УДК 517.982.274+517.983.22 DOI 10.12737/4536

О представлении операторов обобщённого дифференцирования Гельфонда — Леонтьева в односвязной области*

А. В. Братищев

Установлен ряд новых свойств мультипликатора. Описан класс односвязных областей, мультипликатор которых есть связное множество. Этот класс характеризуется наличием спиралей у мультипликатора. Пусть далее оператор обобщённого дифференцирования Гельфонда — Леонтьева непрерывен в пространстве функций, аналитических в односвязной области G комплексной плоскости. Известно, что он представим в виде оператора обобщённой свёртки. Её ядро порождается многозначной функцией одного переменного. Назовём мультипликатором G множество M(G) со свойством M(G)·G⊆G. Пусть мультипликатор области связный и не совпадает с единицей. В работе доказано, что при данных условиях рассматриваемые функции будут однозначными. Если мультипликатор области несвязный, то всегда найдётся оператор обобщённого дифференцирования Гельфонда — Леонтьева, порождающая функция которого будет многозначной.

Ключевые слова: *мультипликатор области, обобщённая производная Гельфонда — Леонтьева, ядро оператора.*

Введение. Рассматриваемые в статье задачи входят в направление исследований, представленное работами [1–7]. Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и последовательность ограниченных расширяющихся областей $\{G_n\}\uparrow G$ с кусочно-гладкой границей исчерпывает G. $H(G)$ — пространство Фреше аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. $\mathcal{L}(G)$ — пространство непрерывных в $H(G)$ линейных операторов. Используются обозначения предыдущей статьи [8], связанные с интегральным в форме Кете представлением этих операторов [3].

Под оператором обобщённого дифференцирования Гельфонда — Леонтьева (ООД) понимаем линейный непрерывный в $H(G)$ оператор, действующий на последовательности степеней по правилу $Dz^n := d_{n-1}z^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $D1:=0$ [6]. При этом функция $d(z):=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ называется порождающей функцией ООД. Пространство операторов Гельфонда — Леонтьева обозначим $\mathcal{L}_{GL}(G)$. В диссертации [7] получена такая характеризация и представление ООД.

ЛЕММА 1. Определённое на последовательности степеней $\{z^n\}$ отображение $D: Dz^n := d_{n-1}z^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $D1:=0$, расширяется до линейного непрерывного в $H(G)$ тогда и только тогда, когда ряд $d(z):=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ сходится в окрестности начала координат, и функциональный элемент $d\left(\frac{z}{t}\right)$, $|t|>\frac{1}{\varepsilon}$, $|z-z_0|<\varepsilon$, аналитически продолжается в каждую односвязную область $\bar{G}'_N\times G_n$, $n\in\mathbb{N}$. Имеет место интегральное представление

$$[Ly](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma G_{N+1}} y(t)\frac{1}{t^2}d\left(\frac{z}{t}\right)dt,\ z\in G_n.$$

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

Назовём мультипликатором множества $G_2 \subseteq \mathbb{C}$ по множеству $G_1 \subseteq \mathbb{C}$ множество $M(G_1, G_2) := \{z \in \mathbb{C} : z \cdot G_1 \subseteq G_2\}$. Для мультипликатора справедливо равенство $\left(G_2' \cdot G_1^{-1}\right)'^{-1} = M(G_1, G_2)$ [9]. В частности, мультипликатором множества G назовём множество $M(G) := \{z \in \mathbb{C} : z \cdot G \subseteq G\}$. Очевидно, $1 \in M(G)$.

ТЕОРЕМА. Пусть G есть односвязная область. В случае несвязного мультипликатора $M(G)$ всегда найдётся ООД, для которого функция $d(t)$ многозначная, а в случае связного $M(G) \neq \{1\}$ функция $d(t)$ локально аналитическая и однозначная на GG'^{-1}.

Основная часть. В следующей лемме доказаны необходимые свойства мультипликатора области и получено аналитическое описание класса односвязных областей, мультипликатор которых содержит спираль.

ЛЕММА 2. Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, тогда:

1) множество $M(G) \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ замкнуто;

2) если единичная окружность $S(0,1) \subseteq M(G)$, то $G = D(0,R)$ либо $G = \mathbb{C}$.

