

Аппроксимационное построение математических моделей по точечным экспериментальным данным методом cut-glue*

Р. А. Нейдорф

Рассматривается решение проблемы описания экспериментально полученных зависимостей. Предложенный автором метод основывается на получении локальных приближений фрагментов данных зависимостей и аддитивном сведении их в единое аналитическое выражение. Такой эффект определяется применением специальных «выделяющих» функций, ограничивающих область ненулевого определения каждой из аппроксимирующих функций. По применяемым принципам аппроксимации метод назван «cut-glue»[†]. Наиболее близкий его аналог — сплайн-аппроксимация. Однако метод cut-glue значительно гибче, т. к. не связан ни количеством аппроксимируемых сплайном точек, ни порядком функций, аппроксимирующих участки. Порядок аппроксимирующего полинома или другой аппроксимирующей функции, а также её структура для каждого участка могут быть произвольными. Ещё одно выгодное отличие cut-glue аппроксимации состоит в единой аналитической записи всей кусочной функции вместо задания векторной сплайн-функции громоздкой системой уравнений. Такого эффекта удалось добиться применением аналитической функции, аппроксимирующей и параметрически сколь угодно приближающейся к единичной функции Хевисайда. Приведены результаты аналитического и численного исследования свойств и итогов применения предложенного метода. Они проиллюстрированы практическими примерами приложения метода к практическим задачам, табличными и графическими данными.

Ключевые слова: экспериментальная зависимость, кусочная функция, аппроксимация, мультипликативность, аддитивность, дифференцируемость, аналитическая функция, параметрическое приближение.

Введение. Одним из важных практических приложений математических методов является решение задачи аппроксимации различного рода экспериментальных зависимостей. К аппроксимации приходится прибегать при построении математических моделей различных природных, технических, экономических, социальных и иных явлений и объектов на основе результатов экспериментальных исследований [1, 2]. Наиболее распространённым и математически проработанным подходом к решению таких задач является регрессионный анализ, опирающийся на метод наименьших квадратов (МНК) [1, 3].

Метод регрессионного полиномиального описания экспериментальных точечных данных в заданном диапазоне исследования является стандартным. Он поддерживается всеми универсальными и несколькими специализированными программными средствами (MATLAB [4, 5], MathCAD [6, 7], Statistica [8, 9] и др.). Возможны и другие, не полиномиальные формы регрессионной аппроксимации, когда эмпирически подбирается совокупность подходящих для описания функций [7, 9]. Но этот подход нерегулярный и не поддержан таким мощным, хорошо разработанным математическим аппаратом, как классический регрессионный анализ. Однако и у последнего есть существенный недостаток — он плохо подходит для аппроксимации многоэкстремальных зависимостей, особенно кусочного характера с явными изломами, т. е. с фактически существующими разрывами по производной. В этом случае применение при обработке данных критерия МНК может дать два различных результата. Первый, при малом порядке аппроксимирующего полинома — очень грубое приближение к экспериментально снятым точкам. Второй, при высоком порядке — достаточно близкое воспроизведение зависимости в окрестности этих точек. При этом не обеспечивается гладкость описания межточечных интервалов. Так, на рис. 1 приведены примеры

* Работа выполнена по темплану Минобрнауки России № 2.3.13 «Метод сбалансированной дискретизации для задач имитационного моделирования динамических процессов в распределённых объектах».

[†] Резать-клеить (англ.).

результатов регрессионного описания экспериментальной точечной зависимости от угла наклона α аэродинамического коэффициента подъёмной силы (рис. 1) одной из конструкций аэростатов [10–12]. Сила возникает либо при воздействии бокового ветрового потока (α — угол крена), либо при движении аппарата (α — угол атаки). Зависимость необходимо оценить по 13 экспериментально полученным точкам. В связи с этим максимально возможная степень оптимального по МНК аппроксимирующего полинома равна 12. Регрессия этого порядка построена на рис. 1, а. Хорошо видно, что график полинома 12 порядка абсолютно точно воспроизводит экспериментальные точки, но практически произвольно ведёт себя на межточечных интервалах.

