше. Максимальный уровень напряжений достигается в том случае, когда модуль Юнга и коэффициент Пуассона возрастают по глубине покрытия, а коэффициент теплопроводности и коэффициент линейного расширения убывают.

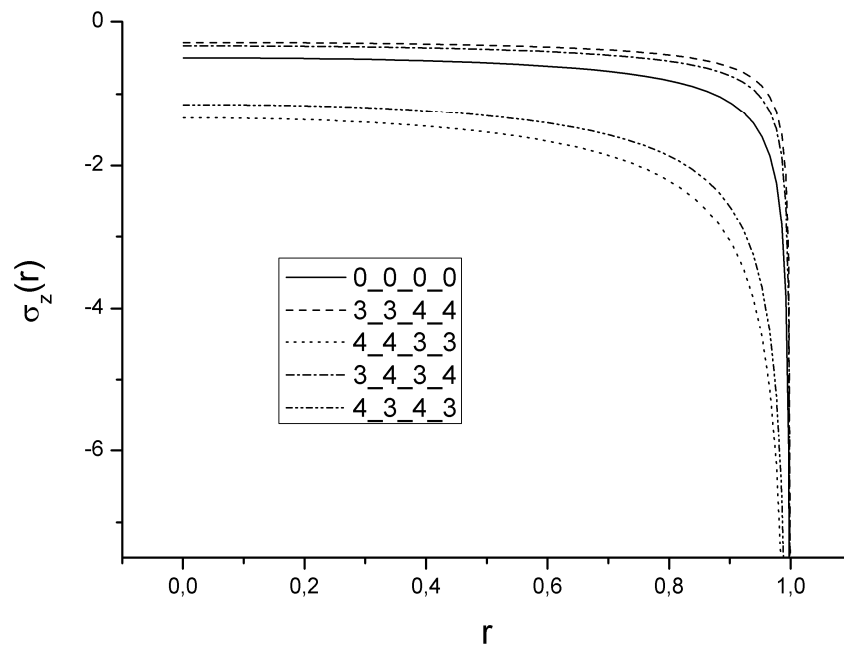


Рис. 3. Контактные напряжения под поверхностью горячего штампа, внедряемого в неоднородное термоупругое полупространство

С учётом независимого изменения модуля Юнга, коэффициента Пуассона, коэффициента теплопроводности и коэффициента линейного расширения в покрытии, при рассматриваемых нами законах линейного убывания и возрастания в 2 раза относительно свойств подложки число различных комбинаций составляет 16. Кроме этого, рассмотрим случай однородного полупространства. На рис. 4, 5 приведены отношения контактных напряжений на поверхности к контактным напряжениям для однородного полупространства в случае внедрения в него горячего штампа с плоской подошвой для 3 отношений радиуса зоны контакта к толщине неоднородного слоя. Обозначения экземпляров наборов независимого изменения неоднородных термоупругих характеристик на рисунках описаны выше.

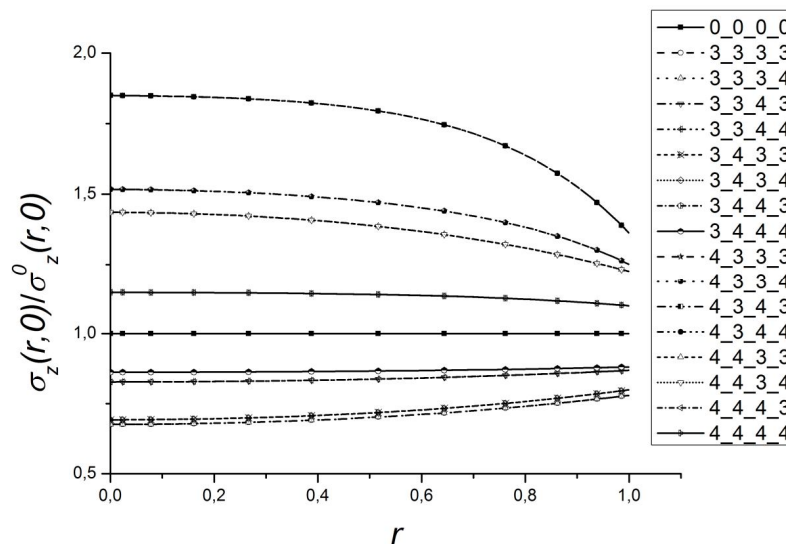


Рис. 4. Относительные контактные напряжения под поверхностью горячего штампа, внедряемого в неоднородное термоупругое полупространство. Отношение радиуса зоны контакта к толщине слоя равно 0,25

