

## **Исследование методик определения констант поляризованной пьезокерамики\***

**В. В. Мадорский, В. Н. Митько**

*С помощью программы ANSYS проведены исследования амплитудно-частотных характеристик пьезокерамических элементов в форме тонкой пластины и стержня. Измерены резонансные и антирезонансные частоты первых двух радиальных мод диска, толщиной моды тонкой пластины и продольной моды длинного стержня прямоугольного поперечного сечения. Численные результаты сравниваются с известными методами определения упругих  $S_{ij}$ , пьезоэлектрических  $d_{ij}$  и диэлектрических  $\epsilon_{ij}$  констант пьезоэлектрических материалов. Предложена и экспериментально обоснована усовершенствованная методика определения константы  $S_{13}^F$  на одном образце только из радиальных колебаний диска. Метод основан на соотношениях между упругими константами пьезокерамики и дисперсией продольных волн. Исследованы границы применения нового метода. По сравнению с известными способами предложенная методика упрощает процедуру измерения и позволяет определить упругую константу с повышенной точностью. Разработана принципиально новая методика измерения резонансных и антирезонансных частот пьезоэлементов с потерями для определения полного набора материальных констант идеальных элементов без потерь согласно российским отраслевым стандартам и стандартам Института радиоинженеров (США) для пьезоэлектрических кристаллов.*

**Ключевые слова:** пьезоэлектрическая керамика, определение констант, метод резонанса — антирезонанса, потери, метод конечных элементов, программа ANSYS, метод возмущений.

**Введение.** Для определения констант пьезокерамики используется косвенный способ. Экспериментально измеряются значения набора резонансных и антирезонансных частот определённых мод колебаний образцов определённой формы и с определённым соотношением геометрических размеров. Одни константы вычисляются исходя из совместности различных форм пьезоэлектрических определяющих соотношений, другие — по приближённым формулам, полученным, как правило, в одномерном приближении. При косвенном способе невозможно проверить правильность применяемых формул, а следовательно, и корректность методики определения констант.

В настоящей работе для проверки корректности методики используется численное решение краевых задач методом конечных элементов. Метод реализован с помощью программы ANSYS [1].

При таком способе в программу вводятся константы пьезокерамики, известные, например, из приведённых в отраслевом стандарте (ОСТ) [2] таблиц. Затем с помощью ЭВМ решается краевая задача для пьезоэлемента выбранного типоразмера. При этом преследуются две цели.

— Первая. По рассчитанным амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ) образца вычисляются определённые константы по формулам, соответствующим выбранному типоразмеру, и тем самым напрямую проверяются эти формулы.

— Вторая. Метод конечных элементов позволяет численно решить соответствующую краевую задачу практически с любой точностью без применения приближённых аналитических выражений и тем самым полностью проанализировать напряженно-деформированное состояние в образце. Таким образом, можно выяснить, насколько правомочны приближения, положенные в основу аналитических выражений, и какой корректировке они должны быть подвергнуты.

С этих позиций численные расчёты представляют собой виртуальный эксперимент, по информативности намного превышающий возможности реального эксперимента.

---

\* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

В работе проанализированы известные методики определения констант, закреплённые в стандартах ГОСТ и ОСТ [2] и представленные в научной литературе [3–6]. Рассмотрены трудности и недостатки этих методик, предлагаются новые, уточнённые методы определения констант.

**1. Анализ методики действующего ОСТ 11.0444-87.** В ОСТ на стр. 93 рассматривается последовательность выполнения измерений для расчёта полного набора электроупругих констант пьезокерамики. Она включает в себя использование следующих типов образцов: планарные поперечные колебания тонкой пластины, продольные колебания по толщине тонкой пластины, продольные колебания столбика и сдвиговые колебания по толщине тонкой пластины. Приведём схему расчёта констант.

### 1.1. Планарные колебания квадратной пластины размером 6 мм и высотой 0,5 мм

Измеряемые величины:  $f_{R1}$  — частота первого резонанса, измеренная по первому максимуму полной проводимости;  $f_{A1}$  — частота первого антирезонанса, измеренная по первому минимуму полной проводимости;  $f_{R2}$  — частота второго резонанса, измеренная по второму максимуму полной проводимости;  $C_0$  — ёмкость образца на частоте 1 кГц.