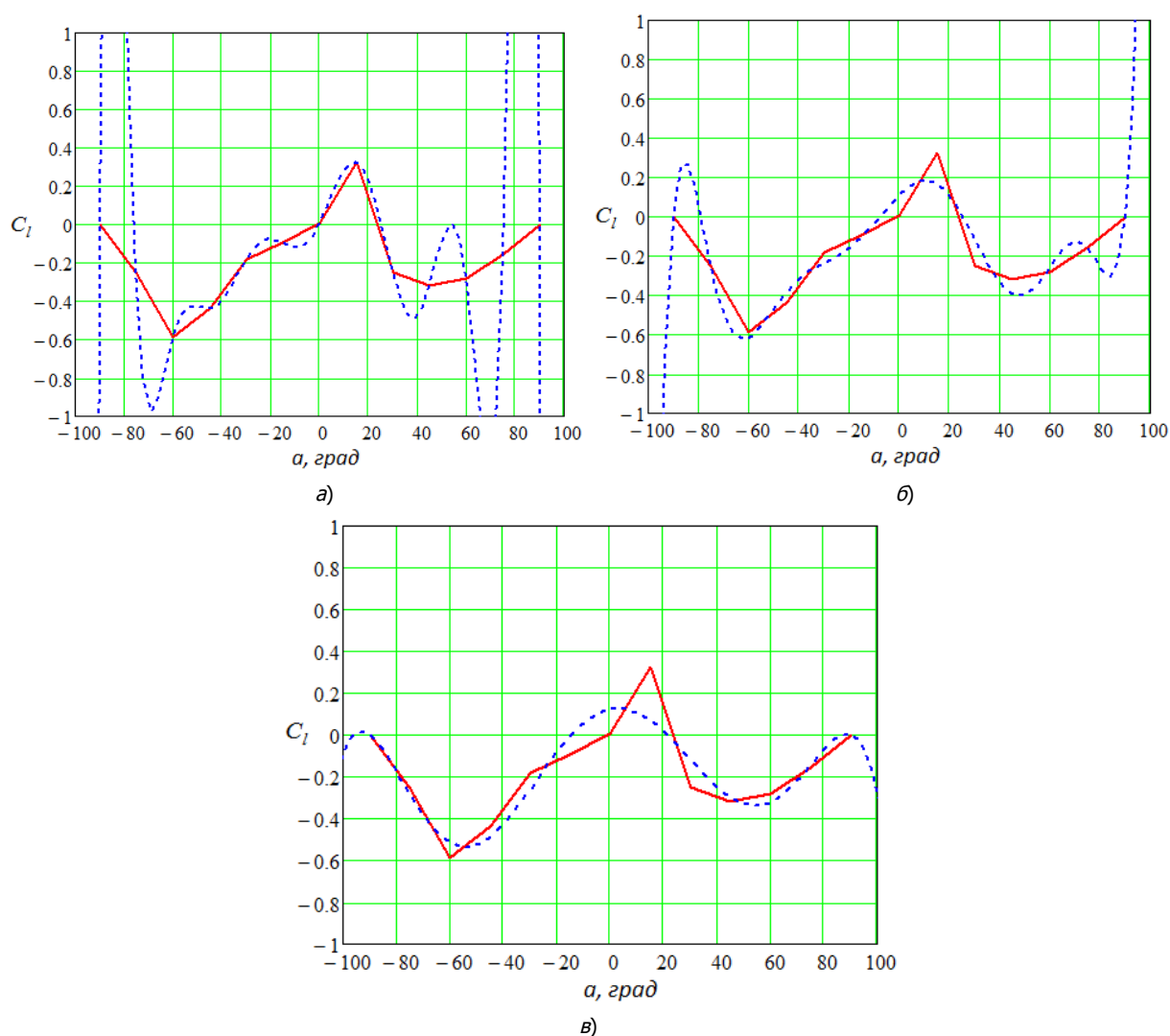


Рис. 1. Примеры аппроксимации точечной экспериментальной зависимости от порядка аппроксимирующего её полинома, оптимального по МНК: а — $n = 12$; б — $n = 9$; в — $n = 6$

Это полностью согласуется с известным свойством результатов классического регрессионного описания — с повышением порядка оптимальный по МНК полином теряет фильтрующие свойства [1]. На нижних графиках рис. 1, б, в показаны результаты регрессионного описания исследуемого диапазона полиномами девятого и шестого порядков. Видно, что аппроксимация межточечных интервалов последовательно улучшается, но воспроизведение экспериментальных значений аэродинамического коэффициента (АДК) резко ухудшается. Таким образом, полноинтервальная полиномиальная аппроксимация моделируемой зависимости, имеющей очевидный кусочный характер, в общем случае неэффективна.

Для подобных зависимостей более продуктивен другой подход, основанный на математическом описании отдельных интервалов кривой и записи зависимости в виде системы функций со смежными областями определения каждой из них (кусочная аппроксимация [13, 14]). Такая функция записывается в виде логически обусловленной по областям определения системы функций. Это делает результат описания громоздким и не очень удобным для компьютерного моделирования. Кроме того, при использовании функции дробной структуры дополнительные проверки логических условий по значению аргумента и обращение к новым расчётным формулам создают тормозящий эффект при онлайн-моделировании быстро протекающих процессов. Дополнительные трудности, вызванные кусочностью, возникают также при необходимости использования производных от моделируемой зависимости.

Более совершенным является метод сплайнирования, или сплайн-функций. Его отличительная особенность — совмещение кусочной аппроксимации с краевым согласованием значений производных. Последнее делает функцию дифференцируемой, несмотря на кусочность [14, 15]. Особенно распространены кубическая сплайн-аппроксимация и интерполяция, обладающие высокой регулярностью решения и хорошими точностными характеристиками [16]. Однако высокая степень дискретизации, жёсткая привязка к количеству сплайнируемых точек и громоздкость системы условно логического описания делают этот подход неудобным для использования при необходимости построен

ия компактной математической модели для аналитических преобразований и имитационного моделирования. Кроме того, основное достоинство сплайн-подхода — согласование аппроксимирующих функций по производным не всегда физически оправдано для некоторых объектов.

Таким образом, очевидна актуальность поиска и исследования новых подходов, методов и алгоритмов экспериментально-аналитического описания зависимостей, имеющих очевидный кусочный характер, указывающих на явное наличие разрывов первого рода по производной на границах участков.

Постановка задачи. Ставится задача построения метода аппроксимации, позволяющего создавать математические модели зависимостей, представленных экспериментально полученными точечными данными, в виде единой аналитической, хотя бы один раз дифференцируемой функции. Перечисленные свойства позволяют строить аппроксимационные математические модели любых зависимостей, включая кусочные.

Общий подход к решению задачи. Пусть исследуемая зависимость $F(y, x)$ задана множеством N точек (x_j^e, y_j^e) в пространстве R^2 , где $j = \overline{1, N}$, а верхний индекс e отмечает экспериментальный способ получения величины. Пусть это множество может быть разбито на n непересекающихся подмножеств $F_i(y, x)$. То есть $\forall i, k \in [1, n] \rightarrow F_i(y, x) \cap F_k(y, x) = \emptyset$. При этом должно выполняться условие $\bigcup_{i=1}^n F_i(y, x) = F(y, x)$.

Рассмотрим основополагающую идею решения поставленной задачи. В качестве первой её составляющей сформулирован подход, основывающийся на возможности аналитического описания с заданной точностью δ_i^{app} любого выделенного i -го участка аппроксимируемой точечной зависимости в выбранной локальной области определения $x \in [x_{i-1}, x_i]$ некоторой функцией $\varphi_i(x)$. Данная функция обладает следующими свойствами:

$$y_j^c = \varphi_i(x_j): \forall x_j \in [x_{i-1}, x_i] \rightarrow |y_j^c - y_j^e| \leq \delta_i^{app}, \quad (1)$$

где δ_i^{app} — допустимая погрешность аппроксимации на i -м участке; верхний индекс c означает вычислительный способ получения величины.

Метод и качество аппроксимации представляют собой отдельную задачу и в данном исследовании не рассматриваются. В общем случае эта задача решается для каждого участка минимизацией некоторого функционала $Q_i[F_i(y, x), \varphi_i(x)]$, формализующего оценку точности аппроксимации каждого участка [14]. Подобный подход значительно повышает точность аппроксимации каждого участка и, как следствие, общую точность аппроксимации всей моделируемой зависимости. Один из возможных и эффективных теоретических инструментов реализации такого подхода — регрессионный анализ, а наиболее распространённым и эффективным критерием минимизации ошибки моделирования $Q_i[\bullet]$ является квадратичный критерий*.

