

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 539.3

DOI 10.12737/4547

Осесимметричный изгиб круглой многослойной пластины на упругом основании сложной структуры***С. М. Айзикович, С. С. Волков, А. В. Мелконян**

Получено в аналитическом виде приближённое решение задачи об изгибе круглой многослойной пластины постоянной толщины, лежащей на упругом основании сложной структуры. Пластина изгибается под действием осесимметричной распределённой нагрузки и реакции со стороны основания. Упругое основание представляет собой непрерывно-неоднородный по толщине слой (покрытие), лежащий на однородном полупространстве (подложке). Модуль Юнга в зоне сопряжения покрытия и подложки имеет существенный скачок. Для пластины рассмотрены два случая граничных условий: условия закреплённого и свободного края. Построенное приближённое аналитическое решение задачи эффективно в широком диапазоне как геометрических параметров (толщина неоднородного слоя и радиус пластины), так и физических параметров (гибкость пластины и упругие свойства покрытия и подложки). Методом интегральных преобразований контактная задача сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений. Полученные формулы могут быть использованы для расчёта характеристик контактного взаимодействия многослойной пластины с основанием сложной структуры в зависимости от граничных условий и характера нагрузки на пластину.

Ключевые слова: неоднородные материалы, многослойная пластина, функционально-градиентное покрытие, осесимметричная задача, аналитические методы, приближённое аналитическое решение.

Введение. Применение функционально-градиентных материалов существенно влияет на все характеристики контактного взаимодействия [1–3]. В случае, когда во взаимодействие вовлечены тонкие гибкие элементы (пластины), на перераспределение контактных давлений в зоне контакта влияет как неоднородность свойств взаимодействующих элементов, так и жёсткость пластины. Это нужно учитывать при расчёте взаимодействия гибких элементов (пластин) с неоднородными структурами, что приводит к необходимости рассмотрения контактной задачи о взаимодействии пластины и неоднородного основания.

Простейшая осесимметричная задача контактного взаимодействия как для слоистого, так и непрерывно-неоднородного покрытия упругого полупространства рассмотрена в работе [4]. Задача об изгибе пластины на упругом изотропном и однородном основании рассматривалась в работах [5, 6]. Решение строилось путём представления контактных напряжений в виде степенного ряда, с последующим определением коэффициентов разложения из бесконечной алгебраической системы уравнений.

Методом ортогональных многочленов такая задача решалась в работах [7, 8], а методом коллокации по чебышёвским узлам — в работах [9, 10]. При этом возникала необходимость построить решение некоторых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и ставилась проблема исследования сходимости полученного решения к точному. В работах [11, 12] для решения задачи применялись асимптотические методы типа «больших λ » и специальных ортогональных многочленов, что позволило получить основные характеристики решения в нескольких формах, каждая из которых эффективна в своей области изменения характерных параметров задачи.

* Результаты работы получены при выполнении проекта, поддержанного грантом РФФИ № 13-08-90916-мол_ин_нр.

Отметим, что большинство известных решений эффективны только для жёстких пластин. И очень немногие, в частности, представленные в [11, 12], эффективны или для гибких, или для жёстких пластин, каждое в своей области.

Интерес к решению задачи и её актуальность сохраняется и в настоящее время. Так, в работе [13] решение строилось с использованием разложения напряжения в двойной ряд Фурье. Аналогичный подход использовался в работе [14]. Andrea R. D. Silva с соавторами развил численные методы решения задачи [15]. В работе [16] было получено приближённое аналитическое решение осесимметричной задачи об изгибе пластины со свободным краем, лежащей на функционально-градиентном основании. Для этого использован двусторонне асимптотический метод [17].

В настоящей работе метод [17] использован для решения задачи об изгибе многослойной пластины.

Постановка задачи. Круглая многослойная пластина радиуса R и постоянной толщины h лежит на поверхности $z = 0$ упругого полупространства, состоящего из неоднородного мягкого слоя (покрытия) толщины H ($-H \leq z \leq 0$) и однородного полупространства (подложки), причём h_i — постоянная толщина каждого слоя пластины. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z ; координата r отнесена к радиусу пластины R , координата z — к толщине покрытия H , ось z нормальна поверхности и проходит через центр пластины. Под действием осесимметричной распределённой нагрузки $p^*(r)$ и реакции со стороны слоя пластина изгибается. Прогиб пластины обозначается функцией $w^*(r)$.