Вычисляемые величины:  $\epsilon^{T33}/\epsilon_0$ ,  $S^F_{11}$ ,  $S^F_{12}$ ,  $d_{31}$ , коэффициенты связи  $k_p$ ,  $k_{31}$ .

Введённая величина  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Для определения упругих податливостей используется данные [2] (табл. 1).

Таблица 1

#### Коэффициенты для определения упругих модулей

$\sigma_p$	$a_p$	$b_p$	$\beta$	$F_p$
0,19	0,404	0,589	1,583	1,087
0,20	0,403	0,588	1,571	1,092
0,21	0,402	0,586	1,560	1,098
0,22	0,402	0,585	1,549	1,104
0,23	0,401	0,583	1,538	1,110
0,24	0,400	0,582	1,527	1,116
0,25	0,399	0,581	1,516	1,122

Использование для расчёта констант приведённого здесь фрагмента имеет недостаток. При заполнении данной таблицы в качестве независимой переменной используется рассчитываемая величина коэффициента Пуассона с заданным шагом 0,01. Тогда как для независимой, определяемой из эксперимента величины  $\beta$ , равной отношению резонансных частот, получается переменный и большой шаг.

**1.2. Колебания растяжения-сжатия по толщине пластины.** Использование толщинных колебаний той же пластины необходимо с двух точек зрения. Во-первых — для определения диагональных упругих модулей по оси поляризации пьезокерамики. Во-вторых — для расчёта ненулевой не-диагональной компоненты упругой податливости  $S^F_{13}$ .

Измеряемые величины: толщинные частоты  $f_{R1}$ ,  $f_{A1}$ .

Вычисляемые величины: упругая жёсткость  $C^D_{33}$ , коэффициент связи  $k_T$ .

### 1.3. Колебания растяжения-сжатия с поляризацией по длине столбика с длиной 15 мм и размером квадратного поперечного сечения 3 мм

Вычисляемые величины:  $S^P_{33}$ ,  $S^F_{33}$ ,  $d_{33}$ .

По результатам трёх измерений рассчитывается следующий набор упругих констант (и, в частности,  $S^F_{13}$ ).

**1.4. Колебания сдвига по толщине пластины.** Чтобы определить недостающие константы, измеряют ёмкость и частоты первого резонанса и антирезонанса. Для этого используется квадратная пластина с размерами и электродами, показанными выше, но с поляризацией, параллельной плоскости пластины.

Вычисляемые величины:  $C_{44}^D, \varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0, \varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0, C_{44}^E, S_{44}, d_{15}$ .

Таким образом определяется полный набор упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей поляризованной керамики.

**2. Проверка методики с помощью машинного эксперимента.** Как в приведённой методике определения констант, так и в других допускаемых ОСТ типоразмерах образцов используются расчётные формулы, выведенные при двух следующих допущениях.

1. Рассматриваются идеальные колебания, которые могут быть рассчитаны аналитически с учётом наименьшего числа искомых полевых величин, зависящих от одной координаты. Отсюда — приведённые в ОСТ требования к соотношению геометрических размеров образцов.

2. Формулы выводятся для идеального пьезоэлектрика в отсутствие потерь энергии.

Влияние добротности на определение констант рассматривается ниже.

Для анализа методики измерений сначала выбираем высокодобротный материал, полный набор констант которого известен, например PZT-4 с добротностью  $Q_m = 500$ .

## **2.1. Планарные колебания пластины**

$f_{R1} = 320600$  Гц;  $f_{A1} = 364200$  Гц;  $f_{R2} = 459100$  Гц;  $C_0 = 8,287 \cdot 10^{-10}$  Ф;  $\beta = f_{R2}/f_{R1} = 1,432$ .

Данные, определённые по [2] (см. табл. 1):  $\sigma_p = 0,33$ ;  $F_p = 1,172$ ;  $a_p = 0,393$ ;  $b_p = 0,569$ .

Рассчитанные величины:  $\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0 = 1300,5$  (1300);  $S_{11}^F = 1,237$  ( $1,23 \cdot 10^{-11}$ );  $S_{12}^F = -4,08$  ( $-4,05 \cdot 10^{-11}$ );  $d_{31} = -1,174 \cdot 10^{-10}$  ( $-1,23 \cdot 10^{-10}$ );  $k_p = 0,538$ ;  $k_{\varepsilon} = 0,311$ .