Вторая составляющая предлагаемого метода решения — предположение, что можно сконструировать некоторую функцию $f_i(x)$ так, чтобы во всем остальном диапазоне оси x , кроме описываемого участка $[x_{i-1}, x_i]$, она имела практически нулевое значение. То есть

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \rightarrow f_i(x) \approx \varphi_i(x). \quad (2, a)$$

В остальной области определения должно выполняться неравенство

$$\forall x : x_{i-1} - \Delta x_{i-1} > x \geq x_i + \Delta x_i \rightarrow f_i(x) \approx 0. \quad (2, б)$$

Например, можно задаться условием

$$\forall x \notin [x_{i-1} - \Delta x_{i-1}, x_i + \Delta x_i] \rightarrow f_i(x) < \delta_i^{sep},$$

где $\Delta x_i, \delta_i^{sep} > 0$ выбираются достаточно малыми в соответствии с точностными требованиями решаемой задачи.

Функция со свойствами 2, а, б названа в этой работе «интервально выделенной» (ИВФ). Она как бы реализует операцию *cut* — вырезания из всей точечной зависимости хорошо аппроксимируемого участка.

Располагая ИВФ для каждого обособленного по конфигурации интервала аппроксимируемой точечной зависимости, можно построить обобщённую аппроксимирующую функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x). \quad (3)$$

Она будет описывать моделируемую кусочную зависимость с точностью

$$\delta_m = \max \{ \delta_i \mid i \in [1, n] \},$$

где $\delta_i = \delta_i^{app} + \delta_i^{sep}$, δ_i — совокупная ошибка аппроксимации функцией (1) каждого i интервала, полученная при построении кусочной функции $f_i(x)$; δ_m — наибольшая ошибка, возникающая при построении кусочной функции $f(x)$.

Выражение (3) представляет операцию *glue* — как бы склеивания всей точечной зависимости из совокупности ИВФ. В результате $f(x)$ (3) будет единой аналитической функцией независимо от количества порознь аппроксимируемых интервалов и их размеров. Эта функция аппроксимирует весь описываемый точечной (в том числе кусочной) зависимостью диапазон и реализует таким образом заявленный в постановке задачи метод *cut-glue*.

Как явствует из приведённых выше положений, *cut-glue* аппроксимация реализуется в три этапа. На первом экспериментально полученная точечная зависимость разбивается на обособленные интервалы и осуществляется математическое описание каждого участка какими-либо аналитическими функциями $\varphi_i(x)$ со свойствами (1)[†], хорошо их аппроксимирующими. На вто-

* Соответствующий метод решения регрессионных задач известен как метод наименьших квадратов (МНК).

[†] Этот этап удовлетворительно решается известными методами [1, 3, 13, 14, 17], в частности, регрессионного анализа, но такая задача в данной работе не рассматривается.

ром этапе для каждого участка формируется интервально выделенная функция $f_i(x)$, обладающая свойствами (2). Это позволяет на третьем этапе получить результирующую обобщённую аппроксимирующую функцию (3) в аддитивной форме.

Мультипликативная реализация интервально выделенной функции. Суть предлагаемого метода состоит в том, что для формирования ИВФ используется специально сконструированная «мультипликативно выделяющая интервал» функция (МВФ) — $\lambda(x, S)$. Её задача — сужение фактической области определения выбранной для аппроксимации точечного подмножества i -го интервала аналитической функции $\varphi_i(x)$, которой обычно является вся числовая ось. Такое сужение достигается путём перемножения ИВФ и МВФ:

$$f_i(x) = \varphi_i(x) \cdot \lambda(x, S_i) \quad (4)$$

что и определило использование термина «мультипликативная».

Сужение необходимо произвести до подобласти, соответствующей моделируемому интервалу $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому в диапазоне значений аргумента $[x_{i-1}, x_i]$ функция $\lambda(x, S_i)$ должна принимать единичное значение. При всех других значениях аргумента МВФ (ввиду мультипликативности её применения) должна принимать значения, сколь угодно близкие к нулю*. Тогда $f_i(x)$ в (4) принципиально может отвечать свойствам (2, а, б). Для достижения этого результата в МВФ введён второй аргумент S_i функции $\lambda(x, S_i)$. Он подразумевает множество математических «настроечных» параметров $s_{qi} \in S_i$, которые обеспечивают функции, необходимые для решения задачи свойства. Имеется в виду, что варьирование s_{qi} в МВФ должно обеспечивать достижение свойств (2, а, б).

Для решения поставленной задачи в данной статье предлагается вариант МВФ, обеспечивающей указанные свойства и делающей возможной *cut-glue* аппроксимацию. Решение задачи рассматривается применительно к обработке одной функции $\varphi(x)$, аппроксимирующей точки произвольно выбранного интервала $[x_l, x_r]$ †, но не совпадающей со всей кусочной зависимостью.

Пусть искомая функция $\lambda(x, S_r)$ задана следующим выражением‡:

$$\lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = \frac{\left[x - x_l + \sqrt{(x - x_l)^2 + \varepsilon^2} \right] \cdot \left[x_r - x + \sqrt{(x_r - x)^2 + \varepsilon^2} \right]}{4 \cdot \sqrt{\left[(x - x_l)^2 + \varepsilon^2 \right] \cdot \left[(x_r - x)^2 + \varepsilon^2 \right]}}. \quad (5)$$

В функцию (5) включено минимально необходимое множество параметрических настроек МВИ-функции:

$$S_r = \{x_l, x_r, \varepsilon\}.$$

Здесь x_l, x_r — левый и правый края аппроксимируемого диапазона; ε — показатель погрешности аппроксимации. Координатные настойки x_l и x_r обеспечивают формирование области $[x_l, x_r]$, а ε — выполнение условий (2, а, б).

Исследование функции (5) как многопараметрической зависимости показывает, что она обладает шестью чрезвычайно важными для решаемой задачи свойствами.

* Степень близости определяет точность аппроксимации.

† Применительно к рассматриваемому произвольно ориентированному на x интервалу $I = i - 1$ — левый край его диапазона, $r = i$ — правый.

‡ Функция построена на основе принципов, разработанных автором для решения задач квазиоптимизации быстрогодействия законов управления [18] и обнаруживших при исследовании более широкий диапазон возможных применений [2].

1. Функция (5) симметрична относительно середины диапазона $[x_l, x_r]$.