Обратно, если $G = D(0,R)$ или $G = \mathbb{C}$, то соответственно $M(G) = \bar{D}(0,1)$ и $M(G) = \mathbb{C}$;

3) пусть мультипликатор $M(G)$ является связным, тогда:

а) пусть $0 \in M(G)$. $\exists \varepsilon > 0 \;\; D(0,\varepsilon) \subseteq M(G) \Leftrightarrow G$ ограничена. Если G не ограничена и $\neq \mathbb{C}$, то $0 \in G$ и $M(G) \subseteq \bar{D}(0,1)$;

б) в случае $0 \notin G$ существует спираль с началом в точке 1, наматывающаяся на точку 0 или на точку ∞ $S_{\varphi_0} := \left\{z = \exp\left\{re^{\varphi_0 i}\right\} : r \geq 0\right\} \subseteq M(G)$, $\varphi_0 \neq \pi k + \pi/2$, и существует полунепрерывная сверху на $(-\infty, +\infty)$ функция $k(x)$ со связной областью определения $\{x : k(x) < \infty\}$, которая определяет область G по формуле $G \equiv \left\{z = \exp\left\{re^{\varphi i}\right\} : k\left(r \sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}$;

в) в случае $0 \in G$ существует наматывающаяся на точку 0 спираль $S_{\varphi_0} \subseteq M(G)$, $\pi/2 < \varphi_0 < 3\pi/2$, и $(-2\pi \cos\varphi_0)$ — периодическая полунепрерывная сверху на $(-\infty, +\infty)$ функция $k_1(x)$, которая задаёт границу области G по формуле

$$\Gamma G = \left\{\exp\left\{k_1(x)\cos\varphi_0 + \left(k_1(x)\sin\varphi_0 - \frac{x}{\cos\varphi_0}\right)i\right\} : x \in (-\infty, +\infty)\right\};$$

4) дополнение G' в случае $|\varphi_0 - \pi| < \pi/2$ представляет собой пучок спиралей с вершиной в бесконечности, а в случае $|\varphi_0| < \pi/2$ — пучок с вершиной в нуле.

Доказательство. Большая часть утверждений 1) — 3а) доказана в [7]. Прочие доказываются аналогичным образом.

Докажем 3б). Так как континуум $\bar{G}$ содержит точки 0, ∞, то на G можно выделить ветвь функции $w = \ln z$, являющуюся однолистной и открытой. Область $R := \ln G$ односвязная. При этом мультипликатор $M(G)$ преобразуется в вычет $s(R)$ этой области R: $z \cdot G \subseteq G \Leftrightarrow \ln z + R \subseteq R$. $s(R) = \ln M(G)$. По условию точка $0 = \ln 1 \in R$ является предельной для мультипликатора $s(R)$.

По лемме [9] существует луч $l_{\varphi_0} := \left\{re^{\varphi_0 i} :\ r \ge 0\right\} \subseteq s(R)$. Тогда спираль

$$s_{\varphi_0} := \left\{z = \exp\left\{re^{\varphi_0 i}\right\} :\ r \ge 0\right\} \subseteq M(G).$$

Если бы $\varphi_0 = \pi k + \pi/2$, то $s_{\varphi_0} := \left\{z = \exp\{\pm ri\} :\ r \ge 0\right\} \equiv S(0,1) \subseteq M(G)$, и по пункту 3) $G = D(0,R)$, что невозможно по условию. Согласно лемме [8] R задаётся полунепрерывной сверху на $(-\infty,+\infty)$ функцией $k(x)$ со связной областью определения $\{x : k(x) < \infty\}$ по формуле $R \equiv \left\{w = re^{\varphi i} : k\left(r\sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}$. Обратное конформное отображение $z = e^w$ даёт такое представление исходной области G:

$$G \equiv \left\{z = \exp\{w\} = \exp\left\{re^{\varphi i}\right\} : k\left(r\sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}.$$

