

Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения*

В. Б. Зеленцов, Б. И. Митрин, С. С. Волков, А. С. Васильев

Рассматривается одномерная задача термоупругости о вертикальном внедрении жёсткой полуплоскости, движущейся горизонтально с постоянной скоростью по поверхности упругого покрытия (полосы в плане), нижняя сторона которого жестко опрета на недеформируемое основание. На поверхности основания поддерживается постоянная температура. Тепловой поток, порожденный фрикционным контактом, направлен в покрытие. Решение задачи получено с помощью интегрального преобразования Лапласа и представлено в виде контурных интегралов. Исследовано расположение полюсов подынтегральной функции решения в комплексной плоскости при различных значениях параметров задачи. Распределения температуры, смещений и напряжений по толщине покрытия получены в виде бесконечных рядов по собственным функциям. Показана неустойчивость полученных решений задачи на всём интервале времени при любой скорости скольжения полуплоскости по поверхности покрытия.

Ключевые слова: термоупругодинамическая неустойчивость, связанная задача термоупругости, фрикционный контакт, покрытие.

Введение. Теоретическому и экспериментальному исследованию термоупругодинамической неустойчивости скользящего фрикционного контакта уделяется достаточно большое внимание со стороны научно-технического сообщества [1–9]. При теоретическом изучении задач динамики термоупругого скользящего контакта наиболее часто использующимися методами исследования являются методы малых возмущений [3–5], с помощью которых устанавливается термоупругодинамическая устойчивость или неустойчивость решения задачи, определяется параметрическая область устойчивости или неустойчивости решения задачи [6].

Постановка задачи. Для исследования динамики скользящего фрикционного термоупругого контакта рассматривается одномерная задача плоской деформации о скольжении с постоянной скоростью V жёсткой полуплоскости B ($h \leq x < \infty$) по поверхности ($x = h$) упругого покрытия в виде бесконечной полосы шириной h ($0 \leq x \leq h$), нижня сторона которого ($x = 0$) жестко соединена с недеформируемым основанием в виде полуплоскости A ($-\infty < x \leq 0$) (рис. 1) [5].

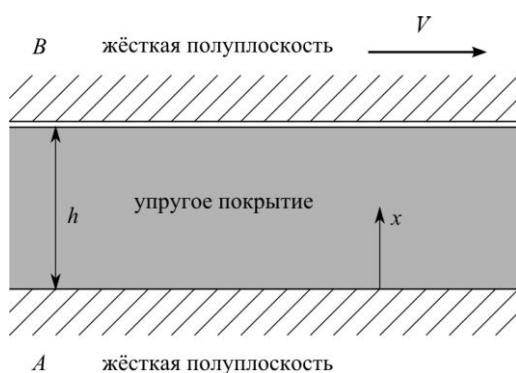


Рис. 1. Схема скольжения жёсткой полуплоскости по поверхности упругого покрытия, жестко соединенного с недеформируемым основанием

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-08-91166-ГФЕН_а, 14-07-00271-а и 14-07-00705-а.

Скольжение недеформируемой полуплоскости B по поверхности покрытия происходит с учётом кулоновского трения, но без учета износа покрытия. Полуплоскость B деформирует упругое покрытие, смещаясь вдоль оси X по закону $u(h, t) = -\Delta(t)$, $t > 0$, где $u(h, t)$ – вертикальное смещение поверхности покрытия при $x = h$. В начальный момент температура покрытия нулевая: $T(x, 0) = T_0 = 0$ ($0 \leq x \leq h$), где $T(x, t)$ – функция распределения температуры в покрытии. Двигущаяся полуплоскость B теплоизолирована, а поток тепла $K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x}$, образующийся за счет трения, направлен в упругое покрытие. Так как нижняя сторона покрытия лежит на недеформируемом основании ($x = 0$) в виде полуплоскости A , то на этой стороне покрытия упругие смещения $u(0, t) = 0$. На нижней стороне покрытия поддерживается нулевая температура $T(0, t) = 0$. С учётом того, что до начального момента времени покрытие находилось в покое, начальные условия на u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ нулевые:

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Сформулированная одномерная задача о скользящем контакте приводит к следующим граничным условиям:

$$x = h: \quad u(h, t) = -\Delta(t), \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = -\mathcal{N}(h, t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u(0, t) = 0, \quad T(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

где $\sigma(x, t)$ – напряжения сжатия в покрытии, K – коэффициент теплопроводности материала покрытия, $\Delta(t)$ – закон внедрения полуплоскости B в упругое покрытие, который принимается в следующем виде:

$$\Delta(t) = \Delta_0 \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ -1 + e^{\varepsilon t}, & 0 \leq t \leq t_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \\ 1, & t_\varepsilon \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$, $t_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln 2$, Δ_0 – глубина внедрения полуплоскости B в упругое покрытие ($0 < \Delta_0 < h$).

Скорость внедрения полуплоскости B определяется как производная $\dot{\Delta}(t)$ и выражается формулой

$$\dot{\Delta}(t) = \Delta_0 \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ \varepsilon e^{\varepsilon t}, & 0 \leq t \leq t_\varepsilon, \\ 0, & t_\varepsilon < t < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Максимальная скорость внедрения достигается при $t = t_\varepsilon$ и составляет $\dot{\Delta}(t_\varepsilon) = 2\Delta_0\varepsilon$, при этом начальная скорость внедрения равна $\dot{\Delta}(0) = v_0 = \varepsilon\Delta_0$, откуда $\varepsilon = v_0/\Delta_0$ (при заданных v_0 и Δ_0).

Изменение $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ в полосе описывается одномерным уравнением теории упругости [10]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0, \quad (5)$$

а температура $T(x, t)$ – уравнением теплопроводности [11]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0, \quad (6)$$

где ρ , K – плотность и коэффициент температуропроводности материала покрытия соответственно.