Здесь в скобках указаны табличные справочные данные PZT4 [6], используемые при расчётах в ANSYS.

Как видим, рассчитанные по ОСТ упругие константы практически совпадают с задаваемыми. Несколько меньшая точность определения пьезомодуля связана, по-видимому, с погрешностью аппроксимации табличных данных, о чём говорилось выше.

## **2.2. Продольные колебания стержня**

$f_{R1} = 101900$  Гц;  $f_{A1} = 133700$  Гц;  $S_{33}^D = 8,2 \cdot 10^{-12}$  ( $7,9 \cdot 10^{-12}$ );

$S_{33}^F = 15,7 \cdot 10^{-12}$  ( $15,5 \cdot 10^{-12}$ );  $d_{33} = 2,93 \cdot 10^{-10}$  ( $2,89 \cdot 10^{-10}$ ).

Таким образом, точность определения констант по одномерным формулам составляет 1–2 %.

**2.3. Толщинные колебания пластины.** Основные затруднения работы с высокочастотными толщинными колебаниями пластин связаны со следующими факторами.

— Первый. В высокочастотной области имеется множество различных резонансов и антирезонансов. Поэтому оператору, измеряющему АЧХ образцов, трудно определить, какой из резонансов и антирезонансов является нужным. То есть в отличие от рассмотренных выше двух случаев толщинный резонанс не является чётко изолированным.

— Второй. Из-за наличия вблизи толщинного резонанса множества других мод колебаний форма деформации образца может сильно отличаться от формы, которая должна получиться из одномерной теории толщинных колебаний, положенной в основу определения упругой константы материала  $C_{33}^D$ . Как показывает машинный эксперимент, относительное расположение и взаимовлияние резонансов в высокочастотной области зависят как от геометрических размеров, так и от констант пьезоматериалов. При одних и тех же размерах образцов взаимовлияние резонансов будет разным для разных материалов. Поэтому использование толщинного резонанса для измерения констант является плохо обусловленной и неоднозначной методикой.

На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика в высокочастотной области для образца в виде пластины с рекомендованными по ОСТ размерами из материала PZT-4 с различной добротностью.

Из рис. 1 видно, что для данного материала толщинный резонанс соответствует максимуму проводимости при заданном разрешении по частоте. Однако такая закономерность наблюдается не всегда — и можно привести соответствующие примеры материалов с другими упругими константами. Кроме того, очень близко к толщинному может быть расположен паразитный резонанс — в таком случае измерителю трудно отдать предпочтение какому-либо из двух расположенных рядом максимумов.

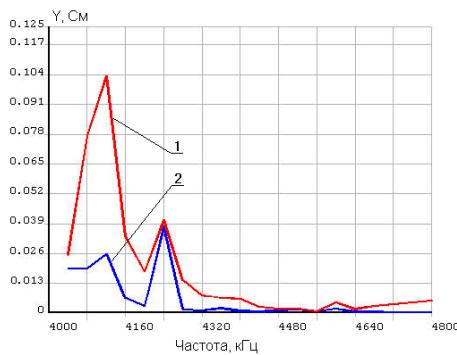


Рис. 1. АЧХ толщинных мод PZT-4: 1 —  $Q_m = 500$ ; 2 —  $Q_m = 50$

На рис. 2 приведена форма деформации на частоте толщинного резонанса. Как видим, она далека от идеальной (поршневой) формы.

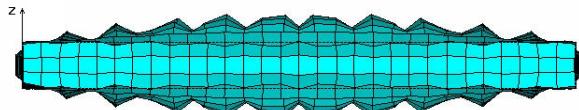


Рис. 2. Деформация по толщине для PZT-4

Далее отметим, что для определения по ОСТ константы  $C_{33}^D$  необходимо знать частоту толщинного антирезонанса. Как видно из представленной АЧХ (см. рис. 1), ситуация с частотой антирезонанса ещё хуже, чем с частотой резонанса. Ясно, что это не первый минимум проводимости, следующий за резонансной частотой, но не ясно, какой из последующих минимумов соответствует частоте антирезонанса. Таким образом, использование толщинной моды колебаний для определения констант проблематично и превращается в отдельное исследование. Тем не менее, применение ANSYS (его средств визуализации колебаний) позволило определить нужные константы:

$$f_R = 4090800 \text{ Гц}; f_A = 4620000 \text{ Гц}; C_{33}^D = 16,0 \cdot 10^{10} (15,9 \cdot 10^{10}).$$