Коэффициенты Ламе мягкого слоя меняются с глубиной по закону:

$$\Lambda(z) = \begin{cases} \Lambda_1(z), & -1 \leq z \leq 0, \\ \Lambda_2, & -\infty < z < -1, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(z) = \begin{cases} \mathbf{M}_1(z), & -1 \leq z \leq 0, \\ \mathbf{M}_2, & -\infty < z < -1. \end{cases}$$

При расчётах для задания характера неоднородности покрытия удобно использовать модуль Юнга, а коэффициент Пуассона зафиксировать и считать постоянным. Известно [18], что

$$E = \mathbf{M} \frac{3\Lambda + 2\mathbf{M}}{\Lambda + \mathbf{M}}, \quad \nu = \frac{\Lambda}{2(\Lambda + \mathbf{M})}.$$

В качестве параметра, характеризующего отличие упругих свойств слоя от подложки, введём величину

$$\beta = \frac{E_2}{E_1(-1)}, \quad (1)$$

где $E_1(z)$ и E_2 — модули Юнга покрытия и подложки соответственно.

Уравнение изгиба многослойной пластины имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 w_1(r) = p^*(r) - q_2(r), \\ \dots \\ \mathbf{L}_i w_i(r) = q_{i+1}(r) - q_{i-1}(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \dots \\ \mathbf{L}_K w_K(r) = q_{K+1}(r) - q^*(r), \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{L}_i = D_i \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2$ — дифференциальный оператор изгиба i -й пластины; $q^*(r)$ — контактные напряжения под пластиной; $w_i(r)$ — прогиб каждого слоя; D_i — цилиндрическая жёсткость i -й пластины.

Для напряжений, возникающих между слоями пластины, выполнено следующие условие сопряжения:

$$q_{i-1}(r) = q_i(r), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (3)$$

Если все слои жёстко сцеплены друг с другом, то $w_1(r) = w_2(r) = \dots = w_K(r) = w^*(r)$. Учитывая это обстоятельство, а также равенство (3), система уравнений (2) может быть представлена в виде:

$$D\mathbf{L}_0 w^*(r) = p^*(r) - q^*(r), \text{ где } D = \sum_{i=1}^K D_i, \mathbf{L}_0 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4)$$

Таким образом, вместо многослойной пластины можно рассматривать однослойную пластину с цилиндрической жёсткостью, равной сумме цилиндрических жёсткостей каждого слоя в многослойной пластине.

Если пластина неоднородна по толщине, её модуль Юнга $E_{\text{пл}}(z)$ при этом изменяется по толщине пластины, а коэффициент Пуассона $\nu_{\text{пл}}$ постоянный, то, согласно [19]:

$$D = \frac{1}{1 - \nu_{\text{пл}}^2} \int_0^h z^2 E_{\text{пл}}(z) dz. \quad (5)$$

Введём следующую замену переменных: $\lambda = H/R$, $w^*(r) = w(r')R$, $p^*(r) = p(r')DR^{-3}$, $q^*(r) = q(r')DR^{-3}$. Знак штриха далее опускаем.

Рассматривается два случая граничных условий: первый, когда края пластины закреплены, в этом случае функция прогиба пластины $w(r)$ удовлетворяет условиям:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \right|_{r=1} = 0, \quad (6)$$

и второй случай, когда имеют место условия свободного края:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu_{\text{пл}}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \bigg|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \right|_{r=1} = 0, \quad (7)$$

где $\nu_{\text{пл}}$ — коэффициент Пуассона пластины; Δ — оператор Лапласа.

Методом интегральных преобразований контактная задача сводится к решению системы уравнений:

$$\mathbf{L}_0 w(r) = p(r) - q(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty Q(a) L(a\lambda) J_0(ar) da = s w(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty Q(a) J_0(ar) da = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (9)$$

где $L(u)$ — трансформанта ядра; $s = \Theta R^3 D^{-1}$ — параметр, характеризующий изгибную жёсткость пластины.

Построение решения. Для однородной пластинки со свободными краем, лежащей на неоднородном полупространстве, в работе [16] построено решение задачи в аналитическом виде. Учитывая (4), (5), это решение можно использовать и для неоднородных пластин.