Связь между $\sigma(x,t)$, $u(x,t)$ и $T(x,t)$ устанавливается соотношением Дюамеля – Неймана [12]

$$\sigma(x,t) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} a T(x,t), \quad (7)$$

где μ , ν , a – модуль сдвига, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения материала покрытия соответственно.

Для удобства построения решения задачи (1) – (6) выражение $\sigma(x,t)$ (7) подставляется в дифференциальное уравнение движения упругой среды (5). В результате этого получим дифференциальное уравнение движения упругой среды относительно $u(x,t)$ и $T(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} a \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad a = \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad (8)$$

где a – скорость упругой волны.

Начальные условия на $u(x,t)$, $T(x,t)$ и $\Delta(t)$ нулевые

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad T(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad \Delta(0) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи, с учетом начальных условий (9), сводится к решению дифференциальных уравнений (6), (8) с граничными условиями (1), (2), а $\sigma(x,t)$ в (1) определяется формулой (7).

Решение поставленной задачи. Поставленная нестационарная начально-краевая контактная задача (1)–(9) относится к разряду собственно-связанных задач термоупругости, так как $\sigma(x,t)$ и $T(x,t)$ связаны не только в формулах (5) и (7), но и во втором граничном условии (1). Её решение может быть построено различными методами математической физики [11]. С помощью интегрального преобразования Лапласа [13] решения поставленной задачи (1)–(9) $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma(x,t)$ определяются с помощью контурных квадратур

$$T(x,t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\gamma \hat{V}}{ah} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_T(x,z) R^{-1}(z) \exp(\tilde{z}t) dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_k}, \quad (10)$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_u(x,z) R^{-1}(z) \exp(\tilde{z}t) dz, \quad (11)$$

$$\sigma(x,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n \left\{ \dot{\Delta}(\omega_n^-(x,t)) + \dot{\Delta}(\omega_n^+(x,t)) \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_{\sigma}(x,z) R_{\sigma}^{-1}(z) \exp(\tilde{z}t) dz \right], \quad (12)$$

справедливы для $0 \leq x \leq h, t \geq 0$, где $\Gamma = \{z : -i\infty + dt_k, i\infty + dt_k\}$ – контур интегрирования в комплексной плоскости, представляющий прямую линию, параллельную мнимой оси и отстоящую от неё на величину dt_k , в которой d выбирается таким образом, чтобы все полюса подынтегральных функций в (10)–(12) были бы левее dt_k ,

$$R(z) = (1 - \gamma^2 z) \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z - \gamma \hat{V} (\operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z - 1), \quad (13)$$

$$N_T(x,z) = \sqrt{z} (1 - \gamma^2 z) \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} (\sqrt{z} x h^{-1}), \quad (14)$$

$$N_u(x,z) = (1 - \gamma^2 z) \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} (\gamma z x h^{-1}) - \gamma \hat{V} (\operatorname{ch} (\sqrt{z} x h^{-1}) \operatorname{ch} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{sh} (\gamma z x h^{-1}) - \operatorname{ch} (\gamma z (h-x) h^{-1})), \quad (15)$$

$$N_{\sigma}(x,z) = \gamma z [N_{\sigma}^0(x,z) \operatorname{sh} \gamma z - \operatorname{ch} (\gamma z x h^{-1}) R(z)], \quad (16)$$

$$N_{\sigma}^0(x,z) = (1 - \gamma^2 z) \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{ch} (\gamma z x h^{-1}) + \gamma \hat{V} (\gamma \sqrt{z} (\operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{ch} (\gamma z x h^{-1}) - \operatorname{sh} (\sqrt{z} x h^{-1}) \operatorname{ch} \gamma z) - \operatorname{sh} (\gamma z (h-x) h^{-1})),$$

$$R_\sigma(z) = \text{sh}yz R(z), \quad (17)$$

$$\Delta_0^{-1} D(z) = z^{-1} (2 \exp(-zt_{\varepsilon k}) - 1) + (z - \varepsilon t_k)^{-1} (1 - \exp(-(z - \varepsilon t_k)t_{\varepsilon k})), \quad (18)$$

$$\omega_n^\pm(x, t) = t - \frac{(2n-1)h \pm x}{a},$$

где a – постоянная из (7), a – из (8), безразмерные параметры γ и \hat{V} определяются формулами

$$\gamma = \frac{\kappa}{ah}, \quad \hat{V} = \frac{f\kappa}{K} \cdot \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}.$$

Вненинтегральные слагаемые получены в формуле (12) в результате выделения обобщенных квадратур [14–16] с помощью выражения $D(z) \text{ch}(\gamma zx h^{-1}) / \text{sh}yz$.

Квадратуры в формулах (10)–(12) существуют при выполнении условия $t > (h-x)/a$ и благодаря алгебраическому убыванию подынтегральных функций на бесконечности

$$D(z) N_T(x, z) R^{-1}(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{z} \frac{h-x}{h}}\right) \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \quad (19)$$

$$D(z) \begin{Bmatrix} N_u(x, z) R^{-1}(z) \\ N_\sigma(x, z) R_\sigma^{-1}(z) \end{Bmatrix} = O\left(\begin{Bmatrix} z^{-1} \\ z^{-1} \end{Bmatrix} e^{-\gamma z \frac{h-x}{h}}\right) + O\left(\begin{Bmatrix} z^{-2} \\ z^{-\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} e^{-\sqrt{z} \frac{h-x}{h}}\right) \quad (20)$$

при $|z| \rightarrow \infty$.