3в) Продолжим $\ln z$ из какой-либо точки области $G \setminus \{0\}$. Получим аналитическую функцию $w = Lnz$ на римановой поверхности $\mathcal{L}_G$ с логарифмической точкой ветвления $z = 0$. $w = Lnz$ однолистно и открыто отображает $\mathcal{L}_G$ на $2\pi i$-периодическую односвязную область $R := Ln\left(G \setminus \{0\}\right)$, содержащую некоторую левую полуплоскость $\operatorname{Im} w < a$. Покажем, что множество $s(R) := Ln\left(M(G) \setminus \{0\}\right)$ совпадает с вычетом области R. Выберем $w_0 := \ln z_0 + 2\pi ki$, $z_0 \in M(G) \setminus \{0\}$ и $w_1 := \ln z_1 + 2\pi li$, $z_1 \in G \setminus \{0\}$. Так как $z_0 \cdot z_1 \in G$, то по определению $w_0 + w_1 = \ln z_0 \cdot z_1 + 2\pi(k + l)i \in R$. То есть $s(R)$ состоит из точек вычета области. Остаётся показать, что $s(R)$ содержит все точки вычета.

Пусть $w_0 \ne 0$ и $\forall w := \ln z + 2\pi li \in R$ $w_0 + w \in R$. Положим $z_0 := e^{w_0} \Rightarrow z_0 z \in e^R = G \setminus \{0\}$. Так как $z_0 \cdot 0 \in G$, то $z_0 \in M(G) \Rightarrow w_0 = \ln z_0 \in s(R)$. Так как 1 есть предельная точка $M(G)$, то 0 — предельная точка $s(R) \Rightarrow \exists \varphi_0 \in \left(\pi/2, 3\pi/2\right)$ $s_{\varphi_0} \subseteq M(G) \Rightarrow$ существует полунепрерывная сверху на $(-\infty,+\infty)$ функция $k(x)$ со связной областью определения $\{x : k(x) < \infty\}$, которая является границей области $R_{\varphi_0} := R \cdot \exp\left\{\left(\pi/2 - \varphi_0\right)i\right\} :\ R_{\varphi_0} \equiv \{z = x + yi : k(x) < y\}$, и определяет R по формуле $R \equiv \left\{w = re^{\varphi i} : k\left(r\sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}$. Как и в предыдущем пункте тогда $G \setminus \{0\} \equiv \left\{z = \exp\{w\} = \exp\left\{re^{\varphi i}\right\} : k\left(r\sin(\varphi_0 - \varphi)\right) < r\cos(\varphi_0 - \varphi)\right\}$.

Пусть $\begin{cases} x = k_0(t) \\ y = t \end{cases}$, $t \in (-\infty,+\infty)$ уравнение $2\pi i$-периодической границы области R. Из того, что точки $k_0(t) + ti$, $k_0(t) + (t + 2\pi)i \in \Gamma R$ следует, что их образы

$$x + k(x)i := \left(k_0(t) + ti\right)\exp\left\{\left(\varphi_0 - \pi/2\right)i\right\},\ x_1 + k(x_1)i := \left(k_0(t) + (t + 2\pi)i\right)\exp\left\{\left(\varphi_0 - \pi/2\right)i\right\} \in \Gamma R_{\varphi_0}.$$

Расписывая эти равенства, получаем системы:

$$\begin{cases} x = k_0(t)\sin\varphi_0 - t\cos\varphi_0 \\ k(x) = k_0(t)\cos\varphi_0 + t\sin\varphi_0 \end{cases},\ \begin{cases} x_1 = k_0(t + 2\pi)\sin\varphi_0 - (t + 2\pi)\cos\varphi_0 = x - 2\pi\cos\varphi_0 \\ k(x_1) = k_0(t + 2\pi)\cos\varphi_0 + (t + 2\pi)\sin\varphi_0 = k(x) + 2\pi\sin\varphi_0 \end{cases}.$$

То есть функция $k(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $k(x-2\pi\cos\varphi_0)=k(x)+2\pi\sin\varphi_0$. Обозначим $k_1(x):=k(x)+\mathrm{tg}\varphi_0\cdot x$ полунепрерывную сверху на $(-\infty,+\infty)$ функцию. Так как $k_1(x-2\pi\cos\varphi_0)=k(x)$, то она $(-2\pi\cos\varphi_0)$-периодическая.