Действительно, подстановка в (5) симметричных относительно центра диапазона $x = \frac{(x_r + x_l)}{2}$ аргументов, например $x = \frac{(x_r + x_l)}{2} + \delta$ и $x = \frac{(x_r + x_l)}{2} - \delta$, даёт одно и то же выражение

$$0,25 \cdot \left[\left(\frac{(x_r - x_l)}{2} - \delta \right)^2 + \varepsilon^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{(x_r - x_l)}{2} + \delta \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-0,5} \cdot \left\{ \left[\frac{(x_r - x_l)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(x_r - x_l)}{2} - \delta \right)^2 + \varepsilon^2} \right]^2 - \delta^2 \right\},$$

зависящее от констант функции $\lambda(\circ)$ — x_l, x_r, ε и смещения δ .

2. Функция (5) имеет единственный максимум в точке $x_m = \frac{(x_r + x_l)}{2}$, соответствующей середине диапазона $[x_l, x_r]$

$$\lambda(x_m, x_l, x_r, \varepsilon) = \max_x \lambda(x, \dots) = \lambda m = 0,25 + \frac{0,5}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot \varepsilon^2}{(x_r - x_l)^2}}} + \frac{0,25}{1 + \frac{4 \cdot \varepsilon^2}{(x_r - x_l)^2}} \quad (6)$$

и два нулевых инфимума, соответствующих пределам $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$.

Иными словами

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Действительно, вычисление частной производной по x от (5) для нахождения необходимых условий экстремума даёт выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(\circ)}{\partial x} = & \frac{\varepsilon^2 \cdot \left\{ 2 \cdot x^3 - 3 \cdot (x_l + x_r) \cdot x^2 + \sqrt{\left[(x - x_l)^2 + \varepsilon^2 \right]^3} - \sqrt{\left[(x_r - x)^2 + \varepsilon^2 \right]^3} + \dots \right.}{4 \cdot \sqrt{\left[(x - x_l)^2 + \varepsilon^2 \right]^3} \cdot \left[(x_r - x)^2 + \varepsilon^2 \right]^3} \\ & \left. \dots + \left[3 \cdot (x_l^2 + x_r^2) + 2 \cdot \varepsilon^2 \right] \cdot x - \left[x_l^3 + x_r^3 + (x_l + x_r) \cdot \varepsilon^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полином в числителе этой функции обращается в ноль в точке $x_m = \frac{(x_r + x_l)}{2}$ и асимптотически стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

В точке x_m знаменатель дроби (8) не нулевой. Его значение определяется полиномом от настроечных параметров функции (5) $\left(4 \cdot \varepsilon^2 + (x_r - x_l)^2 \right) > 0$ и при любых x_l, x_r, ε положительно. Значения знаменателя (8) при асимптотическом стремлении $x \rightarrow \pm\infty$ стремятся к $+\infty$.

3. Функция (5) в диапазоне $[x_l, x_r]$ может принимать значение, сколь угодно близкое к единице. Причем как близость к единице, так и степень охвата диапазона эффективно настраиваются параметром ε .

Действительно, из анализа выражения (5) следует вполне ожидаемый результат, показывающий что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(x_m, x_l, x_r, \varepsilon) = 1$$

при любых x_l, x_r .

Кроме того, можно показать, что

$$\forall x, x_l, x_r : x_l < x_r, x \in]x_l, x_r[\rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = 1. \quad (9)$$

Таким образом, значения функции $\lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon)$ могут быть приближены к единице с любой требуемой для задачи точностью во всех точках интервала, исключая краевые.

4. Функция (5) в диапазонах $[-\infty, x_l]$ и $[x_r, \infty]$ может принимать значение, сколь угодно близкое к нулю. Причём и близость к нулю, и близость к краевым точкам значения функции также эффективно настраиваются параметром ε .

Действительно, анализ выражения (5) показывает, что эта функция асимптотически приближается к нулю по мере удаления аргумента от выделяемого диапазона, т. е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow \infty}} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = 0$$

при любых x_l, x_r, ε .

Кроме того, можно показать, что

$$\forall x, x_l, x_r : x_l < x_r, x \notin [x_l, x_r] \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, значения функции $\lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon)$ могут быть приближены к нулю с любой требуемой для задачи точностью во всех точках вне границ интервала, исключая краевые.

5. Функция (5) в краевых точках принимает значения

$$\forall x_l, x_r : x_l < x_r \rightarrow \lambda(x_l, x_l, x_r, \varepsilon) = \lambda(x_r, x_l, x_r, \varepsilon) = 0,5 \quad (11)$$

при любых ε .

Это легко проверяется прямой подстановкой.

6. Функция (5) бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, как и любая функция с дробным показателем степени. Это свойство чрезвычайно важно для использования аппроксимационной математической модели в задачах аналитического исследования.

Графическая иллюстрация свойств функции мультипликативного выделения интервала. На рис. 2 приведён пример, иллюстрирующий вид МВИ-функции для настроечных параметров $x_l = -4$, $x_r = 4$, $\varepsilon = 0,3$. Величина ε завышена, чтобы показать аналитичность поведения функции вблизи границ выделяемого интервала.

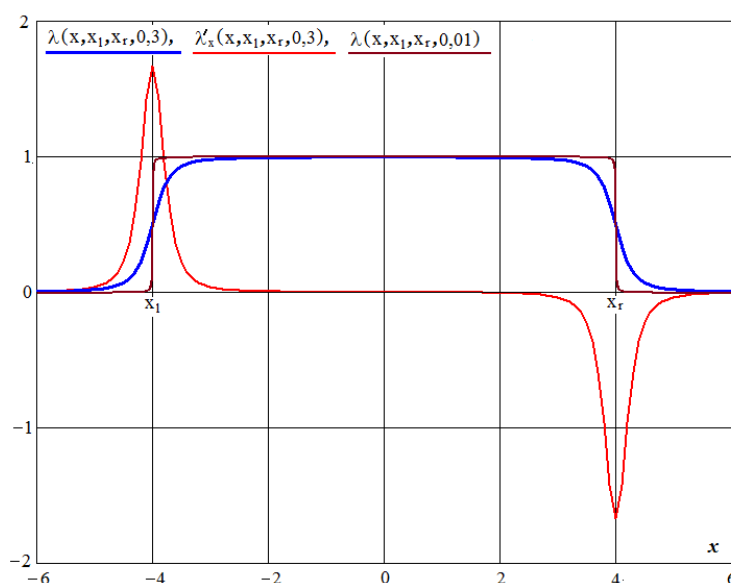


Рис. 2. Графическая иллюстрация поведения МВФ при различных ε

Здесь же показан вид этой функции, приближённый к прямоугольному импульсу при $\epsilon = 0,01$. При меньших ϵ плавные переходы на изломе графика не различимы. Таким образом, параметр ϵ является эффективным инструментом настройки точности аппроксимации.