Исследование подынтегральных функций в формулах (10)–(12) показывает, что все они мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования $z = \xi + i\eta$, то есть имеют в качестве изолированных особых точек только полюсы, которые доставляются обращением в ноль знаменателей этих функций: $R(z)$, $R_\sigma(z)$. Кроме того, следует отметить, что подынтегральные функции в (10)–(12) при $z = 0$ и $z = \gamma^{-2}$ обращаются в ноль.

$$N_T(x, 0) = N_u(x, 0) = N_\sigma(x, 0) = R(0) = R_\sigma(0) = 0, \quad (21)$$

$$N_T(x, \gamma^{-2}) = N_u(x, \gamma^{-2}) = N_\sigma(x, \gamma^{-2}) = R(\gamma^{-2}) = R_\sigma(\gamma^{-2}) = 0,$$

причём $N_\sigma(x, z)$ и $R_\sigma(z)$ имеют двукратный ноль при $z = 0$.

В заключении этого пункта заметим, что выделение главной части поведения подынтегральной функции в формуле (12) для $\sigma(x, t)$ производилось с помощью трансформанты Лапласа решения соответствующей одномерной упругой задачи о внедрении недеформируемой полуплоскости B в упругую полосу на жестком основании.

Нули функции $R(z)$ в комплексной плоскости. Для вычисления контурных интегралов в формулах (10)–(12) методами теории функций комплексного переменного необходимо знание нулей функции $R(z)$ и их свойств в комплексной плоскости. Нули функции $R(z)$ из (13) определяются в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$ из решения трансцендентного уравнения

$$R(z) = (1 - \gamma^2 z) \text{ch} \sqrt{z} \text{sh} \gamma z - \gamma \hat{V} (\text{ch} \sqrt{z} \text{ch} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \text{sh} \sqrt{z} \text{sh} \gamma z - 1) = 0, \quad (22)$$

которое совпадает с соответствующим характеристическим уравнением [5].

При численном определении корней уравнения (22) в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$ использовались итерационные численные методы определения корней, требующие хорошего начального приближения. Для получения начального приближения корней уравнения применяется параметрический анализ функции $R(z)$ по двум безразмерным параметрам γ и \hat{V} . Зафиксировав γ и положив

$\hat{V}=0$ в (22), получим упрощенное уравнение

$$(1 - \gamma^2 z) \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} = 0, \quad (23)$$

решение которого распадается на решение трех уравнений:

$$1 - \gamma^2 z = 0, \quad \operatorname{ch} \sqrt{z} = 0, \quad \operatorname{sh} \sqrt{z} = 0. \quad (24)$$

Первое из уравнений (24) дает корень $z = \gamma^{-2}$, являющийся корнем не только уравнения (22) для любых γ и \hat{V} , но и всех остальных подынтегральных функций, что было отмечено ещё в (21). Из последнего следует, что $z = \gamma^{-2}$ не является полюсом подынтегральных функций в формулах (10)–(12). Второе и третье уравнения в (24) приносят две бесконечные последовательности нулей:

$$z_{0k} = -\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right]^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$z_{0n}^\pm = \pm \frac{\pi n}{\gamma}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Нули z_{0k} (25) и z_{0n}^\pm (26), определенные при $\hat{V}=0$ из уравнения (22), являются начальными приближениями для последовательного с увеличением \hat{V} определения соответствующих по номеру нулей $z_k = z_k(\hat{V})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и $z_n^\pm = z_n^\pm(\hat{V})$, $n = 1, 2, \dots$, из численного решения уравнения (22) при фиксированных γ .

Нули $z_{0k} = z_k(0)$ (25), соответствующие $\hat{V}=0$, располагаются на отрицательной части действительной оси $\operatorname{Im}(z)=\eta=0$ комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$. Множество $z_0(\hat{V})$ при $\hat{V} \in [0, \infty)$ представляет полу бесконечный промежуток $[z_0(0), \infty)$ действительной оси, где $z_0(0) = -\pi^2/4$, а при $\hat{V} = 2$ и произвольном γ $z_0(\hat{V})$ попадает в начало координат $z_0(2) = 0$. Таким образом, при $0 < \hat{V} < 2$ выполняется неравенство $-\pi^2/4 < z_0(\hat{V}) < 0$, а при $\hat{V} > 2$ значения $z_0(\hat{V}) > 0$ и располагаются на положительной части действительной оси (рис. 2). При этом $z_0(\hat{V})$ единственный из всех корней (22), который при произвольном γ обладает свойством $\lim_{\hat{V} \rightarrow \infty} z_0(\hat{V}) = \infty$. Множества $z_k(\hat{V})$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $\hat{V} \in [0, \infty)$ при произвольном γ представляют собой отрезки на отрицательной части действительной оси, левый край которых совпадает с $z_{0k} = z_k(0) < 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, из выражения (25), а правый представляет точку сгущения $\lim_{\hat{V} \rightarrow \infty} z_k(\hat{V}) = z_k(\infty) > z_k(0)$, где $z_k(0) < 0$ (на рис. 2 стрелкой указано направление расположения точек множества $z_k(\hat{V})$ при $\hat{V} \rightarrow \infty$, совпадающее с положительным направлением действительной оси).

Заметим, что при больших значениях k $z_{0k} = z_k(0)$ из (25) имеют очевидную асимптотику $z_k(0) = -(pk)^2 + o(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Нули $z_{0n}^\pm = z_n^\pm(0)$ (26), соответствующие $\hat{V}=0$, располагаются на мнимой оси $\operatorname{Re}(z) = \xi = 0$ комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$, являясь начальными приближениями (при фиксированном γ) для последовательного с увеличением \hat{V} определения в комплексной плоскости соответствующих по номеру нулей $z_n^\pm(\hat{V})$ из численного решения уравнения (22). Ноль $z_{00}^\pm = z_0^\pm(0) = 0$ не является полюсом

с учетом соотношений (21). При $\gamma = 1$ множества $z_n^\pm(\hat{V})$, $\hat{V} \in [0, \infty)$ представляют в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$ траектории в виде кривых линий, похожих на незаконченные эллипсы (см. рис. 2) с главными осями, параллельными действительной оси $\text{Im}(z) = \eta = 0$. С ростом n эллипсы располагаются периодически с периодом π ($\gamma = 1$) выше и ниже действительной оси, причем их ширина с ростом номера уменьшается (рис. 2). Уменьшается с ростом номера n и $\text{Re}(z_n^\pm(\hat{V})) = \xi_n^\pm$, то есть для корней $z_n^\pm(\hat{V})$ уравнения (22):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(z_n^\pm(\hat{V})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^\pm = 0. \quad (27)$$