**2.4. Колебания сдвига по толщине пластины.** Ситуация со сдвигом по толщине аналогична толщинным колебаниям (см. рис. 1). Это высокочастотный резонанс, и в этой области также наблюдается множество других мод колебаний. По-видимому, для сдвигового толщинного резонанса проводимость в максимуме будет наибольшей по сравнению с другими резонансами, однако с определением частоты антирезонанса возникают сложности: оператору, производящему измерения, технически трудно решить, какой минимум какому максимуму соответствует.

Наперёд зная значения сдвиговых констант, можно найти сдвиговый антирезонанс —  $f_R = 1960000 \text{ Гц}$ ,  $f_A = 2617000 \text{ Гц}$  и рассчитать сдвиговые константы:

$$C_{44}^D = 5,14 \cdot 10^{10} (5,18 \cdot 10^{10}); \varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0 = 1475,7 (1475); \varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0 = 744,5 (730); \\ C_{44}^E = 2,59 \cdot 10^{10} (2,56 \cdot 10^{10}); S_{44}^E = 38,5 \cdot 10^{-12} (39 \cdot 10^{-12}); d_{15} = 499 \cdot 10^{-12} (496 \cdot 10^{-12}).$$

Таким образом, проведённые вычисления показали необходимость исключения высокочастотных толщинных антирезонансных частот из методики определения констант пьезокерамики.

**3. Влияние добротности на измеряемые параметры.** В пьезоэлектрике в области низких и средних частот отмечаются различные потери энергии. Наибольшие среди них — механические потери, которые традиционно описываются с помощью понятия механической добротности материала.

Общее проявление влияния механических потерь на резонансные характеристики полной проводимости можно сформулировать следующим образом: с уменьшением добротности материала резонансный промежуток расширяется. При этом частота резонанса уменьшается, а частота антирезонанса увеличивается. Этот принцип был проверен множеством численных расчётов на образцах различных размеров из различных материалов и подтверждается как экспериментально, так и данными литературы. Кроме того, известно, что добротность материала зависит от частоты колебаний. До конца не выяснен механизм механических потерь энергии в материалах, тем более их зависимость от частоты. На практике применяется некоторая средняя характеристика — добротность, определяемая известной формулой [7] по полуширине резонансной кривой проводимости.

Изучение добротности может быть объектом отдельного исследования. Для нас важен тот факт, что используемые для расчёта констант формулы выведены для идеального материала, т. е. в отсутствие потерь энергии. В реальных же образцах потери присутствуют. Для расчётов в этих формулах используются частоты резонансов и антирезонансов. Поэтому, учитывая выше приведённые замечания, можно сделать вывод: чем ниже добротность материала, тем больше будет ошибка определения констант. Можно было бы уточнить расчётные формулы, введя в них затухание энергии тем или иным способом, однако в общем виде это выполнить сложно.

В результате множества численных экспериментов авторы вывели принципы определения резонансных и антирезонансных частот, которые должны фигурировать в идеальных расчётных формулах для материала с потерями. По-видимому, эти принципы могут быть получены и аналитически.

**3.1. Определение частот резонансов.** На рис. 3 приведены серии АЧХ полной и активной проводимостей образца из материала PZT-4, в зависимости от его добротности.

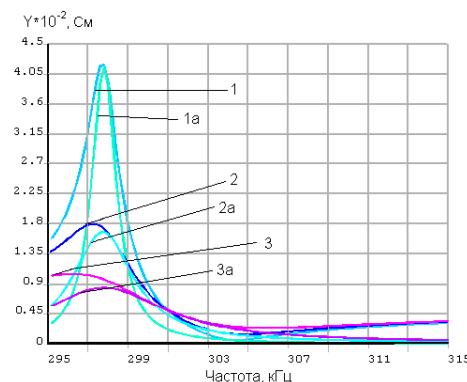


Рис. 3. АЧХ полной (1, 2, 3) и активной (1a, 2a, 3a) проводимости: 1 —  $Q_m = 1000$ ; 2 —  $Q_m = 150$ ; 3 —  $Q_m = 80$

Для нас важен тот факт, видный из графиков, что частота максимума активной проводимости не изменяется с уменьшением добротности и равна частоте резонанса идеального материала.