На рис. 2 представлен также график производной МВФ. При уменьшении ϵ импульсы по краям интервала приближаются к δ -функциям.

Выявленные шесть свойств МВФ показывают возможность реализации интервально выделенной функции на основе мультипликативной модели вида (4), которая качественно отвечает требованиям к функции $f_i(x)$, сформулированным в виде условий (1–3) в общем подходе к решению задачи.

Однако наряду с качественной возможностью реализовать «вырезание» участка функции в виде $f_i(x)$ из полной зависимости $\varphi_i(x)$ необходимо обеспечить количественную сторону условий (1–3), т. е. необходимую близость этих функций внутри интервала $[x_l, x_r]$ и близость $f_i(x)$ к нулю за его границами. Аналитическое исследование и решение такой задачи является предметом достаточно серьёзных и громоздких математических преобразований. Оно выходит за рамки данной работы.

Поэтому в статье приводится частная количественная оценка влияния ϵ на точность интервального «вырезания», реализуемого функцией (5). Для иллюстрации этого эффекта на рис. 3 построены графики зависимости значения функции $\lambda(x_l - \Delta, x_l, x_r, \epsilon)$ от ϵ для ряда различных $\Delta = 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,1$.

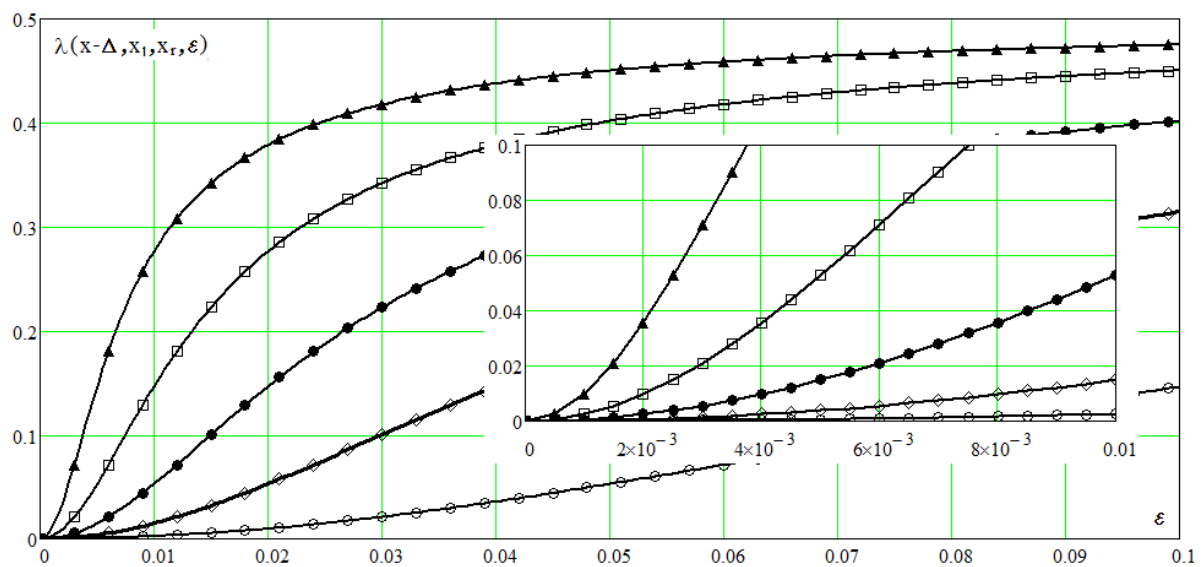


Рис. 3. Иллюстрация зависимости погрешности «вырезания» МВИ-функцией заданного интервала $[x_l, x_r]$ от ϵ при различных Δ . Сверху вниз кривым соответствуют значения Δ : 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,1

Видно, что с увеличением ϵ , откладываемого по оси абсцисс, и с уменьшением Δ , определяющего близость исследуемой точки к границе интервала (кривые, располагающиеся выше по оси ординат), точность реализации нулевого значения уменьшается. Асимптотическим пределом этой ошибки является значение МВФ на границе, т. е. 0,5.

Характеристики точности реализации нулевого значения $\lambda(x_r + \Delta, x_l, x_r, \epsilon)$ справа от правой границы x_r зеркально аналогичны приведённым на рис. 3 в силу свойства 1 симметрич-

В поле основного графика дан наиболее полезный для оценки и выбора нужной величины ϵ фрагмент начального поведения кривых. При этом параметр Δ выбирают из допустимой величины «размытия» выделяемого интервала, а ϵ — из допустимой точности реализации как единичного значения внутри интервала, так и нулевого значения за его пределами.

Табличная форма задания параметров позволяет представлять данные с любой требуемой точностью, но не всегда удобна. При использовании таких данных в компьютерных расчётах (например, для планирования траекторий движения стратосферных летательных аппаратов и управления ими) удобнее иметь зависимости атмосферных параметров от высоты и других факторов в виде аналитических функций. Это избавляет вычислитель от необходимости работы с громоздкими массивами и решения задач интерполяции.

$$\left. \begin{aligned} T_1(h) &= 288,13 - 6,4887 \cdot h; \\ T_2(h) &= 216,65; \\ T_3(h) &= 196,751 + 0,992 \cdot h; \\ T_4(h) &= 492,914 - 21,748 \cdot h + 0,6165 \cdot h^2 - 5,1413 \cdot h^3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

* Гипотетическое вертикальное распределение температуры, давления и плотности воздуха в атмосфере Земли, которое по международному соглашению представляет среднегодовое и среднелириотное состояние [19].