На графиках $z_n^\pm(\hat{V})$ стрелками указано направление расположения нулей с ростом аргумента \hat{V} , при чем при возрастании \hat{V} от 0 до \hat{V}_{*n} действительная часть $z_n^\pm(\hat{V})$ возрастает и при $\hat{V} = \hat{V}_{*n}$ достигает своего наибольшего значения. При дальнейшем увеличении \hat{V} от \hat{V}_{*n} до ∞ величина $\text{Re}(z_n^\pm(\hat{V}))$ убывает до некоторого конечного значения $\text{Re}(z_n^\pm(\infty))$ (рис. 2).

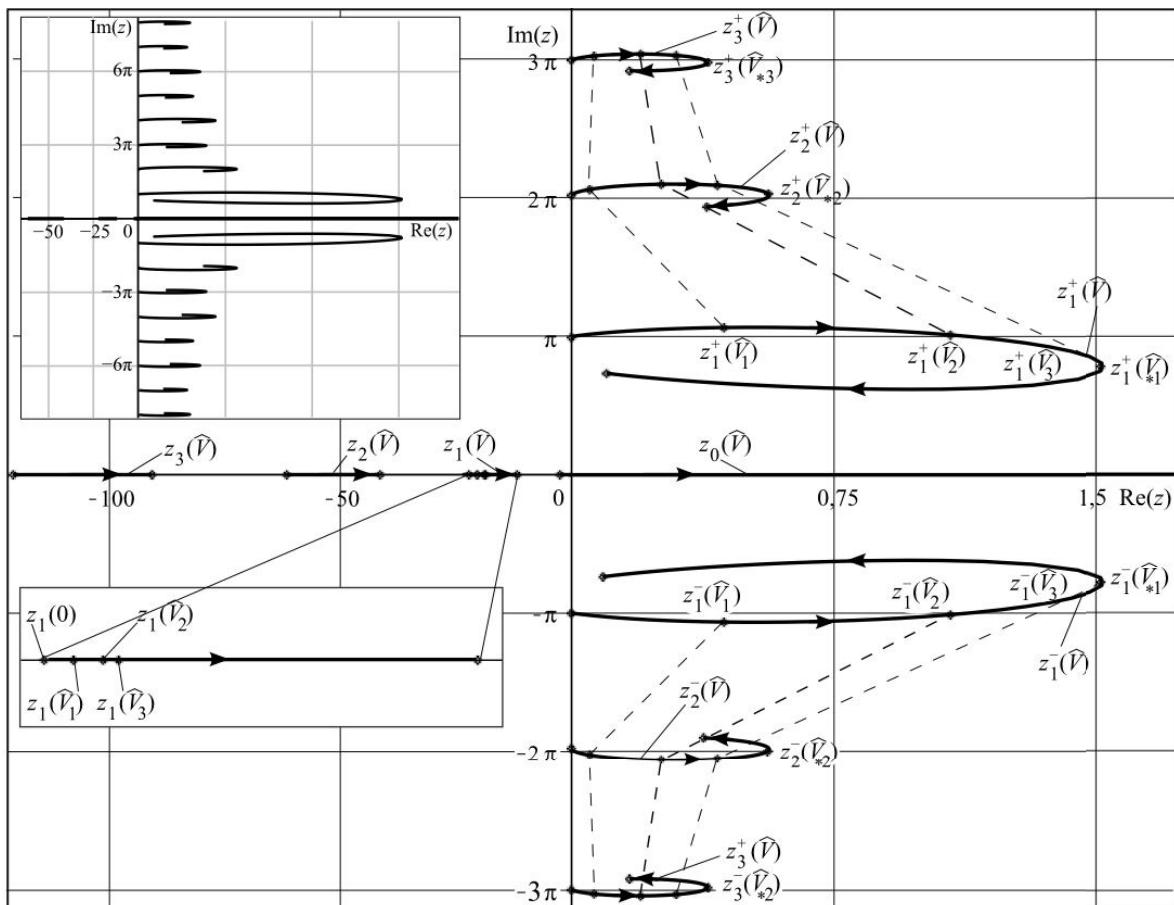


Рис. 2. Расположение нулей $R(z)$ в комплексной плоскости z при $\hat{V} \in [0, \infty)$, $\gamma = 1$.

В левом верхнем углу — общий план расположения нулей, в нижнем левом углу — расположение множества точек $z_1(\hat{V})$ в увеличенном формате

Мнимая часть корней $z_n^\pm(\hat{V})$ уравнения (22) $\text{Im}(z_n^\pm(\hat{V})) = \eta_n^\pm$ с ростом n приближается к $\pm \frac{\pi n}{\gamma}$,

что также следует из уравнения (26):

$$\text{Im}(z_n^\pm(\hat{V})) = \eta_n^\pm = \pm \frac{\pi n}{\gamma} + O(1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

В этом случае для больших номеров n нули $z_n^\pm(\hat{V})$ можно записать в виде

$$z_n^\pm(\hat{V}) = \xi_n^\pm \pm i \frac{\pi n}{\gamma}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^\pm = 0$ из (27). Подставив (29) в уравнение (22) и считая при этом ξ_n^\pm малой величиной, для больших n получим следующую оценку:

$$\xi_n^\pm = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\gamma \pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

а корни $z_n^\pm(\hat{V})$ при этом для больших значений n получат асимптотику

$$z_n^\pm = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\gamma \pi n}} \pm i \frac{\pi n}{\gamma} + O\left(\frac{1}{n}\right) + iO(1) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Следует заметить, что графики z_n^+ и z_n^- обладают симметрией относительно действительной оси $\text{Im}(z) = \eta = 0$, как и подынтегральные функции в квадратурах (10)–(12), а для z_n^\pm выполняется равенство

$$z_n^\pm = \overline{z_n^\mp}. \quad (32)$$

На всех траекториях нулей $z_n^\pm(\hat{V})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, указаны точками значения $z_k(\hat{V}_j)$ и $z_n^\pm(\hat{V}_j)$, где $j = 1, 2, 3$, причём $\hat{V}_1 = 1$, $\hat{V}_2 = 2$, $\hat{V}_3 = 2,7$. Значения $z_n^\pm(\hat{V}_j)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, при одинаковых \hat{V}_j , $j = 1, 2, 3$ соединены пунктирными линиями.