Решение первой системы $\begin{cases} k_0(t)=k(x)\cos\varphi_0+x\sin\varphi_0 \\ t=k(x)\sin\varphi_0-x\cos\varphi_0 \end{cases}$ даёт уравнение границы области:

$$\Gamma G=\left\{\exp\{k_0(t)+ti\}:t\in(-\infty,+\infty)\right\}=$$

$$=\left\{\exp\left\{\left(k(x)\cos\varphi_0+x\sin\varphi_0\right)+\left(k(x)\sin\varphi_0-x\cos\varphi_0\right)i\right\}:x\in(-\infty,+\infty)\right\}=$$

$$=\left\{\exp\left\{k_1(x)\cos\varphi_0+\left(k_1(x)\sin\varphi_0-\frac{x}{\cos\varphi_0}\right)i\right\}:x\in(-\infty,+\infty)\right\}.$$

4) Комплексную плоскость, в которой находятся $M(G),G$, обозначим $\mathbb{C}_z$; комплексную плоскость, в которой находятся $R:=\ln G\ (LnG),s(R)$, обозначим $\mathbb{C}_w$; наконец, комплексную плоскость, в которой находятся $R_{\varphi_0}:=R\cdot\exp\left\{\left(\pi/2-\varphi_0\right)i\right\}$ обозначим $\mathbb{C}_v$. Последняя задаётся полунепрерывной сверху функцией $k(x)$, а её мультипликатор содержит луч $l_{\pi/2}$. $\forall x\in\mathbb{C}_v$ вертикальная прямая $\mathrm{Re}v=x$ распадается на луч $x+k(x)i+\left(l_{\pi/2}\setminus\{0\}\right)\subset R_{\varphi_0}$ и не пересекающуюся с R_{φ_0} оставшуюся часть. Эта прямая поворотом на угол $\varphi_0-\pi/2$, преобразуется в прямую, которая состоит из луча $\left(x+k(x)i\right)\exp\left\{\left(\varphi_0-\pi/2\right)i\right\}+\left(l_{\varphi_0}\setminus\{0\}\right)\subset R=\ln G$ и оставшейся части, не пересекающейся с $R=\ln G$. В свою очередь последняя прямая с помощью $2\pi i$-периодического отображения $z=\exp\{w\}$ преобразует в спирали $z=r^{(1+\mathrm{tg}\varphi_0 i)}\exp\{xi/\cos\varphi_0\}$, проходящие через точки $\exp\{xi/\cos\varphi_0\}$ единичной окружности и наматывающиеся на точки 0 и ∞. При этом луч $l_{\pi/2}\subseteq s\left(R_{\varphi_0}\right)$ преобразуется в спираль $s_{\varphi_0}=\{\exp\{t\cos\varphi_0+t\sin\varphi_0 i:t\ge 0\}=\left\{r^{1+\mathrm{tg}\varphi_0 i}\right\}\subseteq M(G)$, которая наматывается на 0, если $|\varphi_0-\pi|<\pi/2$, и на ∞, если $|\varphi_0|<\pi/2$. Поэтому область G в первом случае представляет собой пучок спиралей с вершиной в нуле, а во втором — пучок с вершиной на бесконечности. Дополнение G' наоборот, в случае $|\varphi_0-\pi|<\pi/2$ есть пучок спиралей с вершиной на бесконечности, а в случае $|\varphi_0|<\pi/2$ — пучок с вершиной в нуле. Отсюда, в частности, следует связность любого пересечения $z_1G'^{-1}\cap z_2G'^{-1}$, $z_1,z_2\in G$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выберем по точке в двух компонентах связности вычета $s(G)$: $\zeta_1\in K_1$, $\zeta_2\in K_2$, и образуем линейный оператор

$$[Ly](z):=\int_{z/\zeta_2}^{z/\zeta_1}\frac{y(v)-y(0)-y'(0)v}{v^2}dv+y'(0)\ln\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma G_{N+1}}y(t)\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{z-t\zeta_1}{z-t\zeta_2}\right)dt$$

$$[L1](z)=0,\quad [Lv](z)=\ln\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right),\quad [Lv^{n1}](z)=\int_{z/\zeta_2}^{z/\zeta_1}v^{n-2}dv=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\zeta_1^{n-1}}-\frac{1}{\zeta_2^{n-1}}\right)z^{n-1}$$

Его порождающая функция $d(z):=\ln\left(\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}\right)$ локально аналитическая на $G\bar{G}'^{-1}=(M(G))'$, но многозначная, так как при обходе переменной z одной из компонент K_i значение $d(z)$ изменится на слагаемое $2\pi i$.