В результате из функций $T_i(x)$ мультипликативно по формуле (4) строятся ИВФ, а из них по формуле (3) — итоговая «склеенная» функция:

$$T^c(h) = T_1(h) \cdot \lambda(h, h_0, h_1, \varepsilon) + T_2(h) \cdot \lambda(h, h_1, h_2, \varepsilon) + T_3(h) \cdot \lambda(h, h_2, h_3, \varepsilon) + T_4(h) \cdot \lambda(h, h_3, h_4, \varepsilon). \quad (13)$$

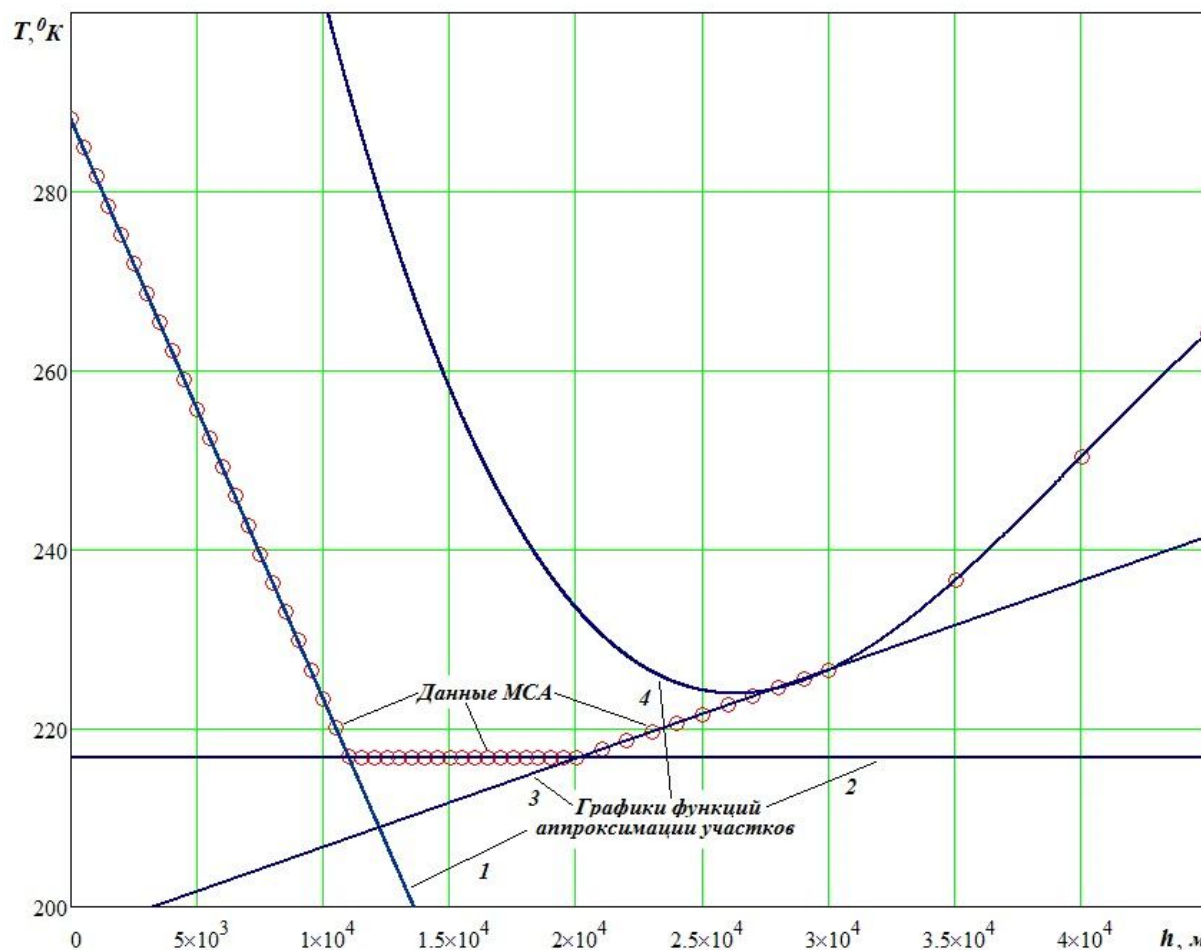
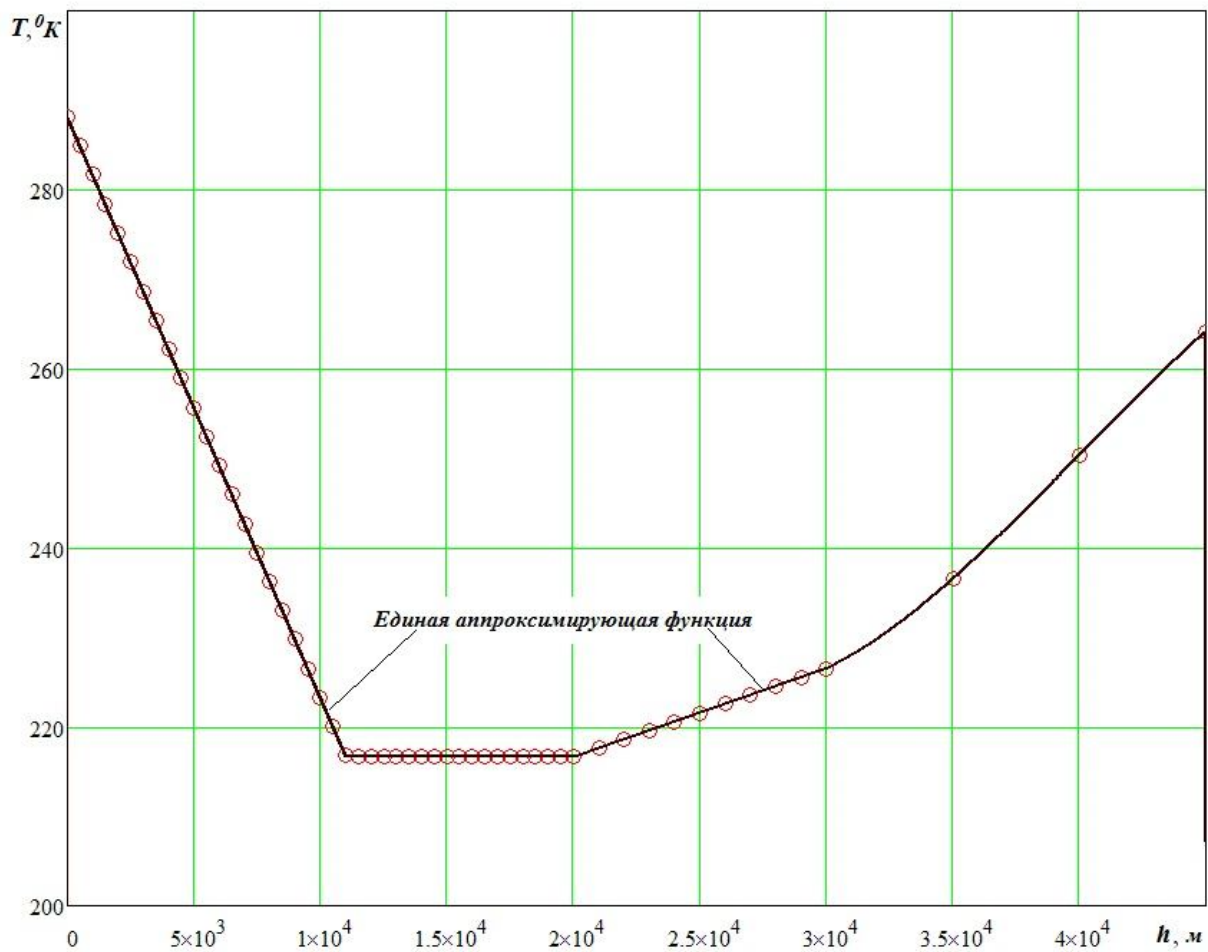