Графики нулей функции $R(z)$: $z_k(\hat{V})$, $z_n^\pm(\hat{V})$, $n, k = 1, 2, 3, \dots$, $z_0(\hat{V})$, представленных на рис. 2, рассчитаны с помощью программы, написанной для системы Maple, при существенно увеличенном количестве значащих цифр в расчетах.

Анализ полученных решений. После вычисления контурных квадратур в комплексной плоскости в (10)–(12) [17, 18] для функций $T(x, t)$, $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ получаются удобные для вычисления формулы в виде рядов по полюсам подынтегральных функций:

$$T(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\gamma \hat{V}}{a} \cdot \frac{\Delta_0}{h} \sum_{k=1}^2 S_k(x, \tilde{t}) H\left((-1)^k (\tilde{t} - t_{ek})\right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (33)$$

$$u(x, t) = -\Delta_0 \sum_{k=1}^2 S_k(x, \tilde{t}) H\left((-1)^k (\tilde{t} - t_{ek})\right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) = & -\frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\Delta_0}{h} \left[\sum_{k=1}^{\infty} t_a \left(\dot{\Delta}(\omega_n^-(x, t)) + \dot{\Delta}(\omega_n^+(x, t)) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(S_k(x, \tilde{t}) + S_k^0(x, \tilde{t}) \right) H\left((-1)^k (\tilde{t} - t_{ek})\right) \right], \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (35)$$

где $S_k(x, t)$ ($k = 1, 2$) выражаются формулами:

$$S_1(x, t) = s_1(x, t) + G(x, t), \quad (36)$$

$$G(x, t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \theta(z_k^+) K'(z_k^+, x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} \theta(z_k) K'(z_k, x, t), \quad (37)$$

$$S_2(x, t) = s_2(x, t) + G(x, t) - 2G(x, t - t_{\varepsilon k}), \quad (38)$$

$$s_1(x, t) = K(t_k \varepsilon, x, t) - K(0, x, 0), \quad s_2(x, t) = K(0, x, 0),$$

$$K(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R(z)} \exp(zt), \quad K'(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R'(z)} \exp(zt),$$

$$K(0, x, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{N(x, z)}{R(z)}, \quad \theta(z) = \frac{t_k \varepsilon}{z(z - t_k \varepsilon)},$$

$$S_1^0(x, t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \theta(z_{0k}^+) K'(z_{0k}^+, x, t), \quad (39)$$

$$S_2^0(x, t) = 2 S_1^0(x, t - t_{\varepsilon k}) - S_1^0(x, t), \quad (40)$$

где $R'(z)$ есть производная по z , $H(t)$ – функция Хэвисайда.

В формуле (35) под $\dot{\Delta}(t)$ понимается нормированная функция $\dot{\Delta}(t) = \varepsilon e^{\varepsilon t} H(t_\varepsilon - t) H(t)$ из (4), где $\varepsilon = \nu_0 / \Delta_0$. Функция $G(x, t)$ (37) в формулах для $S_k(x, t)$ ($k = 1, 2$) содержит два бесконечных ряда, один из которых по полюсам z_k^+ , $k = 1, 2, 3, \dots$, следующего вида:

$$S^+ = \sum_{k=1}^{\infty} b(x, z_k^+) e^{z_k^+ \tilde{t}}, \quad b(x, z) = \theta(z) \frac{N(x, z)}{R'(z)}, \quad (41)$$

сходимость которого не очевидна, так как $\operatorname{Re}(z_k^+) > 0$, $\tilde{t} > 0$. С учетом асимптотики z_k^+ (31) при $k \rightarrow \infty$ можно показать, что последовательность экспонент $\{e^{z_k^+ \tilde{t}}\}$ является ограниченной для фиксированных значений \tilde{t} ($0 < \tilde{t} < \infty$):

$$\left| e^{z_k^+ \tilde{t}} \right| < M \quad (M > 0),$$

а ряд (41) является сходящимся [19], в том числе за счет убывания $\theta(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$. С другой стороны, учитывая упорядоченность $\{\operatorname{Re}(z_k^+)\}$, где для двух соседних членов выполняется условие

$$\operatorname{Re}(z_k^+) > \operatorname{Re}(z_{k+1}^+), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

сумму ряда (44) можно представить в виде

$$S^+ = b(x, z_1^+) \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} B(x, z_k^+) e^{-(z_1^+ - z_k^+) \tilde{t}} \right) e^{z_1^+ \tilde{t}}, \quad B(x, z) = \frac{b(x, z)}{b(x, z_1^+)}, \quad (42)$$

где ряд в скобках является сходящимся, причем со скоростью геометрической прогрессии, так как $\operatorname{Re}(z_1^+ - z_k^+) > 0$, $k = 2, 3, \dots$. Из выражения (42) вытекает, что при неограниченном возрастании \tilde{t} ($\tilde{t} \rightarrow \infty$), неограниченно возрастает S^+ из (41), а решение, его содержащее, является неустойчивым при любых значениях $\hat{V} > 0$.