Таким образом, мы видим, что для использования формул расчёта констант материала, вне зависимости от величины добротности, необходимо фигурирующие в них частоты резонансов определять по максимуму активной проводимости.

**3.2. Определение частот антирезонансов.** Аналогичный вывод, следующий из численных расчётов, можно сделать и относительно определения частот антирезонансов.

На рис. 4 представлены АЧХ активного сопротивления образца при различных добротностях материала (аналогично рис. 3) в окрестности антирезонанса.

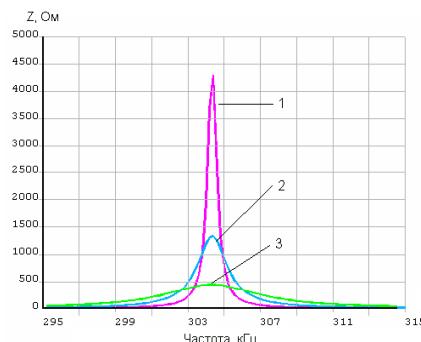


Рис. 4. АЧХ активного сопротивления образца при различных добротностях материала

Как видно, величина активного сопротивления в максимуме уменьшается с уменьшением добротности, но частота максимума активного сопротивления неизменна и равна частоте антирезонанса для материала без потерь.

Следовательно, видим, что для использования формул расчёта констант материала вне зависимости от величины добротности, необходимо фигурирующие в них частоты антирезонансов определять по максимуму активного сопротивления.

Таким образом, использование двух приведённых правил позволяет разделить задачи определения констант пьезоматериалов и исследования частотного поведения механической добротности и других видов потерь энергии в пьезоэлектрике.

**4. Новая методика определения констант материала.** Из приведённого выше материала видно, что применение толщинных мод колебаний пластин в области антирезонансных частот для определения констант пьезокерамики сопряжено с массой сложностей и поэтому нежелательно.

Можно отметить, что использование в ОСТ антирезонансных частот колебаний по толщине пластины связано с необходимостью получения константы  $c_{33}^D$ , которая используется для дальнейшего расчёта  $S_{13}^E$ .

В предлагаемом ниже методе упругие податливости  $S_{11}^E$ ,  $S_{12}^E$  и  $S_{13}^E$  определяются с помощью трёх последовательных радиальных резонансов диска с рекомендуемыми ОСТ размерами: толщина диска 1 мм, радиус диска 10 мм. Метод основан на учёте толщинных поправок в решении для диска.

Рассмотрим пьезоэлектрический диск толщиной  $2h$  и радиусом  $b$ . Основываясь на известных линейных пьезоэлектрических соотношениях и уравнениях для пьезоэлектрических осесимметричных колебаний [8], будем искать решения при следующих граничных условиях: на электродированных торцах диска при  $z = \pm h$  и на боковой поверхности диска при  $r = b$  заданы однородные (нулевые) граничные условия.

Решение данной краевой задачи, соответствующее нахождению резонансных частот радиальных колебаний диска с учётом его толщины, ищем в виде разложения по малому параметру — относительной толщины  $\varepsilon$  в виде

$$a^2 = \varepsilon^2 \beta^2 \Omega^2 + \varepsilon^4 \gamma^4 \Omega^4 + \dots \quad U = U_0 + \varepsilon^2 \Omega^2 U_2 + \varepsilon^4 \Omega^4 U_4 + \dots, \quad (1)$$

где  $a$  — волновое число;  $\beta^2$ ,  $\gamma^4$  — неизвестные постоянные, зависящие от модулей пьезокерамики;

$U_n$  — вектор, составляющие которого  $U(u, w, \Phi)$ ;  $u$ ,  $w$  — механические смещения;  $\Phi$  — элек-

трический потенциал;  $\Omega = \varepsilon \cdot \omega \cdot b \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}$ .