Построим решение задачи в аналитическом виде, в случае, когда края пластины закреплены. Для этого представим функцию прогибов в виде ряда по формам собственных колебаний круглой пластины с закреплённым краем, аналогично работе [20]:

$$w(r) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \Phi_m(r), \quad w_m = \int_0^1 w(\rho) \Phi_m(\rho) \rho d\rho, \quad (10)$$

где $\Phi_m(r) = A_m J_0(k_m r)$; k_m — корни уравнения $J_1(k_m) = 0$, а $A_m = \sqrt{2} / J_0(k_m)$ для $m \in \mathbb{N}$.

Учитывая линейность задачи, разложим функцию контактных напряжений $q(r)$ в ряд следующего вида:

$$q(r) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m q_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (11)$$

Здесь функции $q_m(r)$ находятся из решения парного интегрального уравнения (9) с заданной правой частью вида (10).

Для построения решения рассмотрим следующее парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} Q(\alpha) L(\alpha \lambda) J_0(\alpha r) d\alpha = \Theta \delta \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k J_0(\mu_k r) \right), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^{\infty} Q(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0, & r > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Из результатов работы [21] следует, что при построении решения задачи двухсторонне асимптотическим методом в качестве аппроксимации главной части трансформанты ядра можно использовать аналитическое выражение вида

$$L_N(u) \approx \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + a_i^2}{u^2 + b_i^2}, \quad (13)$$

где b_k, μ_k, δ — некоторые константы.

В работе [22] получено аналитическое решение парного интегрального уравнения (12) в виде:

$$\tau(r) = \frac{2\Theta_0(0)\delta}{\pi} \left\{ L^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \Psi(r, a_i \lambda^{-1}) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j \Psi(r, i\mu_j) L_N^{-1}(\lambda\mu_j) \right\}. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение:

$$\Psi(r, A) = \frac{\operatorname{ch} A}{\sqrt{1-r^2}} - A \int_r^1 \frac{\operatorname{sh} A t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Сумма в (14), содержащая функцию $\Psi(r, i\mu)$, соответствует решению уравнения (12) с правой частью в виде ряда по функциям Бесселя. Функцию $\Phi_m(r)$ можно представить в следующем виде:

$$\Phi_m(r) = u_1^m J_0(\mu_1^m r),$$

где $u_1^m = A_m$; $\mu_1^m = k_m$.

Таким образом, решение парного интегрального уравнения (9) с правой частью (10) имеет вид:

$$q_0^N(r) = 2\sqrt{2}\pi^{-1}s \left[L_N^{-1}(0)(1-r^2)^{-1/2} + \sum_{i=0}^N C_i^0 \Psi(r, a_i \lambda^{-1}) \right],$$

$$q_m^N(r) = 2\pi^{-1}A_m s \left[L_N^{-1}(\lambda k_m) \Psi(r, i k_m) + \sum_{i=0}^N C_i^m \Psi(r, a_i \lambda^{-1}) \right], \quad m=1, 2, \dots$$

Здесь постоянные C_i^m определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i^0 \alpha(a_i \lambda^{-1}, b_k \lambda^{-1}) + L_N^{-1}(0) \lambda b_k^{-1} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N C_i^m \alpha(a_i \lambda^{-1}, b_k \lambda^{-1}) + \beta(k_m, b_k \lambda^{-1}) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N; \quad m=1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha(a, b) = [a \operatorname{sha} + b \operatorname{cha}] (b^2 - a^2)^{-1}, \quad \beta(a, b) = L_N^{-1}(\lambda a) \alpha(ia, b).$$

Полученные значения контактных напряжений $q_m^N(r)$ и заданную внешнюю нагрузку, приложенную к пластине, можно представить в виде следующих рядов:

$$q_m^N(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^m \Phi_j(r), \quad \gamma_j^m = \int_0^1 q_m^N(\rho) \Phi_j(\rho) \rho d\rho, \quad (15)$$

$$p(r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \Phi_m(r), \quad p_m = \int_0^1 p(\rho) \Phi_m(\rho) \rho d\rho. \quad (16)$$

