

Численное решение краевых задач для уравнения Пуассона методом точечных источников поля*

С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. А. Енгибарян

Целью работы является повышение эффективности одного из перспективных методов решения краевых задач для уравнений эллиптического типа — метода точечных источников поля. В зарубежной литературе он называется методом фундаментальных решений. В настоящее время он используется в первую очередь для решения уравнения Лапласа. Предложено несколько вариантов численного решения краевых задач для уравнения Пуассона с использованием метода точечных источников поля. Применение этого метода к решению неоднородных уравнений, таких как уравнение Пуассона, приводит в большинстве случаев к резкому возрастанию численной погрешности, что связано с ошибками при нахождении частного решения уравнения Пуассона. Правая часть уравнения Пуассона аппроксимируется двумерным тригонометрическим многочленом (при решении двумерных краевых задач), после чего становится возможным получение частного решения, необходимого для решения исходной краевой задачи методом точечных источников поля. Результаты тестирования предложенного способа численного решения краевых задач для уравнения Пуассона свидетельствуют о его эффективности, так как позволяют получать решение с относительной погрешностью 10^{-6} при минимальных затратах машинного времени. Разработанная методика численного решения краевых задач для уравнения Пуассона может быть использована при моделировании физических полей в технических устройствах различного назначения.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, уравнения эллиптического типа, метод точечных источников поля, метод фундаментальных решений.

Введение. Ряд задач, имеющих важное практическое значение, сводят к решению уравнения Лапласа с условиями, задаваемыми на границе с достаточно сложной конфигурацией. Одним из эффективных методов численного решения краевых задач для однородных уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами, в первую очередь для уравнения Лапласа, является метод точечных источников поля (МТИ) [1–4]. Преимуществом МТИ является его простота и несколько меньший объём вычислений в сравнении с традиционными численными методами решения граничных задач, такими, например, как метод конечных элементов (МКЭ). Применение МТИ может быть оправдано также при решении краевых задач для неоднородных уравнений эллиптического типа, например, при решении уравнения Пуассона [5–9].

Основная часть. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, в которой решается уравнение Пуассона:

$$\Delta U = f(\mathbf{r}), \quad (1)$$

с условиями на границе $\partial\Omega$, соответствующими задаче Дирихле:

$$U = g. \quad (2)$$

Пусть для уравнения (1) известно частное решение $U_0(\mathbf{r})$ (не обязательно с однородными условиями на границе):

$$\Delta U_0(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Введём функцию $u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - U_0(\mathbf{r})$. Эта функция удовлетворяет однородному уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = (g - U_0)|_{\partial\Omega}. \quad (3)$$

* Работа выполнена по грантам РФФИ № 13-07-00952-а и № 14-07-00705-а.

Для нахождения неизвестной функции $u(\mathbf{r})$ можно теперь использовать МТИ, как это описано в [3–4]. В результате искомое решение краевой задачи найдём в виде суммы $U(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r})$. Таким образом, для успешного решения краевой задачи для уравнения Пуассона необходимо сначала найти его частное решение. При этом могут использоваться различные подходы.

Как известно, правая часть $f(\mathbf{r})$ в уравнении Пуассона $\Delta U = f(\mathbf{r})$ пропорциональна плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ в точке с координатой \mathbf{r} : $f(\mathbf{r}) = K\rho(\mathbf{r})$. Коэффициент пропорциональности зависит от используемой системы единиц и, следовательно, от конкретного представления фундаментального решения для однородного уравнения (в данном случае уравнения Лапласа). Если фундаментальное решение, то есть потенциал поля, созданного в точке с координатой \mathbf{r} единичным положительным зарядом, находящимся в точке с координатой \mathbf{R} , имеет вид $\ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$, то $f(\mathbf{r}) = 2\pi\rho(\mathbf{r})$. Для численного решения уравнения Пуассона область решения Ω разбивается на небольшие элементарные участки $\delta\omega_i$, каждый из которых имеет площадь δs_i . На этой площади находится заряд, приблизительно равный

$$\delta q_i \approx \frac{f(\mathbf{r}_i)}{2\pi} \delta s_i,$$

где \mathbf{r}_i — координата центральной точки элементарного участка $\delta\omega_i$.

В результате частное решение уравнения Пуассона можно приближённо представить в виде суммы:

$$U_0(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_p} f(\mathbf{r}_i) \delta s_i \ln \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right),$$

где N_p — число элементарных участков, на которые разбита область решения Ω .