В формуле для $G(x, t)$ (37) из $S_k(x, t)$ ($k = 1, 2$), кроме вышеупомянутого ряда (41), содержится и другой бесконечный ряд по полюсам z_k , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Учитывая свойства $z_0(\hat{V})$, изученные выше, а именно то, что при $0 < \hat{V} < 2$ полюс $z_0(\hat{V}) < 0$, при $\hat{V} = 2$ полюс $z_0(2) = 0$,

при $\hat{V} > 2$ полюс $z_0(\hat{V}) > 0$, можно утверждать, что ряд по полюсам Z_k

$$S^- = \sum_{k=0}^{\infty} b(x, z_k) e^{z_k \tilde{t}}, \quad (43)$$

где $b(x, z)$ из выражения (41) для фиксированных значений \tilde{t} сходится со скоростью геометрической прогрессии для любых γ и \hat{V} . Однако при $\hat{V} > 2$, когда $z_0(\hat{V}) > 0$, сумма ряда S^- (43), перестроенная по формуле

$$S^- = b(x, z_0) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} B(x, z_k) e^{(z_k - z_0) \tilde{t}} \right) e^{z_0 \tilde{t}}, \quad (44)$$

где $B(x, z)$ из (41), при $\tilde{t} \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, хотя ряд, стоящий в скобках, сходится.

Это означает, что при $\hat{V} > 2$ решение, содержащее ряд (43), является неустойчивым. Таким образом, решения рассмотренной задачи (33)–(35), содержащие ряды (41) и (43), являются термоупругонеустойчивыми, начиная со сколь угодно малой скорости скольжения $V > 0$.

Численный анализ полученных решений. Для детального изучения термоупругонеустойчивого решения рассматриваемой задачи используются формулы (33)–(35). Числовые значения параметров задачи следующие: $\mu = 44 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,25$, $a = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\alpha = 4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, $k = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $K = 62,8 \text{ Вт}\cdot\text{м}/\text{К}$ (параметры материала соответствуют табличным значениям для чугуна), $f = 0,15$, $\Delta_0 = 0,1h$, $v_0 = 0,01 \text{ м/с}$, $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $V = 1,58 \text{ м/с}$, $t_\varepsilon = 6,93 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $t_a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, в результате чего безразмерные параметры задачи γ и \hat{V} приобретают следующие значения: $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-4}$ и $\hat{V} = 0,25$. На рис. 3 представлены графики изменения смещений $u(x, t)$ по толщине покрытия ($0 \leq x \leq h$), рассчитанные по формуле (34) при разных значениях x , которые обозначены цифрами 1–5, причём 1 соответствует $x = 0$, $2 - 0,25h$, $3 - 0,5h$, $4 - 0,75h$, $5 - h$ (на контакте). На рис. 3 видно, как со скоростью геометрической прогрессии развивается амплитуда смещений неустойчивого решения $u(x, t)$ на собственной частоте $\text{Im}(z_1^+)$, теряя физический смысл с некоторого момента времени, причём при $x = 0,5h$ это происходит немного раньше, чем при других x .

На рис. 4 приведены графики изменения напряжений $\sigma(x, t)$ для различных глубин по x , которые, как и на рис. 3, обозначены цифрами 1–5. Начиная с некоторого момента времени, амплитуда колебаний $\sigma(x, t)$ на собственной частоте $\text{Im}(z_1^+)$ нарастает по экспоненте и неустойчивое решение теряет физический смысл, причем примерно в тот же временной период, когда это же происходит со смещениями $u(x, t)$ на рис. 3. С помощью врезки на рис. 4 подробно показано изменение величины напряжений $\sigma(x, t)$ на отрезке $t \in [0, 1,8 \cdot 10^{-6}]$ в более мелком временном масштабе: различается запаздывание по времени прихода волны сжатия в сечение x , наибольшее при $x = 0$ (отмечено цифрой 1), амплитуда пришедшей волны сжатия при $x = 0$ удваивается за счет отражения от жесткого основания (две цифры 1 на одной и той же прямой), двумя цифрами 5 отмечается рост амплитуды напряжений сжатия на контакте при $x = h$ и т.д.

На рис. 5, a представлены графики температуры $T(x, t)$ в покрытии для различных значений x , обозначенные цифрами 1–5, как на рис. 3, 4. С помощью врезок b , c , d даются наиболее существенные фрагменты графиков температуры $T(x, t)$ в более мелком временном масштабе: на врезке b даны графики развития температуры на начальном временном отрезке при различных значениях x , график с цифрой 1 соответствует выполнению при $x = 0$ граничного условия $T(0, t) = 0$, с увеличением x графики $T(x, t)$ показывают всё более быстрое нарастание температуры с максимумом

мом на контакте при $x = h$ (кривая 5); на врезке B представлен график температуры $T(h, t)$ (на контакте) на временном отрезке $t > 3t_\epsilon$, показывающий колебательный характер графика на собственной частоте $\text{Im}(z_1^+)$; на врезке Γ показан интервал времени, на котором амплитуда колебаний претерпела 50-кратное увеличение по сравнению с врезкой B .