Рис. 4. Международный температурный стандарт атмосферы (МСА) и функции $\varphi_i(x)$ аппроксимации его четырёх участков

График этой непрерывно-кусочной функции построен на рис. 5 и визуально полностью совпадает с точками табличных значений температуры. Численная проверка погрешности аппроксимации всех табличных данных международного стандарта атмосферы показала, что погрешность полученного математического описания не превышает 0,03 К. Этот показатель значительно превышает точность оценки, необходимую для инженерно-технических и даже научных расчётов с использованием предоставляемого стандартом параметра. Можно построить математические модели и других стандартизированных параметров атмосферы, что сделает возможным введение в стандарт аналитических их представлений наряду с табличными. При необходимости точность описания табличных данных можно повысить, уточнив границы участков.

Рис. 5. Результат *cut-gluе* аппроксимации температурного стандарта атмосферы

Выводы. Изложен вполне регулярный метод *cut-gluе* аппроксимации, отличающийся существенной новизной решения задачи. Известные методы аппроксимации строятся лишь на приближении некоторой функции к описываемой точечной совокупности или её участку. Такой подход имеет слабые стороны. При использовании для всей совокупности единого выражения теряется точность описания. При использовании множества моделей для каждого аппроксимируемого участка возрастает громоздкость и сложность описания. Сложность кусочного описания состоит в необходимости согласования моделей по краевым условиям.

Новизна метода *cut-gluе* аппроксимации заключается в следующем. Точностные, согласующие и объединяющие функции разделяются между:

- математическими моделями описания выделенных интервалов $\varphi_i(x)$, мультипликативно выделяющими чисто интервальные модели $f_i(x)$ выражениями $\lambda(x, S_i)$;
- аддитивной формой объединения моделей $f_i(x)$ в единую функцию $f(x)$.

Это разделение, а также применение мультипликативного выделения фрагмента аппроксимирующей функции существенно упрощает решение общей задачи и открывает практически неограниченные возможности для повышения точности аппроксимации.

Метод не ограничен возможностями только одномерного применения. Совершенно очевидно, что он вполне применим и в многомерном случае, когда составляющие функции многих переменных аддитивно разделены по аргументам.

В рассмотренном примере метод продемонстрировал компактность, простоту реализации и хорошие точностные показатели и вполне может быть рекомендован для использования при аппроксимационном математическом описании экспериментальных зависимостей очевидного кусочного типа, в особенности при наличии резких сломов между участками.

Библиографический список

1. Куприенко, Н. В. Статистические методы изучения связей. Корреляционно-регрессионный анализ / Н. В. Куприенко, О. А. Пономарева, Д. В. Тихонов. — Санкт-Петербург : Изд-во политехн. ун-та, 2008. — 118 с.
2. Нейдорф, Р. А. Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления / Р. А. Нейдорф // Математические методы в технике и технологиях — 2000 : сб. трудов Междунар. науч. конф. — Санкт-Петербург, 2000. — Т. 2. — С. 18–22.
3. Bates, D.-M. Nonlinear regression analysis and its applications / D.-M. Bates, D.-G. Watts. — New York : John Wiley, 1988. — 371 p.
4. Applications of MATLAB in Science and Engineering / Edited by T. Michałowski. — Rijeka : InTech, 2011. — 371 p.
5. Чен, К. МАТЛАБ в математических исследованиях / К. Чен, П. Джиглин, А. Ирвинг. — Москва : Мир, 2001. — 346 с.
6. Maxfield, B. Essential MATHCAD for Engineering, Science and Math / B. Maxfield. — San Diego : Academic Press ; Elsevier, 2009. — 490 p.
7. Макаров, Е. Инженерные расчёты в Mathcad 15. Учебный курс / Е. Макаров. — Санкт-Петербург : Питер, 2001. — 400 с.
8. STATISTICA. Официальное руководство : в 5 т. / StatSoft. — Москва : StatSoft, 2007.
9. Боровиков, В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере / В. Боровиков. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Питер, 2003. — 688 с.
10. Нейдорф, Р. А. Исследование зависимости силы всплывания специализированного аэростата от параметров его движения / Р. А. Нейдорф, Ю. Л. Сигида // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 3–4 (72–73). — С. 96–103.
11. Stability Analysis of the MAAT Feeder Airship During Ascent and Descent with Wind Disturbances [Electronic resource] / R. Neydorf [et al.] // SAE International. — Available at: <http://papers.sae.org/2013-01-2111/> (accessed : 04.01.2014).
12. Aerodynamic Characteristics Study and Possible Improvements of MAAT Feeder Airships [Electronic resource] / V. Voloshin [et al.] // SAE International. — Available at: <http://papers.sae.org/2013-01-2112/>. — 7 p. (accessed : 04.01.2014).
13. Дорофеюк, Ю. А. Структурная идентификация сложных объектов управления на базе методов кусочной аппроксимации / Ю. А. Дорофеюк // Управление большими системами. — 2010. — № 30. — С. 79–88.
14. Лоран, П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — Москва : Мир, 1975. — 496 с.
15. Альберг, Дж. Теория сплайнов и её приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. — Москва : Мир, 1972. — 318 с.
16. Ханова, А. А. Интерполяция средствами Mathcad [Электронный ресурс] / А. А. Ханова. — Режим доступа : <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/hanova/interp/math.asp> (дата обращения : 04.01.2014).
17. Смоленский, В. В. Статистические методы обработки экспериментальных данных : учеб. пособие / В. В. Смоленский. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет), 2003. — 101 с.

18. Нейдорф, Р. А. Нелинейное ускорение динамических процессов управления объектами первого порядка с учётом ограниченности воздействий / Р. А. Нейдорф // Управление и диагностика в динамических системах. — Ростов-на-Дону : Изд. центр Дон. гос. техн. ун-та, 1999. — С. 13.

19. Международная стандартная атмосфера [Электронный ресурс] / Академик // Энциклопедия техники. — Режим доступа : http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_tech/2697/ (дата обращения : 11.12.2013).

Материал поступил в редакцию 20.09.2013.