Подставив разложения (10), (15), (16) в (8), придём к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов w_m , которую можно записать в следующем виде:

$$w_m - a k_m^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} w_j E_j^m = p_m k_m^{-4}, \quad m=0, 1, 2, \dots; \quad a=-1, \quad (17)$$

$$E_j^m = 2\pi^{-1} A_j s A_m \left[L_N^{-1}(\lambda k_j) x(k_j, k_m) + \sum_{n=0}^N C_n^m X(a_n \lambda^{-1}, k_m) \right],$$

где $j=1, 2, \dots; \quad m=0, 1, 2, \dots;$

$$x(a, b) = b^{-1} \left(\cos a \sin b + \frac{a}{2} \left(\sin(a-b)(a-b)^{-1} - \sin(a+b)(a+b)^{-1} \right) \right);$$

$$X(a, b) = (a^2 + b^2)^{-1} (a \operatorname{sha} \cos b + b \sin s \operatorname{cha}).$$

В частности,

$$E_0^m = 2\pi^{-1} \sqrt{2} s A_m \left[L_N^{-1}(0) k_m^{-1} \sin k_m + \sum_{n=1}^N C_n^0 X(a_n \lambda^{-1}, k_m) \right],$$

$$E_0^0 = \pi^{-1} 4s \left[L_N^{-1}(0) + \lambda \sum_{n=1}^N C_n^0 a_n^{-1} \operatorname{sh}(a_n \lambda^{-1}) \right],$$

$$E_j^0 = 2\pi^{-1} \sqrt{2} A_j s \left[L_N^{-1}(\lambda k_j) k_j^{-1} \sin k_j + \lambda \sum_{n=1}^N C_n^j a_n^{-1} \operatorname{sh}(a_n \lambda^{-1}) \right].$$

Используя метод редукции, свведём решение бесконечной системы алгебраических уравнений (17) к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$w_m k_m^4 + \sum_{j=0}^M w_j E_j^m = p_m, \quad m=0, 1, 2, \dots, M. \quad (18)$$

После определения коэффициентов w_m ($m = 0, 1, \dots, M$) для фиксированного значения M из (18) находим контактные напряжения

$$q(r) = \sum_{m=0}^M w_m q_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (19)$$

и прогибы пластины

$$w(r) = \sum_{m=0}^M w_m \Phi_m(r), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (20)$$

Полученные формулы могут быть использованы для расчёта характеристик контактного взаимодействия многослойной пластины с основанием сложной структуры в зависимости от граничных условий и характера нагрузки на пластину. Так как неоднородность пластины и многослойность в рамках рассмотренной модели влияет только на величину цилиндрической жёсткости D , будем считать, что увеличение количества слоёв в пластине влияет на значение параметра D и, соответственно, на значение параметра s .

Рассмотрим случай влияния на распределение контактных напряжений под пластиной равномерно распределённой нагрузки. В случае, когда края пластинки не закреплены по периметру, при вычислении контактных напряжений использовался результат работы [16]. Для закреплённых краёв использовалась формула (19).

Пусть пластина лежит на мягком покрытии ($\beta = 100$), модуль Юнга которого меняется по закону:

$$E_1(z) = E_0 \cdot \Phi(z), \quad \Phi(z) = \Phi_0 + (\Phi_0 - 1) \cdot z.$$

Показатель неоднородности $\Phi_0 = \text{const} > 1$ характеризует отношение модуля Юнга на поверхности покрытия ($z = 0$) к модулю Юнга подложки. Ограничимся рассмотрением случая $\Phi_0 = 3,5$, что соответствует сочетанию мягкого (алюминий, серебро, медь, свинец и т. д.) и жёсткого (железо, сталь, палладий, молибден и т. д.) металлов.

При численной реализации было выявлено, что граничные условия для жёстких пластин практически не оказывают влияние на распределение контактных напряжений. Причём диапазоны параметров, для которых это справедливо, следующие: для $\lambda = 4$ — $s < 0,1$, для $\lambda = 0,05$ — $s < 0,07$.

На рис. 1, 2 построены графики контактных напряжений в случае гибких пластин для указанного выше закона изменения модуля Юнга с глубиной. Из графиков видно, что условия закрепления краёв пластины оказывают влияние на распределение контактных напряжений под пластиной.