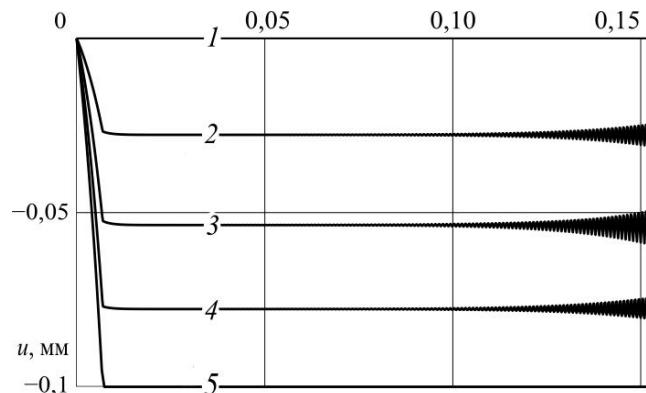


Рис. 3. Графики распределения смещений $u(x,t)$ по толщине покрытия

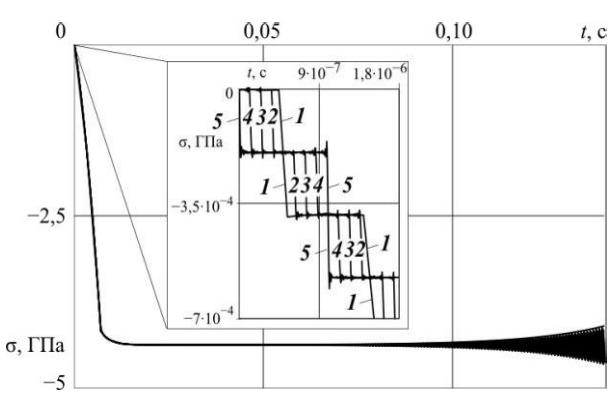


Рис. 4. Графики распределения напряжений $\sigma(x,t)$ по толщине покрытия

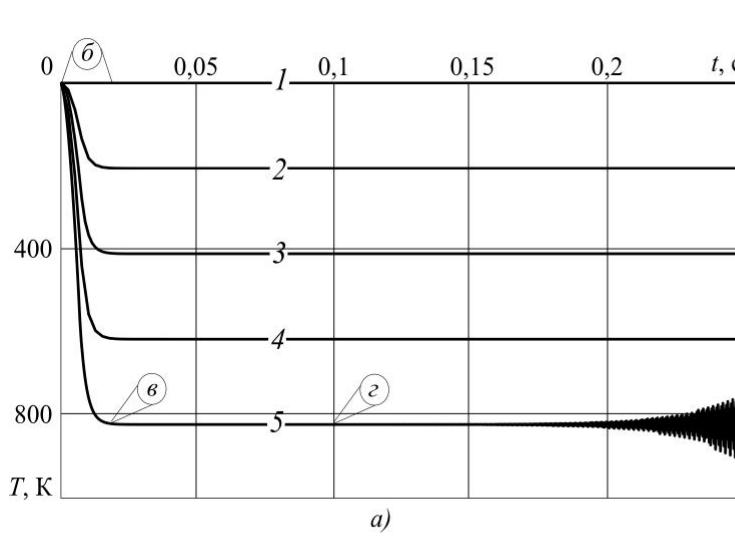
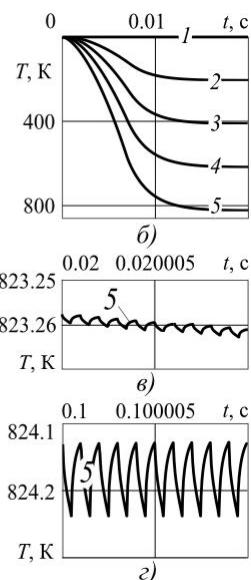


Рис. 5. Графики температуры $T(x,t)$ на разных глубинах по толщине покрытия и на различных временных интервалах



В дальнейшем (рис. 6) можно видеть экспоненциальное развитие амплитуды колебаний графика $T(h, t)$, достигающей десятков градусов, что свидетельствует о потере физического смысла для $x = h$ при $t > 0,18$ с, для $x = 0,75h$ – при $t > 0,82$ с, для $x = 0,5h$ – при $t > 1,42$ с, для $x = 0,25h$ – при $t > 2,05$ с. Такая зависимость нарушения физического смысла оказалась свойственной только температуре, определяемой из параболического дифференциального уравнения.

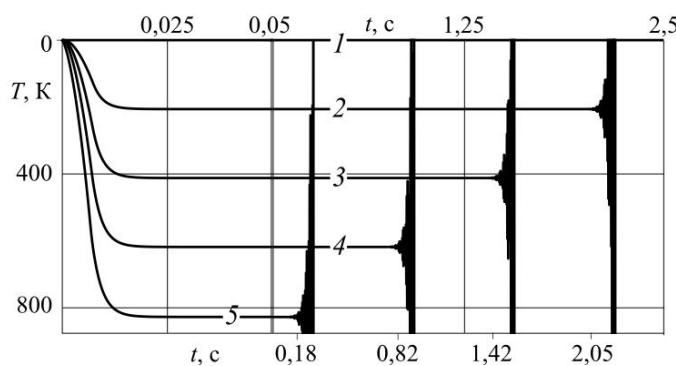


Рис. 6. Температура $T(x,t)$ на разных глубинах по толщине покрытия с указанием времени потери физического смысла

Выводы. Термоупругодинамическая неустойчивость скользящего фрикционного контакта при движении жесткой полуплоскости по упругому покрытию на жестком основании наступает при любой скорости движения полуплоскости. Неустойчивость решения рассмотренной задачи о скользящем фрикционном контакте заключается в том, что, начиная с некоторого момента времени, полученное решение теряет физический смысл – амплитуда собственных колебаний неограниченно возрастает по времени. Следует заметить, что решение задачи для смещений и напряжений теряет физический смысл раньше, чем решение для температуры, что может быть существенным моментом при разработке методов диагностики возникновения термоупругодинамической неустойчивости скользящего контакта.