Опуская громоздкие выкладки и ограничиваясь членами с  $\varepsilon^4$  в (1), приведём конечный результат рассматриваемой краевой задачи:

$$\beta^2 = c_{44} / c_{11}^P \nu^4 = (c_{13} / c_{33})^2 / 3 \quad c_{11}^P = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33}. \quad (2)$$

Частотное уравнение, соответствующее однородным граничным условиям для радиальных колебаний диска с учётом его толщины имеет вид:

$$(\beta\Omega/\varepsilon)^2 J_0(a) = (1 - \nu) a J_1(a). \quad (3)$$

В уравнении (3)  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а также в неявном виде через соотношение  $\Omega(a)$  входит толщинная поправка  $\varepsilon$  к определению резонансных частот диска:

$$(\beta\Omega)^2 = a^2 \{1 - (\varepsilon a c_{13} / c_{33})^2 / 3\}. \quad (4)$$

И именно этим соотношением (4) частотное уравнение (3) для диска конечной толщины отличается от известного частотного уравнения для радиальных колебаний диска с «нулевой толщиной» [9]:

$$R J_0(R) = (1 - \nu) J_1(R). \quad (5)$$

Используя разложения функций Бесселя по малому параметру  $\varepsilon$  и выражение (2), из решения уравнения (3) получим

$$\Omega = R \{1 - ((c_{13}\varepsilon R / c_{33})^2 / 6) (R^2 - 2\nu + \nu^2) / (R^2 - 1 + \nu^2)\}, \quad (6)$$

где  $R$  — решение частотного уравнения (5).

Из (6) видно, что безразмерная частота  $\Omega$  зависит от трёх параметров:  $R$ ,  $\nu$  и отношения  $c_{13} / c_{33}$ , или, если измерить три резонансные частоты, получим три уравнения относительно трёх неизвестных. Учитывая соотношения

$$\nu = -S_{12}^E / S_{11}^E, \quad c_{13} / c_{33} = -S_{13}^E / (S_{11}^E + S_{12}^E),$$

из данного трёхчастотного метода можно определить три неизвестных модуля  $S_{11}^E$ ,  $S_{12}^E$ ,  $S_{13}^E$  и рассчитать коэффициент Пуассона  $\nu$ .

Предложенный метод устраняет недостаток определения  $S_{13}^E$  расчётным путём по результатам измерения характеристик трёх типоразмеров образцов одного состава [2, 4]. Известный метод согласно ОСТ усложняет процедуру определения  $S_{13}^E$ , приводит к значительным погрешностям, связанным с несовместимостью свойств в различных типоразмерах образцов [3]. Способ, рекомендованный отечественным отраслевым стандартом и стандартом Института радиоинженеров США [4], непригоден для определения параметров сегнетотвёрдых керамик, типа ПКМ, так как для поляризации стержней из этих материалов с межэлектродным расстоянием 10–15 мм требуются электрические напряжения порядка 100–200 кВ.

Для проверки предложенного способа определения коэффициента Пуассона методом трёх резонансов была рассмотрена зависимость коэффициента Пуассона  $\nu$  от относительной толщины  $\varepsilon$  для пьезокерамики ЦТС-21 по известному из ОСТ и предлагаемому в статье методам.

Исследовался образец в виде диска. К его торцам подводили переменное электрическое поле. Таким образом возбуждались радиальные колебания. С помощью частотомера измеряли частоты основного резонанса и двух его обертонов.

Результаты расчёта коэффициента Пуассона  $\nu$  для образцов из пьезокерамики ЦТС-21 различной толщины приведены на рис. 5.

Значения коэффициента Пуассона, измеренные методом трёх резонансов (кривая 1), практически не зависят от отношения толщины образца к его диаметру для  $\varepsilon < 0,12$  и по величине равны значению, приведённому в ОСТ для ЦТС-21. Кривая 2 показывает, что измерения коэффициента Пуассона согласно ОСТ приводят к завышенным значениям: ошибка может достигать 10 % при  $\varepsilon > 0,05$ , а сам коэффициент Пуассона зависит от толщины, что физически невозможно.

С помощью кривой 1 на рис. 5 можно определить область применения построенной приближённой теории с учётом толщинных поправок для рассмотренной краевой задачи радиальных колебаний пьезоэлектрического диска. Данная область ограничена относительной толщиной  $\varepsilon < (0,10 \div 0,12)$ .