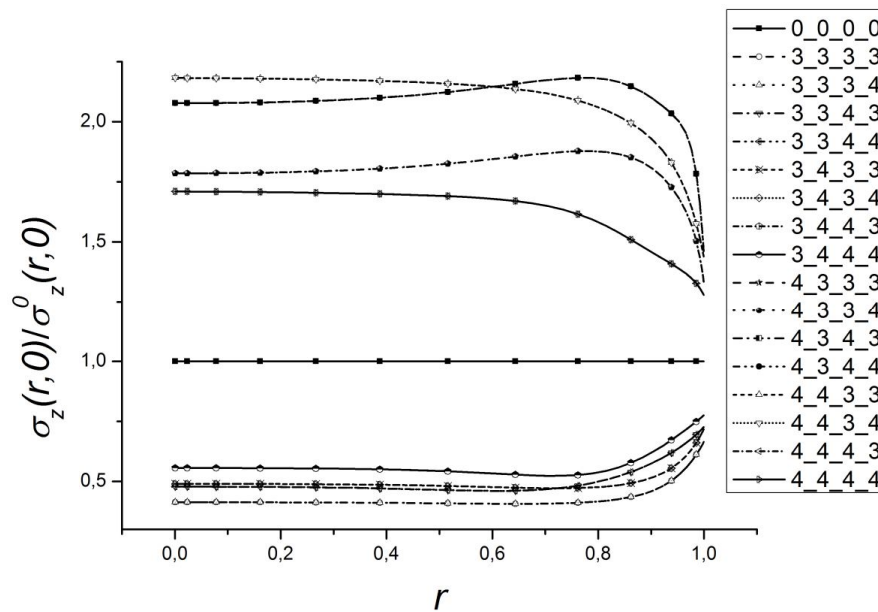


Рис. 5. Относительные контактные напряжения под поверхностью горячего штампа, внедряемого в неоднородное термоупругое полупространство. Отношение радиуса зоны контакта к толщине слоя равно 4,0

Анализируя рисунки можно отметить, что в случае покрытия, более жёсткого на поверхности, контактные напряжения в центре зоны контакта меньше, чем в однородном полупространстве, а для мягких на поверхности покрытий — больше. С увеличением зоны контакта разброс кривых увеличивается.

Заключение. С помощью двусторонне-асимптотического метода получено эффективное аналитическое решение осесимметричной контактной задачи о внедрении кругового штампа с плоской подошвой при заданной на ней постоянной температуре в непрерывно неоднородное термоупругое полупространство. Были получены численные результаты для относительных контактных напряжений, которые позволяют судить о влиянии характера изменения упругих модулей и термомеханических коэффициентов в покрытии на величину контактных напряжений. Данные могут быть использованы при разработке функционально-градиентных покрытий материалов, использующихся в условиях интенсивного термомеханического нагружения.

Библиографический список

1. Бородачёв, Н. М. К решению контактных задач термоупругости в случае осевой симметрии / Н. М. Бородачёв // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1962. — № 5. — С. 12–21.
2. Sneddon, I. N. The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch / I. N. Sneddon, D. L. George // J. Math. Mech. — 1962. — Vol. 11. — Pp. 665–689.
3. Nowacki, W. Thermoelasticity / W. Nowacki. — London : Pergamon Press, 1962.
4. Карнаухов, В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В. Г. Карнаухов. — Киев : Наукова думка, 1982. — 260 с.
5. Грилицкий, Д. В. Осесимметричная контактная задача термоупругости для transversально изотропного полупространства / Д. В. Грилицкий, Б. Г. Шелестовский // Прикладная механика. — 1973. — Т. 6. — Вып. 8. — С. 3–8.
6. Barber, J. R. Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space / J. R. Barber // Wear. — 1975. — Vol. 35. — Pp. 283–289.
7. Karapetian, E., Kalinin, S. V. Indentation of a punch with chemical or heat distribution at its base into transversely isotropic half-space: Application to local thermal and electrochemical probes / E. Karapetian, S. V. Kalinin // Journal of Applied Physics. — 2013. — Vol. 113. — DOI: 10.1063/1.4802097.