Заключение. Получено приближённое аналитическое решение задачи об изгибе круглой многослойной пластины постоянной толщины, лежащей на упругом неоднородном основании сложной структуры.

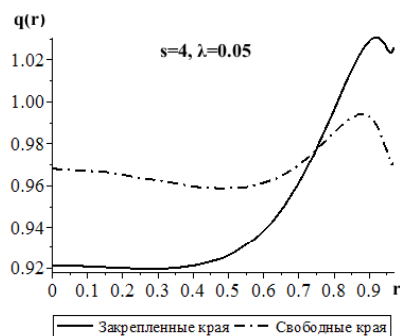


Рис. 1. Распределение контактных напряжений под гибкой ($s = 4$) пластиной при большой зоне контакта относительно толщины покрытия

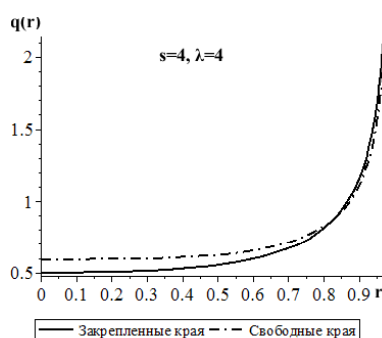


Рис. 2. Распределение контактных напряжений под гибкой пластиной при малой зоне контакта относительно толщины покрытия

Построенная математическая модель эффективна в широком диапазоне значений как геометрического (λ), так и физических (s, β) параметров задачи и может быть использована для расчётов неоднородных пластин Кирхгофа при различных граничных условиях на краю пластинки.

Библиографический список

1. Hager, A. M. Short-Fibre Reinforced, High-Temperature Resistant Polymers for a Wide Field of Tribological Applications / A. M. Hager, M. Davies // *Advances in Composite Tribology* / K. Friedrich, ed. — Amsterdam : Elsevier, 1993. — Pp. 107–157.
2. Friedrich, K. Wear of polymer composites / K. Friedrich, R. Reinicke, Z. Zhang // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. — 2002. — Vol. 216, iss. 6. — Pp. 415–426.
3. Моделирование фрикционного взаимодействия композиционных покрытий триботехнического назначения / И. Г. Горячева [и др.] // *Трение и износ*. — 2012. — Т. 33, № 6. — С. 557–565.
4. Васильев, А. С. Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры / А. С. Васильев, Е. В. Садырин, М. Е. Васильева // *Вестник Дон. гос. техн. ун-та*. — 2013. — № 5/6 (74). — С. 6–13.
5. Горбунов-Посадов, М. И. Расчёт балок и плит на упругом полупространстве // *Прикладная математика и механика*. — 1940. — Т. 4, вып. 3. — С. 61–80.
6. Ишкова, А. Г. Об изгибе полосы и круглой пластины, лежащих на упругом полупространстве // *Инженерный сборник*. — 1960. — Т. 23. — С. 171–181.
7. Гребенщиков, В. Н. Расчёт круглой пластинки на упругом полупространстве // *Теория расчёта и надёжность приборов : сб. тр. II Саратовской обл. конф. молодых учёных*. — 1969. — С. 48–51.
8. Александров, В. М. Универсальная программа расчёта изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании / В. М. Александров, Л. С. Шацких // *Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин*. — Москва, 1970. — С. 46–51.
9. Шацких, Л. С. К расчёту изгиба плиты на упругом слое // *Известия Академии наук СССР. Механика твёрдого тела*. — 1972. — № 2. — С. 170–176.
10. Александров, В. М. Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве / В. М. Александров, И. И. Ворович, М. Д. Солодовник // *Известия Академии наук СССР. Механика твёрдого тела*. — 1973. — № 4. — С. 129–138.
11. Александров, В. М. Асимптотическое решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве / В. М. Александров, М. Д. Солодовник // *Прикладная механика*. — 1974. — Т. 10, вып. 7. — С. 77–83.