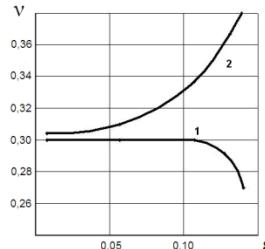


Рис. 5. Зависимость рассчитанного коэффициента Пуассона  $v$  от относительной толщины пьезоэлемента  $\varepsilon$

Другая проверка расчёта коэффициента Пуассона и определения упругих податливостей методом трёх резонансов проводилась с помощью программы ANSYS. Исследовался диск из керамики ЦТС-19: толщина 1 мм; диаметр 20 мм ( $\varepsilon = 0,05$ ); плотность  $\rho = 7400 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; упругие податливости  $S_{11}^E = 15e^{-12}$ ,  $S_{12}^E = -5,6e^{-12}$ ,  $S_{13}^E = -6,1e^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ .

С помощью ЭВМ были рассчитаны первые три резонансные частоты радиальных колебаний диска:  $f_{R1} = 107680$ ,  $f_{R2} = 276720$ ,  $f_{R3} = 435800$  Гц. Рассчитанные из известных частот по методу трёх резонансов упругие податливости для рассматриваемой керамики оказались равны  $S_{11}^E = 15,015e^{-12}$ ,  $S_{12}^E = -5,593e^{-12}$ ,  $S_{13}^E = -6,285e^{-12}$ . Ошибка не превышает трёх процентов для  $S_{13}^E$ , а для  $S_{11}^E$ ,  $S_{12}^E$  результаты практически совпадают.

В программе ANSYS коэффициент Пуассона, равный 0,37333, практически совпадает с расчётом по методу трёх резонансов, где он равен  $v = 0,37249$ . Погрешность составляет 0,22 %.

В заключение отметим: ГОСТ, ОСТ и американский стандарт определения констант пьезокерамики методом резонанса — антирезонанса базируются на измерениях критических частот четырёх мод колебаний для трёх различных по геометрии пьезоэлементов. В рассматриваемой работе число мод уменьшено до трёх. А можно ли уменьшить количество измеряемых элементов?

Подробнее этот вопрос, а также возникающие проблемы измерения резонансных и антирезонансных частот для сдвиговых и толщинных мод авторы предполагают обсудить в следующих статьях.

**Выводы.** С помощью программного комплекса конечноэлементного моделирования ANSYS проанализированы известные методики определения констант, представленные в ГОСТ и ОСТ. Рассмотрены сложности и недостатки этих методик.

Предложен новый способ определения упругой податливости  $S_{13}^E$  при измерении на одном типоразмере образца в виде тонкого диска.

Представлена принципиально новая методика измерения резонансных и антирезонансных частот. Она позволяет определять соответствующие параметры реальных пьезоэлементов (с потерями), используя определения материальных констант идеальных элементов (без потерь), приведённые в ОСТ, и стандарты для пьезоэлектрических кристаллов IRE.

Описанные выше новая методика и алгоритм определения полного набора констант могут быть также использованы для измерения эффективных модулей пористой пьезокерамики [10, 11].

#### Библиографический список

1. ANSYS. Theory Reference Release 8.0 / Edited by P. Kohnke. — Houston : ANSYS Inc, 2003. — 292 p.
2. ОСТ 11.0444-87. Материалы пьезокерамические. Технические условия / Государственный фонд стандартов и технических условий. — Москва, 1987. — 141 с.

3. Definition of constants for piezoceramic materials / V. A. Akopyan [et al.]. — New York : Nova Science Publisher, 2010. — 205 p.
4. IRE standards on piezoelectric crystals, measurements of piezoelectric ceramic // Proceedings of the IRE. — 1961. — V. 49 — P. 1162.
5. Wang, H. Determination of full set material constants of piezoceramics from phase velocities / H. Wang, W. Cao // Journal of Applied Physics. — 2002. — V. 92, № 8. — Pp. 4578–4583.
6. Ding, H. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method / H. Ding, J. Liang // Computers and Structures. — 1999. V. 71. — Pp. 445–455.
7. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. — Москва : Высшая школа, 2003. — 496 с.
8. Tiersten, H. F. Linear piezoelectric plate vibration / H. F. Tiersten. — New York : Plenum press, 1969. — 211 p.
9. Holland, R. Design of resonant piezoelectric devices / R. Holland, E. Eernisse. — Cambridge : MIT Press, 1969. — 257 p.
10. Наседкин, А. В. Моделирование эффективных модулей для различных типов пористых пьезокерамических материалов / А. В. Наседкин, М. С. Шевцова // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 3—4 (72–73). — С. 16–26.
11. О поляризации и определении эффективных характеристик пористой пьезокерамики / Г. Д. Вернигора [и др.] // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 462–469.