Таким образом, решаемая задача приводится к задаче численного решения уравнения Лапласа с помощью МТИ.

Рассмотрим конкретный, тестовый пример решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Пусть правая часть в уравнении Пуассона

$$f(\mathbf{r}) = 2(x^2 + y^2)\cos(xy) - (x^3y - xy^3)\sin(xy). \quad (4)$$

Область решения представляет собой квадрат, сторона которого равна единице:

$$\Omega = \{-0,5 \leq x \leq 0,5, -0,5 \leq y \leq 0,5\}. \quad (5)$$

Решается задача Дирихле с граничными условиями, соответствующими точному решению задачи

$$U(\mathbf{r}) = xy \sin(xy). \quad (6)$$

Условия (4) — (6) соответствуют условиям задачи, решаемой в [10] путём разложения по собственным функциям уравнения Гельмгольца. При численном решении уравнения Пуассона с условиями (4) — (6) с помощью МТИ заряды, моделирующие искомое поле для уравнения Лапласа располагались на окружности радиусом, равном 1,25. Заряды δq_i внутри области Ω располагались в узлах равномерной прямоугольной сетки, покрывающей область Ω . В узлах этой сетки на границе области Ω располагались узлы коллокации, число которых соответствовало числу зарядов для уравнения Лапласа.

На рис. представлен график зависимости погрешности численного решения тестовой задачи от полного числа зарядов, моделирующих искомое поле (тонкая сплошная линия 1).

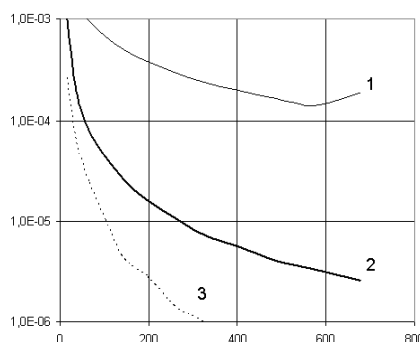


Рис. Зависимость погрешности численного решения от количества зарядов и узлов в прямоугольной (линии 1; 2) и круговой (линия 3) области, полученные различными способами: моделированием частного решения зарядами внутри области Ω (линия 1) и использованием разложения правой части уравнения Пуассона в двумерный тригонометрический ряд (линии 2; 3)

Анализ данных, представленных на рис., показывает, что величина погрешности МТИ обратно пропорциональна числу зарядов (точнее, $\varepsilon \sim N^{-1,2}$). Это свидетельствует о достаточно медленном убывании погрешности МТИ с ростом числа зарядов. В то же время очевидно, что уже при небольшом числе зарядов, равном 25, погрешность $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Следовательно, в тех случаях, когда требования к точности решения не являются слишком строгими, применение МТИ для получения приближённого решения уравнения Пуассона описанным выше способом является вполне допустимым и разумным.

Повысить точность численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона можно, аппроксимируя правую часть уравнения (1) тригонометрическим многочленом.

Известно [11], что функцию $\varphi(x)$, определённую в узлах $x_0 \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ на отрезке l можно аппроксимировать тригонометрическим многочленом, имеющим вид

$$\varphi(x) \approx \sum_{i=1}^n \varphi_i P_i(x),$$

$$\text{где } \varphi_i = \varphi(x_i), P_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{\sin\left(\pi \frac{x - x_k}{l}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x_i - x_k}{l}\right)}.$$

При использовании равноотстоящих узлов функции $P_i(x)$ могут быть преобразованы в тригонометрические многочлены [12]. В результате получаем

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((-1)^i \varphi_i \sum_{k=1}^n \sin(b_k x + c_{ik}) \right),$$

где

$$b_k = \frac{2\pi}{l} \left(k - \frac{n}{2} \right), 1 \leq k \leq n; c_{ik} = \pi \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{2(i-1)}{n} - \frac{2x_0}{l} \right) \left(k - \frac{1}{2} \right) \right), 1 \leq k \leq n. \quad (7)$$

Аналогичным образом функцию двух переменных $f(x, y)$ (правая часть уравнения (1)), заданную в прямоугольнике со сторонами l_x, l_y и определённую в узлах прямоугольной равномерной сетки (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq n_x$, $1 \leq j \leq n_y$, можно представить в виде тригонометрического многочлена

$$f(x, y) \approx \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \left((-1)^{i+j} f_{ij} \sum_{kx=1}^{n_x} \sum_{ky=1}^{n_y} \sin(b_{kx}^x x + c_{ikx}^x) \sin(b_{ky}^y y + c_{jky}^y) \right),$$

где $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, а параметры $b_{kx}^x, b_{ky}^y, c_{kx}^x, c_{ky}^y$ и другие определяются по формулам, аналогичным (7).