12. Босаков, С. В. К решению контактной задачи для круглой пластинки / С. В. Босаков // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72, № 1. — С. 59–61.
13. Kashtalyan, M. Effect of a functionally graded interlayer on three-dimensional elastic deformation of coated plates subjected to transverse loading / M. Kashtalyan, M. Menshykova // Composite Structures. — 2009. — Vol. 89, № 2. — Pp. 167–176.
14. Kashtalyan, M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates / M. Kashtalyan // European Journal of Mechanics A/Solids. — 2004. — Vol. 23, № 5. — Pp. 853–864.
15. Silva, A. R. D. Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations / A. R. D. Silva, R. A. M. Silveira, P. B. Gonçalves // International Journal of Solids and Structures. — 2001. — Vol. 38, № 10–13. — Pp. 2083–2100.
16. Митрин, Б. И. Распределение контактных напряжений под круглой пластиной, лежащей на мягком слое / Б. И. Митрин, С. С. Волков // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 5/6 (74). — С. 14–25.
17. Айзикович, С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54, вып. 5. — С. 872–877.
18. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — Москва : Наука, 1970. — 824 с.
19. Белубекян, М. В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки / М. В. Белубекян // Известия национальной академии наук Армении. Механика. — 2002. — Т. 55, № 3. — С. 34–41.
20. Цейтлин, А. И. Об изгибе круглой плиты, лежащей на линейно деформируемом основании / А. И. Цейтлин // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1969. — № 1. — С. 99–112.
21. Айзикович, С. М. Осесимметрическая задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство / С. М. Айзикович, В. М. Александров // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1984. — Т. 19, № 2. — С. 73–82.
22. Айзикович, С. М. Асимптотическое решение задачи о взаимодействии пластины с неоднородным по глубине основанием / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59, вып. 4. — С. 688–697.

Материал поступил в редакцию 12.03.2014.

References

1. Hager, A. M., Davies, M. Short-Fibre Reinforced, High-Temperature Resistant Polymers for a Wide Field of Tribological Applications. In K. Friedrich, ed.: *Advances in Composite Tribology*, Amsterdam, 1993, pp. 107–157.
2. Friedrich, K., Reinicke, R., Zhang, Z. Wear of polymer composites. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2002, vol. 216, iss. 6, pp. 415–426.
3. Goryacheva, I. G., Myshkin, N. K., Torskaya, E. V., Kornev, Y. V., Gutsev, D. M., Kudritskiy, V. G., Kovaleva, I. N. Modeling friction of tribological composite coatings. *Journal of Friction and Wear*, 2012, vol. 33, no. 6, pp. 407–414.
4. Vasilyev, A. S., Sadyrin, E. V., Vasilyeva, M. E. Kruchenije uprugogo poluprostranstva s mnogosloynym pokrytiyem periodicheskoy struktury. [Torsion of elastic half-space with multilayered coating of periodic structure.] *Vestnik of Don State Technical University*, 2013, no. 5/6 (74), pp. 6–13 (in Russian).
5. Gorbunov-Posadov, M. I. Raschet balok i plit na uprugom poluprostranstve. [Calculation of beams and plates on an elastic half-space.] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, iss. 3, pp. 61–80 (in Russian).