Материал поступил в редакцию 03.04.2013.

## References

1. Kohnke, P., ed. ANSYS. Theory Reference Release 8.0. Houston: ANSYS Inc, 2003, 292 p.
2. OST 11.0444-87. Materialy pyezokeramicheskiye. Tekhnicheskiye usloviya. [IST 11.0444-87. Piezoceramic materials. Specifications.] Gosudarstvenny fond standartov i tekhnicheskikh usloviy. [State fund of standards and specifications.] Moscow, 1987, 141 p. (in Russian).
3. Akopyan, V. A., et al. Definition of constants for piezoceramic materials. New York: Nova Science Publisher, 2010, 205 p.
4. IRE standards on piezoelectric crystals, measurements of piezoelectric ceramics. Proc. IRE, 1961, vol. 49, p. 1162.
5. Wang, H., Cao, W. Determination of full set material constants of piezoceramics from phase velocities. Journal of Applied Physics, 2002, vol. 92, no. 8, pp. 4578–4583.
6. Ding, H., Liang, J. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method. Computers and Structures, 1999, vol. 71, pp. 445–455.
7. Bessonov, L. A. Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki. [Theoretical bases of electric engineering.] Moscow: Vysshaya shkola, 2003, 496 p. (in Russian).
8. Tiersten, H. F. Linear piezoelectric plate vibration. New York: Plenum press, 1969, 211 p.
9. Holland, R., Eernisse, E. Design of resonant piezoelectric devices. Cambridge: MIT Press, 1969, 257 p.
10. Nasedkin, A. V., Shevtsova, M. S. Modelirovaniye effektivnykh moduley dlya razlichnykh tipov poristykh pyezokeramicheskikh materialov. [Effective moduli simulation for various types of porous piezoceramic materials.] Vestnik of DSTU, 2013, no. 3—4, pp. 16–26 (in Russian).
11. Vernigora, G. D., et al. O polaryazatsii i opredelenii effektivnykh kharakteristik poristoy pyezokeramiki. [On polarization and identification of porous piezoceramics effective characteristics.] Vestnik of DSTU, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 462–469 (in Russian).

## **INVESTIGATING CONSTANT DETERMINATION TECHNIQUES OF POLARIZED PIEZOCERAMICS\***

**V. V. Madorskii, V. N. Mitko**

*Amplitude-frequency characteristics of the piezoceramic elements in the forms of a thin plate and a rod are studied through ANSYS program. Resonance and antiresonance frequencies of the first two disk radial modes, the thickness mode of the thin plate, and the axial mode of the rectangular cross-section long rod are measured. The numerical results are compared to the known determination techniques of the elastic  $S_{ij}$ , piezoelectric  $d_{ij}$ , and dielectric  $\varepsilon_{ij}$  constants of the piezoelectric materials. The improved procedure for determining elasticity constant  $S_{13}^E$  on one specimen of only radial disk oscillations is suggested and substantiated. The method is based upon the relationships between the elastic constants of piezoceramics and the dispersion of longitudinal waves. The new method usage domain is studied. As compared to the known techniques, the proposed method facilitates the measure procedure and allows determining the elastic constant with the extended precision. A fundamentally new technique of measuring resonant and antiresonant frequencies of piezoelements with losses is developed for defining a full range of material constants of ideal elements without losses according to the Russian branch standards and the Institute of Radio Engineers (USA) standards for piezoelectric crystals.*

**Keywords:** piezoelectric ceramics, constant determination, resonance-antiresonance technique, losses, finite-element method, ANSYS program, perturbation method.

---

\* The research is done within the frame of the independent R&D.