Пусть теперь мультипликатор $M(G)$ связный и $\neq\{1\}$. Согласно лемме 1 функция $d(\zeta)$ аналитическая в окрестности нуля и аналитически продолжается в каждую область $z\cdot\bar{G}_N'^{-1},\ z\in G_n$, по формуле $d(\zeta)=\frac{z^2}{\zeta^2}k\left(\frac{z}{\zeta},z\right)$. Остаётся доказать однозначность этого продолжения на $GG'^{-1}=(M(G))'^{-1}$. Пусть $\zeta_0\in GG'^{-1},\ \zeta_0\neq 0$, и для $t_1,t_2\in G',\ z_1,z_2\in G$ $\zeta_0=\frac{z_1}{t_1}=\frac{z_2}{t_2}$. $d(\zeta)=\frac{z_1^2}{\zeta^2}k\left(\frac{z_1}{\zeta},z_1\right)$ на $z_1\cdot\bar{G}_N'^{-1}$, и $d(\zeta)=\frac{z_2^2}{\zeta^2}k\left(\frac{z_2}{\zeta},z_2\right)$ на $z_2\cdot\bar{G}_N'^{-1}$. По теореме единственности тогда $d(\zeta)=\frac{z_1^2}{\zeta^2}k\left(\frac{z_1}{\zeta},z_1\right)=\frac{z_2^2}{\zeta^2}k\left(\frac{z_2}{\zeta},z_2\right)$ на связной компоненте открытого множества $z_1\cdot\bar{G}_N'^{-1}\cap z_2\cdot\bar{G}_N'^{-1}$.

В силу пункта 4 леммы 2 множество $z_1G'^{-1}\cap z_2G'^{-1}$ связное, и потому находится в этой связной компоненте. В частности, в точке ζ_0 $d(\zeta_0)=\frac{z_1^2}{\zeta_0^2}k\left(\frac{z_1}{\zeta_0},z_1\right)=\frac{z_2^2}{\zeta_0^2}k\left(\frac{z_2}{\zeta_0},z_2\right)$ или $\frac{1}{t_1^2}k(t_1,z_1)=\frac{1}{t_1^2}k(t_1,z_2)$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частном случае $M(G)=(0,1)$ теорема была доказана в [6], а в случае, когда G есть звёздная относительно начала координат область — в работе [10].

Заключение. Получено геометрическое описание односвязных областей G, имеющих связный мультипликатор. Этот класс областей характеризуется тем, что ядро любого ООД Гельфонда — Леонтьева из $\mathcal{L}_{GL}(G)$ порождается однозначной аналитической функцией.

Библиографический список

1. Гельфонд, А. О. Об одном обобщении ряда Фурье / А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев // Математический сборник. — 1951. — Т. 29, № 3. — С. 477–500.

2. Bieberbach, L. Analytische Fortsetzung / L. Bieberbach. — Berlin : Gottingen : Heidelberg : Springer-Verlag, 1955.

3. Köthe, G. Dualitat in der Funktionentheorie / G. Köthe // J. reine angew. math. — 1953. — Bd. 191. — S. 30–49.

4. Коробейник, Ю. Ф. Об операторах обобщённого дифференцирования, применимых к любой аналитической функции / Ю. Ф. Коробейник // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1964. — Т. 28, № 4. — С. 833–854.

5. Леонтьев, А. Ф. Обобщённые ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — Москва : Наука, 1981. — 320 с.

6. Братищев, А. В. О представлении оператора обобщённого дифференцирования в одном классе односвязных областей / А. В. Братищев, А. В. Моржаков // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2005. — Т. 5, № 4. — С. 481–490.