6. Ishkova, A. G. Ob izgibe polosy i krugloy plastiny, lezhashchikh na uprugom poluprostranstve. [A strip and a circular plate bending on an elastic half-space.] *Inzhenernyy sbornik*, 1960, vol. 23, pp. 171–181 (in Russian).
7. Grebenshikov, V. N. Raschet krugloy plastinki na uprugom poluprostranstve [Calculation of circular plate on elastic half-space.] *Teoriya rascheta i nadejnost' priborov : sb. tr. II Saratovskoy obl. konf. mol. uchenyh.* [Theory of calculation and reliability of devices : Proc. II Young Scientists Conf.] Saratov, 1969, pp. 48–51 (in Russian).
8. Aleksandrov, V. M., Shatskikh, L. S. Universalnaya programma rascheta izgiba balochnykh plit na lineino-deformiruemom osnovanii. [Universal program for calculation of plate bending on linear deformable foundation.] *Trudy 7 Vsesoyuznoi konferencii po teorii obolochek i plastinok.* [Proc. VII All-Soviet Conference on Theory of Plates and Shells.] Moscow, 1970, pp. 46–51 (in Russian).
9. Shatskikh, L. S. K raschetu izgiba plity na uprugom sloe. [About a plate bending on an elastic layer.] *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela* [Mechanics of Solids], 1972, vol. 2, pp. 170–176 (in Russian).
10. Aleksandrov, V. M., Vorovich, I. I., Solodovnik, M. D. Effektivnoe reshenie zadachi o cilindricheskom izgibe plastinki konechnoy shiriny na uprugom poluprostranstve. [Effective solution of problems on cylindrical bending of plates of finite width on an elastic half-space.] *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela* [Mechanics of Solids], 1973, vol. 4, pp. 129–138 (in Russian).
11. Aleksandrov, V. M., Solodovnik, M. D. Asymptotic problem of the cylindrical bending of a plate of finite breadth in an elastic half-space. *Soviet Applied Mechanics*, 1974, vol. 10, iss. 7, pp. 749–754.
12. Bosakov, S. V. The solution of the contact problem for a circular plate. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 1, pp. 59–61 (in Russian).
13. Kashtalyan, M., Menshykova, M. Effect of a functionally graded interlayer on three-dimensional elastic deformation of coated plates subjected to transverse loading. *Composite Structures*, 2009, vol. 89, iss. 2, pp. 167–176.
14. Kashtalyan, M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2004, vol. 23, iss. 5, pp. 853–864.
15. Silva, A. R. D., Silveira, R. A. M., Goncalves, P. B. Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, iss. 10–13, pp. 2083–2100.
16. Mitrin, B. I., Volkov, S. S. Raspredeleniye kontaktnykh napryazheniy pod krugloy plastinoy, lezhashchey na myagkom sloe. [Contact stress distribution under circular plate on a soft layer.] *Vestnik of Don State Technical University*, 2013, no. 5/6 (74), pp. 14–24 (in Russian).
17. Aizikovich, S. M. An asymptotic solution of a class of coupled equations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, iss. 5, pp. 719–724.
18. Lourie, A. I. *Teoriya uprugosti.* [Theory of Elasticity.] Moscow, 1970, 824 p. (in Russian).
19. Belubekyan, M. V. K voprosu kolebaniy neodnorodnoy po tolshchine plastinki. [On the problem of vibration of the plate with nonuniform thickness.] *Izvestiya natsionalnoy akademii nauk Armenii. Mekhanika.* [Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia], 2002, vol. 55, no. 3, pp. 34–41 (in Russian).
20. Tseitlin, A. I. Ob izgibe krugloy plity, lejaschey na lineyno-deformiruemom osnovanii. [Bending of a circular plate lying on a linearly deformable foundation.] *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 1969, vol. 1, pp. 99–112 (in Russian).
21. Aizkovich, S. M., Aleksandrov, V. M. Axially symmetric problem of the indentation of a circular die into an elastic nonuniform in depth half-space. *Mechanics of Solids*, 1984, vol. 19, iss. 2, pp. 73–82 (in Russian).

22. Aizikovich, S. M. Asymptotic solution of the problem of the interaction of a plate with an inhomogeneous in depth foundation. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1995, vol. 59, iss. 4, pp. 661–669 (in Russian).

AXISYMMETRIC BENDING OF CIRCULAR SANDWICH PLATE ON ELASTIC FOUNDATION WITH COMPLICATED STRUCTURE*

S. M. Aizikovich, S. S. Volkov, A. V. Melkonyan

The approximate closed-form solution to the problem on a circular multilayer (sandwich) constant-thickness plate bending on an elastic foundation with a complicated structure is obtained. The plate is bent under the axisymmetric distributed load, and the foundation reaction. The elastic foundation is a uniformly irregular in thickness layer (coating) based on a homogeneous half-space (substrate). Young's modulus value at the interface of the coating and the substrate has a significant leap. Two different cases of the boundary conditions are considered for the plate: fixed and free edge conditions. The constructed approximate analytical solution to the problem is effective for a wide range of both geometric (the inhomogeneous layer thickness and the plate radius) and physical parameters (plate flexibility, and elastic properties of the coating and the substrate). The contact problem is reduced to the system of the integro-differential equation solution through the integral transformation method. The obtained formulas can be used for calculating the contact interaction characteristics between a multilayer plate and a foundation with a complex structure in various cases of the boundary conditions, and various loads applied to the plate.

Keywords: inhomogeneous materials, sandwich plate, functionally-graded coating, axisymmetric problem, analytical methods, approximate analytical solution.

* The research is supported by RFFI grant no. 13-08-90916-mol_in_nr.