Так как частным решением уравнения Пуассона при

$$f(x, y) = \sin(b^x x + c^x) \sin(b^y y + c^y)$$

является функция $u_0(\mathbf{r}) = -\frac{\sin(b^x x + c^x) \sin(b^y y + c^y)}{(b^x)^2 + (b^y)^2}$, то, учитывая линейность уравнения, част-

ное решение уравнения (1) запишется в виде:

$$U_0(x, y) = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \left((-1)^{i+j} f_{ij} \sum_{kx=1}^{n_x} \sum_{ky=1}^{n_y} \frac{\sin(b_{kx}^x x + c_{ikx}^x) \sin(b_{ky}^y y + c_{jky}^y)}{(b_{kx}^x)^2 + (b_{ky}^y)^2} \right). \quad (8)$$

На рис. представлен график зависимости погрешности численного решения тестовой задачи от полного числа зарядов, моделирующих искомое поле (жирная сплошная линия 2), полученный с использованием частного решения (8). Видно, что погрешность решения в этом случае почти на два порядка ниже, чем в том случае, когда поле, соответствующее частному решению, моделируется зарядами, расположенными внутри области Ω .

При решении краевой задачи для области Ω , форма которой отличается от прямоугольной, строится прямоугольник минимальных размеров (для минимизации численной погрешности), охватывающий область Ω ; функция $f(x, y)$ экстраполируется за пределы области Ω вплоть до границ построенного прямоугольника. Далее находится численное решение краевой задачи описанным выше способом. При этом может оказаться, особенно при решении задач Дирихле, что погрешность численного решения для области Ω окажется ниже, чем для прямоугольной области. Это объясняется тем, что в области Ω отсутствуют участки прямоугольника, примыкающие к его вершинам, в которых погрешность аппроксимации функции $f(x, y)$ наибольшая. Эту особенность описываемого здесь метода иллюстрирует пунктирная линия 3 на рис., построенная при решении тестовой задачи для круговой области радиусом $R = 0,5$. Очевидно, что точность решения для круговой области почти на порядок выше, чем для прямоугольной области. При использовании зарядов, расположенных внутри области решения непрямоугольной формы (линия 1 на рис.), точность решения значительно ухудшается.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о возможности эффективного использования МТИ не только при решении краевых задач для уравнения Лапласа, но и для неоднородных уравнений эллиптического типа, например для уравнения Пуассона.

Следует отметить, что предложенный алгоритм получения частного решения уравнения Пуассона может применяться и к другим неоднородным уравнениям эллиптического типа, например к уравнению Гельмгольца. Возможно также обобщение предложенного метода решения уравнения Пуассона для трёхмерного случая.

Библиографический список

1. Алексидзе, М. А. Фундаментальные функции в приближённых решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. — Москва : Наука, 1991. — 352 с.
2. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Ad. Vol. Comput. Math. — 1998. — Vol. 9. — Pp. 69–95.
3. Бахвалов, Ю. А. Математическое моделирование физических полей методом точечных источников / Ю. А. Бахвалов, С. Ю. Князев, А. А. Щербаков // Изв. РАН. Серия физическая. — 2008. — Т. 72, № 9. — С. 1259–1261.

4. Князев, С. Ю. Устойчивость и сходимость метода точечных источников поля при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа / С. Ю. Князев // Изв. вузов. Электромеханика. — 2010. — № 1. — С. 3–12.
5. Chen, C. S. A domain embedding method and quasi-Monte Carlo method for Poisson's equation / C. S. Chen, M. A. Golberg // BEM 17 / C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald, H. Power, eds. — Southampton : Comput. Mech. Publ., 1995. — Pp. 115–122.
6. Golberg, M. A. An efficient mesh-free method for nonlinear reaction-diffusion equations / M. A. Golberg, C. S. Chen // CMES 2 (1). — 2001. — Vol. 2 (1). — Pp. 87–95.
7. Li, X. Convergence of the method of fundamental solutions for Poisson's equation on the unit sphere / X. Li // Adv. Comput. Math. — 2008. — Vol. 28. — Pp. 269–282.
8. Князев, С. Ю. Численное решение уравнений Пуассона и Гельмгольца с помощью метода точечных источников / С. Ю. Князев // Изв. вузов. Электромеханика. — 2007. — № 2. — С. 77–78.
9. Князев, С. Ю. Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Изв. вузов. Электромеханика. — 2007. — № 3. — С. 11–15.
10. Alves, C. J. S. A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems / C. J. S. Alves, C. S. Chen // Advances in Computational Mathematics. — 2005. — Vol. 23 — Pp. 125–142.
11. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — Москва : Наука, 1966. — 632 с.
12. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — Москва : Физматгиз, 1963. — 1100 с.