References

1. Kupriyenko, N. V., Ponomareva, O. A., Tikhonov, D. V. Statisticheskiye metody izucheniya svyazey. Korrelyatsionno-regressionnyy analiz. [Statistical methods of connection study. Correlation regression analysis.] Sankt-Peterburg : Izdatelstvo politehnicheskogo universiteta, 2008, 118 p. (in Russian).

2. Neydorf, R. A. Effektivnaya approksimatsiya kusochnykh funktsiy v zadachakh kvazioptimal'nogo po bystrodeystviyu upravleniya. [Efficient approximation of piecewise functions in quasioptimal quick-operating control problems.] Matematicheskiye metody v tekhnike i tekhnologiyakh — 2000 : sb. trudov Mezhdunar. nauch. konf. [Mathematical methods in processes and technologies-2000 : Proc. Int. Sci. Conf.] Saint Petersburg, 2000, vol. 2, pp. 18–22 (in Russian).

3. Bates, D.-M., Watts, D.-G. Nonlinear regression analysis and its applications. New York : John Wiley, 1988, 371 p.

4. Michałowski, T., ed. Applications of MATLAB in Science and Engineering. Rijeka : InTech, 2011, 371 p.

5. Chen, K., Giblin, P., Irving, A. MATLAB v matematicheskikh issledovaniyakh. [Mathematical exploration with MATLAB.] Moscow : Mir, 2001, 346 p. (in Russian).

6. Maxfield, B. Essential MATHCAD for Engineering, Science and Math. San Diego : Academic Press ; Elsevier, 2009, 490 p.

7. Makarov, E. Inzhenernyye raschety v Mathcad 15. Uchebnyy kurs. [Engineering analysis in Mathcad 15. Study course.] Saint Petersburg : Piter, 2001, 400 p. (in Russian).

8. STATISTICA. Ofitsialnoye rukovodstvo : v 5 t. [STATISTICA. Official manual : in 5 vol.] StatSoft. Moscow : StatSoft, 2007 (in Russian).

9. Borovikov, V. STATISTICA. Iskustvo analiza dannykh na kompyutere. 2-e izd. [STATISTICA. Computer data analytics. 2nd ed.] Saint Petersburg : Piter, 2003, 688 p. (in Russian).

10. Neydorf, R. A., Sigida, Y. L. Issledovaniye zavisimosti sily vsplyvaniya spetsializirovannogo aerostata ot parametrov ego dvizheniya. [Research on buoyant force dependence of specialized aerostat on its motion variables.] Vestnik of DSTU, 2013, no. 3–4 (72–73), pp. 96–103 (in Russian).

11. Neydorf, R., et al. Stability Analysis of the MAAT Feeder Airship During Ascent and Descent with Wind Disturbances. SAE International. Available at : <http://papers.sae.org/2013-01-2111/> (accessed : 04.01.2014).

12. Voloshin, V., et al. Aerodynamic Characteristics Study and Possible Improvements of MAAT Feeder Airships. SAE International. Available at : <http://papers.sae.org/2013-01-2112/>, 7 p. (accessed : 04.01.2014).

13. Dorofeyuk, Y. A. Strukturnaya identifikatsiya slozhnykh ob'yektov upravleniya na baze metodov kusochnoy approksimatsii. [Complex control objects identification on the base of piecewise approximation methods.] Upravleniye bolshimi sistemami, 2010, no. 30, pp. 79–88 (in Russian).

14. Loran, P. J. Approksimatsiya i optimizatsiya. [Approximation and optimization.] Moscow : Mir, 1975, 496 p. (in Russian).

15. Ahlberg, J., Nilson, E., Walsh, J. Teoriya splaynov i yeye prilozheniya. [The theory of splines and their applications.] Moscow : Mir, 1972, 318 p. (in Russian).
16. Khanova, A. A. Interpolyatsiya sredstvami Mathcad. [Interpolation by means of Mathcad.] Available at : <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/hanova/interp/math.asp> (accessed : 04.01.2014) (in Russian).
17. Smolenskiy, V. V. Statisticheskiye metody obrabotki eksperimentalnykh dannykh : ucheb. Posobiye. [Statistical methods of test data processing : study guide.] Saint Petersburg : Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy gornyy institut (tekhnicheskoy universitet), 2003, 101 p. (in Russian).
18. Neydorf, R. A. Nelineynoye uskoreniye dinamicheskikh protsessov upravleniya ob'yektami pervogo poryadka s uchetom ogranichenosti vozdeystviy. [Nonlinear acceleration of dynamic control processes of the first-order objects with account for response boundedness.] Upravleniye i diagnostika v dinamicheskikh sistemakh. [Control and diagnostics in dynamic systems.] Rostov-on-Don : DSTU Publ. Centre, 1999, p. 13 (in Russian).
19. Mezhdunarodnaya standartnaya atmosfera. [International standard atmosphere.] Akademik. Entsiklopediya tekhniki. [Academician. Engineering encyclopedia.] Available at : http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_tech/2697/ (accessed : 11.12.2013) (in Russian).

APPROXIMATING MATHEMATICAL MODEL DEVELOPMENT ACCORDING TO POINT EXPERIMENTAL DATA THROUGH "CUT-GLUE" METHOD*

R. A. Neydorf

A solution to the problem on describing experimentally obtained dependences is considered. The author's method is based upon getting some local approximations of fragments of these relations, and their additive reduction to a single analytical expression. This effect is determined using special "allocating" functions limiting the domain of non-zero definition for each of the approximation functions. The method is called "cut-glue" according to the applied principles. The closest analogue of the proposed method is spline approximation. However, the "cut-glue" method is much more adaptable, as it is bonded to neither the number of spline-approximable points, nor the function order approximating the areas. The order of the polynomial approximant, or another approximating function, as well as its structure for each site, can be arbitrary. Another advantageous difference of "cut-glue" approximation consists in a single analytic notation of the whole piecewise function instead of defining a vector spline-function through a cumbersome system of equations. This effect has been achieved using an analytical function approximating and parametrically arbitrarily approaching the Heaviside step function. The analytical and numerical studies of the properties and the effects of applying the proposed method are resulted. The obtained results are illustrated with the specific technical sample applications of the method to practical problems, tabular and graphical data.

Keywords: *experimental dependence, piecewise function, approximation, multiplicativity, additivity, differentiability, analytic function, parametric approach.*

* The work is done on the thematic research plan of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation no. 2.3.13 "Balanced sampling method for simulation modeling problems of dynamic processes in distributed objects."