7. Моржаков, А. В. Исследование операторов и операторных уравнений, порождённых обобщённым дифференцированием : автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / А. В. Моржаков. — Ростов-на-Дону, 2008. — 15 с.

8. Братищев, А. В. О представлении линейных операторов, коммутирующих с дифференцированием, в односвязной области / А. В. Братищев // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 15–21.

9. Братищев, А. В. Описание обобщённых преобразований Бореля, сохраняющих теорему Пойя / А. В. Братищев // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2001. — Т. 1, № 1. — С. 79–89.

10. Моржаков, А. В. О представлении оператора обобщённого дифференцирования в одном классе односвязных областей / А. В. Моржаков // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2006. — Т. 6, № 1 (28). — С. 10–16.

Материал поступил в редакцию 10.06.2014.

References

1. Gelfond, A. O., Leontiev, A. F. Ob odnom obobshchenii ryada Furye. [On a generalization of the Fourier series.] Matematicheskiy sbornik, 1951, vol. 29, no. 3, pp. 477–500 (in Russian).

2. Bieberbach, L. Analytische Fortsetzung. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.

3. Köthe, G. Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. math., 1953, Bd. 191, S. 30–49.

4. Korobeynik, Y. F. Ob operatorakh obobshchennogo differentsirovaniya, primenimykh k lyuboy analiticheskoy funktsii. [On generalized differentiation operators applicable to any analytic function.] Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya. 1964, vol. 28, no. 4, pp. 833–854 (in Russian).

5. Leontiev, A. F. Obobshchennyye ryady eksponent. [Generalized exponential series.] Moscow: Nauka, 1981, 320 p. (in Russian).

6. Bratishchev, A. V., Morzhakov, A. V. O predstavlenii operatora obobshchennogo differentsirovaniya v odnom klasse odnosvyaznykh oblastey. [On presentation of generalized differentiation operator in one class of simply connected regions.] Vestnik of DSTU, 2005, vol. 5, no. 4, pp. 481–490 (in Russian).

7. Morzhakov, A. V. Issledovaniye operatorov i operatornykh uravneniy, porozhdennykh obobshchennym differentsirovaniyem: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk. [Investigation of operators and operator equations generated by generalized differentiation: Cand. phys.-math. sci. diss., author’s abstract.] Rostov-on-Don, 2008, 15 p. (in Russian).

8. Bratishchev, A. V. O predstavlenii lineynykh operatorov, kommutiruyushchikh s differentsirovaniyem, v odnosvyaznoy oblasti. [On presentation of linear operators commuting with differentiation in simply-connected domain.] Vestnik of DSTU, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 15–21 (in Russian).

9. Bratishchev, A. V. Opisaniye obobshchennykh preobrazovaniy Borelya, sokhranyayushchikh teoremu Poyya. [Description of the generalized Borel transformations preserving Polya’s theorem.] Vestnik of DSTU, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 79–89 (in Russian).

10. Morzhakov, A. V. O predstavlenii operatora obobshchennogo differentsirovaniya v odnom klasse odnosvyaznykh oblastey. [On presentation of generalized differentiation operators in one class of simply connected regions.] Vestnik of DSTU, 2006, vol. 6, no. 1 (28), pp. 10–16 (in Russian).

ON PRESENTATION OF GELFOND—LEONTIEV OPERATORS OF GENERALIZED DIFFERENTIATION IN SIMPLY CONNECTED REGION*

A. V. Bratishchev

Some new properties of the multiplier are determined. A class of simply connected regions whose multiplier is a connected set is described. This class is characterized by the availability of spirals in a multiplier. Let the Gelfond—Leontiev generalized differentiation operator be continuous in the space of the analytic functions in simply connected region G of a complex plane. It is known to be presented as an operator of general complex convolution. The convolution kernel is generated by the many-valued function of one variable. The set M(G) with the property M(G)·G⊆G is called multiplier G. Let the region multiplier be connected, and it does not align with identity. It is proved in the paper that the functions under consideration will be univalent under these conditions. If multiplier G is unconnected, then there is always a generalized differentiation Gelfond—Leontiev operator with a many-valued generating function.
Keywords: *multiplier of a region generalized Gelfond—Leontiev derivative, operator kernel.*

* The research is done within the frame of the independent R&D.