8. Li, J. Q. Fabrication and thermal properties of a YSZ–NiCr joint with an interlayer of YSZ–NiCr functionally graded material / Li, J. Q. [и др.] // Journal of the European Ceramic Society. — 2003. — Vol. 23. — Pp. 1847–1853.
9. Liu, J. Two-dimensional thermoelastic contact problem of functionally graded materials involving frictional heating / J. Liu, L.-L. Ke, Y.-S. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48. — Pp. 2536–2548.
10. Barik, S. P. Steady state thermoelastic contact problem in a functionally graded material / S. P. Barik, M. Kanoria, P. K. Chaudhuri // International Journal of Engineering Science. — 2008. — Vol. 46. — Pp. 775–789.
11. Айзикович, С. М. Численно-аналитический метод решения осесимметричных несмешанных задач термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства / С. М. Айзикович, Л. И. Кренёв // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2011. — Т. 11. — № 6 (57). — С. 800–811.
12. Кренёв, Л. И. Определение изменения формы поверхности непрерывно-неоднородного термоупругого полупространства при локальном нагреве / Л. И. Кренёв, С. М. Айзикович, Б. И. Митрин // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 3–4 (72–73). — С. 5–15.
13. Айзикович, С. М. Осесимметрическая задача о вдавлении круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство / С. М. Айзикович, В. М. Александров // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1984. — Т. 19. — № 2. — С. 73–82.
14. Айзикович, С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54. — № 5. — С. 872–877.
15. Айзикович, С. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству / С. М. Айзикович, В. М. Александров // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 266. — № 1. — С. 40–43.

Материал поступил в редакцию 29.10.2013.

References

1. Borodachev, N. M. K resheniyu kontaknykh zadach termouprugosti v sluchaye osevoy simmetrii. [On the solution of the contact problem of thermoelasticity in the case of axial symmetry.] Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekhn. Nauk, Mekhan. i Mashinostr. 1962, no. 5, pp. 12–21 (in Russian).
2. Sneddon, I. N., George, D. L. The axisymmetric Boussinesq problem for a heated-punch. J. Math. Mech., 1962, vol. 11, pp. 665–689.
3. Nowacki, W. Thermoelasticity. London : Pergamon Press, 1962.
4. Karnaukhov, V. G. Svyazannyye zadachi termovyazkouprugosti. [Coupled problems of thermoviscoelasticity.] Kiev : Naukova dumka, 1982, 260 p. (in Russian).
5. Grilitskiy, D. V., Shelestovskiy, B. G. Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha termouprugosti dlya transversalno izotropnogo poluprostranstva. [The axisymmetric contact problem of thermoelasticity for a transversely isotropic half-space.] Prikladnaya mekhanika, 1973, vol. 6, iss. 8, pp. 807–811 (in Russian).
6. Barber, J. R. Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space. Wear, 1975, vol. 35, pp. 283–289.
7. Karapetian, E., Kalinin, S. V. Indentation of a punch with chemical or heat distribution at its base into transversely isotropic half-space : Application to local thermal and electrochemical probes. Journal of Applied Physics, 2013, vol. 113, doi : 10.1063/1.4802097.
8. Li, J. Q., Zeng, X. R., Tang, J. N., Xiao, P. Fabrication and thermal properties of a YSZ–NiCr joint with an interlayer of YSZ–NiCr functionally graded material. Journal of the European Ceramic Society, 2003, vol. 23, pp. 1847–1853.
9. Liu, J., Ke, L.-L., Wang, Y.-S. Two-dimensional thermoelastic contact problem of functionally graded materials involving frictional heating. International Journal of Solids and Structures, 2011, vol. 48, pp. 2536–2548.