Материал поступил в редакцию 10.02.2014.

References

1. Aleksidze, M. A. Fundamentalnyye funktsii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach. [Fundamental functions in approximate solutions to boundary problems.] Moscow: Nauka, 1991, 352 p. (in Russian).
2. Fairweather, G., Karageorghis, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. Ad. Vol. Comput. Math., 1998, vol. 9, pp. 69–95.
3. Bakhvalov, Y. A., Knyazev, S. Y., Shcherbakov, A. A. Matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh poley metodom tochechnykh istochnikov. [Mathematical modeling of physical fields by point-source method.] Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya. 2008, vol. 72, no. 9, pp. 1259–1261 (in Russian).
4. Knyazev, S. Y. Ustoychivost i skhodimost metoda tochechnykh istochnikov polya pri chislennom reshenii krayevykh zadach dlya uravneniya Laplasa. [Stability and convergence of field point-source method under numerical solution to boundary value problems for Laplace equation.] Izvestiya vuzov. Elektromekhanika. 2010, no. 1, pp. 3–12 (in Russian).
5. Chen, C. S., Golberg, M. A. A domain embedding method and quasi-Monte Carlo method for Poisson's equation. BEM 17. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald and H. Power, eds. Southampton: Comput. Mech. Publ., 1995, pp. 115–122.
6. Golberg, M. A., Chen, C. S. An efficient mesh-free method for nonlinear reaction-diffusion equations. MES 2 (1), 2001, vol. 2 (1), pp. 87–95.
7. Li, X. Convergence of the method of fundamental solutions for Poisson's equation on the unit sphere. Adv. Comput. Math. 2008, vol. 28, pp. 269–282.

8. Knyazev, S. Y. Chislennoye resheniye uravneniy Puassona i Gelmgoltza s pomoshchyu metoda tochechnykh istochnikov [Numerical solution to Poisson and Helmholtz equations using point-source method.] *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*. 2007, no. 2, pp. 77–78 (in Russian).

9. Knyazev, S. Y., Shcherbakova, E. E. Resheniye granichnykh zadach matematicheskoy fiziki metodom tochechnykh istochnikov polya. [Solution to boundary-value problems of mathematical physics by field point-source method.] *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*. 2007, no. 3, pp. 11–15 (in Russian).

10. Alves, C. J. S., Chen, C. S. A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics*, 2005, vol. 23, pp. 125–142.

11. Berezin, I. S., Zhidkov, N. P. *Metody vychisleniy*. [Computing techniques.] Moscow: Nauka, 1966, 632 p. (in Russian).

12. Gradstein, I. S., Ryzhik, I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy*. [Tables of integrals, sums, series, and products.] Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p. (in Russian).

NUMERICAL SOLUTION TO BOUNDARY PROBLEMS FOR POISSON EQUATION BY POINT-SOURCE METHOD*

S. Y. Knyazev, E. E. Shcherbakova, A. A. Yengibaryan

The aim of this paper is the efficiency improvement of one of the most advanced techniques of solving the elliptic boundary value problems — the field point-source method designated as the fundamental solution technique in the foreign literature. Now it is used primarily for solving Laplace equation. Several alternate numerical solutions to the boundary value problems for Poisson equation using the field point-source method are proposed. This method application to the nonhomogeneous equation solution, such as Poisson equation, in most cases leads to the dramatic increase of the numerical error due to mistakes in Poisson equation specific solution. The right member of Poisson equation is approximated by a two-dimensional trigonometric polynomial (in the solution of two-dimensional boundary value problems), then it becomes possible to obtain the specific solution necessary for solving an initial boundary value problem by the field point-source method. The testing results of the proposed technique imply its efficiency, as they allow obtaining the solution with a relative error of 10^{-6} at minimum machine time spending. The developed technique of the numerical solution to the boundary value problems for Poisson equation can be used for modeling physical fields in the engineering devices of various applications.

Keywords: Poisson equation, elliptic boundary value problems, field point-source method, method of fundamental solutions.

* The research is done with the support from RFFI (grants nos. 13-07-00952-a, 14-07-00705-a).