Библиографический список

1. Barber, J. R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids / J. R. Barber // Proceedings of the Royal Society A. — 1969. — Т. 312. — С. 381–394.
2. Dow, T. A., Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear / T. A. Dow, R. A. Burton // Wear. — 1972. — Т. 19. — С. 315–328.
3. Burton, R. A. Thermoelastic instability in a seal-like configuration / R. A. Burton, V. Nerlikar, S. R. Kilaparti // Wear. — 1973. — Т. 24. — С. 177–188.
4. Barber, J. R. Stability considerations in thermoelastic contact / J. R. Barber, J. Dundurs, M. Comninou // Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics. — 1980. — Т. 47, вып. 4. — С. 871–874.
5. Afferrante, L. Sliding thermoelastodynamic instability / L. Afferrante, M. Ciavarella, J. R. Barber // Proceedings of the Royal Society A. — 2006. — Т. 462. — С. 2161–2176.
6. Моров, В. Н. Термоупругая неустойчивость фрикционного контакта штампов с полупространством / В. Н. Моров, И. Н. Черский // Трение и износ. — 1985. — Т. 6, № 1. — С. 27–38.
7. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability / M. Ciavarella [и др.] // International Journal of Solids and Structures. — 2003. — Т. 40, вып. 21. — С. 5583–5597.
8. Moirot, F. Brake squeal: a problem of flutter instability of the steady sliding solution / F. Moirot, Q. S. Nguyen // Archives of Mechanics. — 2006. — Т. 52. — С. 645–662.
9. Kinkaid, N. M. Automotive disk brake squeal / N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, P. Papadopoulos // Journal of Sound and Vibration. — 2003. — Т. 267. — С. 105–166.
10. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — Москва : Наука, 1979. — 979 с.
11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1977. — 735 с.

12. Новацкий, В. Вопросы термоупругости : пер. с польского / В. Новацкий. — Москва : Изд-во АН СССР, 1962. — 363 с.
13. Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционные исчисления / В. А. Диткин, А. П. Прудников. — Москва : Физматлит, 1961. — 524 с.
14. Функциональный анализ / Н. Я. Виленкин [и др.]. — Москва : Физматлит, 1961. — 524 с.
15. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Москва : Наука, 1965. — Т. 1. — 296 с.
16. Брычков, Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. — Москва : Наука, 1977. — 288 с.
17. Гурвиц, А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. — Москва : Наука, 1968. — 648 с.
18. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — Москва : Наука, 1980. — 464 с.
19. Бриллинджер, Д. Временные ряды / Д. Бриллинджер. — Москва : Мир, 1980. — 536 с.

Материал поступил в редакцию 20.11.2014.

References

1. Barber, J. R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proceedings of the Royal Society A*. 1969, vol. 312, pp. 381–394.
2. Dow, T. A., Burton, R. A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear*, 1972, vol. 19, pp. 315–328.
3. Burton, R. A., Nerlikar, V., Kilaparti, S. R. Thermoelastic instability in a seal-like configuration. *Wear*, 1973, vol. 24, pp. 177–188.
4. Barber, J. R., Dundurs, J., Comninou, M. Stability considerations in thermoelastic contact. *Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1980, vol. 47, iss. 4, pp. 871–874.
5. Afferrante, L., Ciavarella, M., Barber, J. R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proceedings of the Royal Society A*. 2006, vol. 462, pp. 2161–2176.
6. Morov, V. A., Cherskiy, I. N. Termouprugaya neustoychivost' friktsionnogo kontakta shtampov s poluprostranstvom. [Thermoelastic instability of stamp friction contact with a halfspace.] *Friction and Wear*, 1985, vol. 6, no. 1, pp. 18–27 (in Russian).
7. Ciavarella, M., Johansson, L., Afferrante, L., Klarbring, A., Barber, J. R. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, iss. 21, pp. 5583–5597.
8. Moirot, F., Nguyen, Q. S. Brake squeal: a problem of flutter instability of the steady sliding solution. *Archives of Mechanics*, 2000, vol. 52, pp. 645–662.
9. Kinkaid, N. M., O'Reilly, O. M., Papadopoulos, P. Automotive disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 267, pp. 105–166.
10. Lourie, A. I. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity.] Moscow : Nauka, 1979, 979 p. (in Russian).
11. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. Equations of Mathematical Physics. Dover Books on Physics, 2011, 800 p.
12. Nowacki, W. Thermoelasticity. Addison-Wesley Publishing Company, 1962. 628 p.
13. Ditzkin, V. A., Prudnikov, A. P. Integralnye preobrazovaniya i operacionnye ischisleniya [Integral transforms and operational calculus.] Moscow : Fizmatlit, 1961, 524 p. (in Russian).
14. Vilenkin, N. Y., Flaherty, R. E. Functional Analysis. Wolters-Noordhoff B. V., 1972, 394 p.
15. Bateman, H., Erdelyi, A. Higher transcendental functions. Vol. 1. New York : McGraw-Hill, 1953.
16. Brychkov, Y. A., Prudnikov, A. P. Integral Transforms of Generalized Functions. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1989, 343 p.

17. Hurwitz, A., Courant, P. Teoriya funkciy. [The Theory of Functions.] Moscow : Nauka, 1968, 648 p. (in Russian).
18. Titchmarsh, E. C. The Theory of Functions (2nd edition). New York : Oxford University Press, 1976, 464 p.
19. Brillinger, D. R. Time series: Data analysis and theory. New York : Holt, Rinehart & Winston, 1975.

THERMOELASTODYNAMIC INSTABILITY OF CONTACT PROBLEM SOLUTION FOR COATING CONSIDERING FRICTIONAL HEAT GENERATION*

V. B. Zelentsov, B. I. Mitrin, S. S. Volkov, A. S. Vasilyev

A one-dimensional thermoelastic contact problem on the vertical insertion of a rigid half-plane moving horizontally at a constant speed over the elastic coating (strip) while the bottom side of the latter rigidly resting on the non-deforming foundation is considered. On the foundation surface, the temperature is kept constant. A heat flow generated by the frictional contact is directed to the coating. The problem solution is obtained using the Laplace integral transform and is represented in the form of contour integrals. The location of the solution integrand poles is studied at various task options. Temperature, displacement, and stress distributions over the coating depth are derived in the form of the infinite series over eigenfunctions. It is shown that the thermoelastodynamic instability of the obtained solutions is present across the whole time interval and at any velocity of the half-plane sliding over the coating surface.

Keywords: thermoelastodynamic instability, coupled thermoelasticity problem, frictional contact, coating.

* The research is done with the financial support from RFFI grants nos. 14-08-91166-GFEN_a, 14-07-00271-a, and 14-07-00705-a.