10. Barik, S. P., Kanoria, M., Chaudhuri, P. K. Steady state thermoelastic contact problem in a functionally graded material. *International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 46, pp. 775–789.
11. Aizikovich, S. M., Krenev, L. I. Chislenno-analiticheskiy metod resheniya osesimmetrichnykh nesmeshannykh zadach termouprugosti dlya nepreryvno-neodnorodnogo po glubine poluprostranstva. [Numerical analytic solution to unmixed axisymmetric problems of thermoelasticity for continuous-inhomogeneous in depth half-space.] *Vestnik of DSTU*, 2011, vol. 11, no. 6 (57), pp. 800–811 (in Russian).
12. Krenev, L. I., Aizikovich, S. M., Mitrin, B. I. Opredeleniye izmeneniya formy poverkhnosti nepreryvno-neodnorodnogo termouprugogo poluprostranstva pri lokalnom nagreve. [Determination of surface deformation of continuously inhomogeneous thermoelastic half-space under local heating.] *Vestnik of DSTU*, 2013, no. 3–4 (72–73), pp. 5–15 (in Russian).
13. Aizkovich, S. M., Alexandrov, V. M. Osesimmetricheskaya zadacha o vdavlivanii kruglogo shtampa v uprugoye, neodnorodnoye po glubine poluprostranstvo. [Axisymmetric problem of indentation of a circular die into an elastic half-space that is nonuniform with respect to depth.] *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela* [Mechanics of Solids], 1984, vol. 19, iss. 2, pp. 73–82 (in Russian).
14. Aizkovich, S. M. Asimptoticheskoye resheniye odnogo klassa parnykh uravneniy. [Asymptotic solution to one class of dual equations.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1990, vol. 54, no. 5, pp. 872–877 (in Russian).
15. Aizkovich, S. M., Alexandrov, V. M. O svoystvakh funktsiy podatlivosti, sootvetstvuyushchikh sloistomu i nepreryvno-neodnorodnomu poluprostranstvu. [On properties of compliance functions relevant to layered and continuously-inhomogeneous half-space.] *Doklady AN SSSR*, 1982, vol. 266, no. 1, pp. 40–43 (in Russian).

CIRCULAR PUNCH INDENTATION INTO CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS THERMOELASTIC HALF-SPACE UNDER GIVEN CONSTANT TEMPERATURE AT ITS FLAT BOTTOM*

L. I. Krenev, S. M. Aizikovich, B. I. Mitrin

An axially symmetric quasistatic thermoelasticity problem on the indentation of a flat-ended cylindrical punch with a constant temperature at its base into the functionally-graded half-space which elasticity modulus, Poisson ratio, heat conductivity and expansion coefficients are independently continuously varying in the boundary layer, is considered. Out of the contact area, the surface is perfectly thermally-insulated and stress-free. The earlier solution, obtained through the combined numerical and analytical approach (using Hankel integral transform and the modulating function method) to the unmixed problem on the arbitrary thermomechanical effect upon the inhomogeneous in depth thermoelastic half-space, is applied to solve the problem. The original problem is reduced to the system of dual integral equations. The properties of the dual integral equations kernel transforms allow applying a well-grounded bilateral asymptotic technique which is being actively developed at present. The approximate expressions for determining the thermal flux, the half-space surface displacement, and the contact stresses under the heated stamp base, are obtained with the aid of this method. The numerical values of contact stresses for various cases of the thermomechanical properties variation in the boundary layer of the half-space are provided. The cases either when values of the thermomechanical coating properties are the same as those of the substrate, or when the property value differs twice (upward or downward) on the surface, and linearly decreases (or goes up) in depth to the value in the substrate, are considered.

Keywords: mixed problems, inhomogeneous materials, thermoelasticity, functionally-graded materials, analytic methods.

* The research is done with the financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement no. 14.B37.21.1632), and from RFFI (Grants nos. 12-07-00639-a, 13-08-01435-a).