

Замечания к бразильскому методу исследования прочности хрупких материалов на растяжение***В. Я. Молотников, А. А. Молотникова**

Рассматривается плоская деформация кругового цилиндра при различных системах статически эквивалентных нагрузок. Нагружение осуществляется симметричными относительно диаметральной плоскости нагрузками постоянной интенсивности, приложенными к боковой поверхности цилиндра. Анализируется три варианта нагружения: диаметральные силы вдоль двух образующих (базовое решение Герца), равномерные нормальные нагрузки и равномерные параллельные силы. Приведено сравнение эквивалентных напряжений, вычисленных по теории прочности Мора, с величиной растягивающих напряжений базового решения в плоскости разрушения. На основе этого сравнения обсуждается вопрос о правомерности отождествления нормального напряжения в диаметральной плоскости при разрушении образца и предела прочности его материала на растяжение. Доказано, что нормальное напряжение в диаметральной плоскости раздавливания образца в бразильском методе испытания не является пределом прочности материала на растяжение и для некоторых хрупких тел может быть в несколько раз меньше указанного предела прочности.

Ключевые слова: напряжение, предел прочности, бразильский метод, плоская задача, комплексные потенциалы, хрупкие тела, механические испытания.

Введение. Выполнение прямых испытаний на одноосное растяжение неметаллических хрупких материалов связано с технической проблемой приложения к образцу растягивающих осевых сил. Эту проблему решает заделка концов образца в специальных наконечниках посредством эпоксидных [1] или иных клеевых материалов, сплавом Вуда [2] и др. Оборудование образцов такого рода устройствами значительно удорожает опыты и фактически исключает их массовое и сколько-нибудь оперативное исполнение.

По этой причине в материаловедении и производстве (строительстве, горном деле и др.) широкое применение получил косвенный метод определения показателя сопротивления материала растяжению, предложенный в 1947 г. бразильским инженером Ф. Карнейро [3]. Метод заключается в том, что прочность материала на растяжение определяется из испытания цилиндрического образца на сжатие в диаметральной плоскости равномерно распределенной вдоль образующей нагрузкой, передаваемой ребром треугольной призмы. Такие испытания в научных публикациях получили наименование бразильского теста или бразильского метода. В нормативных документах (ГОСТах, ведомственных инструкциях и т. п.) бразильский тест часто называют также «методом раскалывания». В настоящей работе на основе решения соответствующих задач теории упругости анализируются различные варианты реализации испытаний бразильским методом, регламентированные ГОСТами и другими нормативными документами.

Основная часть.

1. Базовый вариант испытаний. Стандартами по испытанию образцов углеродных материалов [4], бетонов [5] и некоторых других материалов определено диаметрально сжатие цилиндрического образца по схеме, проиллюстрированной на рис. 1, а. Считая материал образца упругим вплоть до разрушения, имеем при данной схеме задачу о плоской деформации цилиндра, нагруженного двумя диаметрально противоположными силами P . Известно [6], что решение этой задачи получено Герцем (Н. Hertz) ещё в 1883 г. Комплексные потенциалы [6] $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ Мусхелишвили, представляющие решение данной задачи, запишем в виде:

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

$$\Phi(\zeta) = -\frac{p}{2\pi R} \left(\frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta} - 1 \right), \quad (1)$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{p}{2\pi R} \left(\frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta} + \frac{1}{(1-\zeta)^2} + \frac{1}{(1+\zeta)^2} \right)^*,$$

где p — сжимающая сила, приходящаяся на единицу длины образующей цилиндра; $R = d/2$ — радиус образца; ζ — аффикс произвольной точки внутри единичного круга, причём силы P приложены в точках $\zeta = \pm 1$ контура этого круга. При известных функциях $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ компоненты (X_x, Y_y, X_y) тензора напряжений вычисляются с помощью формул [6]:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad (2)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)],$$

где i — мнимая единица; Re — функция выделения действительной части её аргумента; черта сверху означает комплексно сопряжённую величину, а символом «штрих» отмечена операция дифференцирования функции Φ по её аргументу ζ .

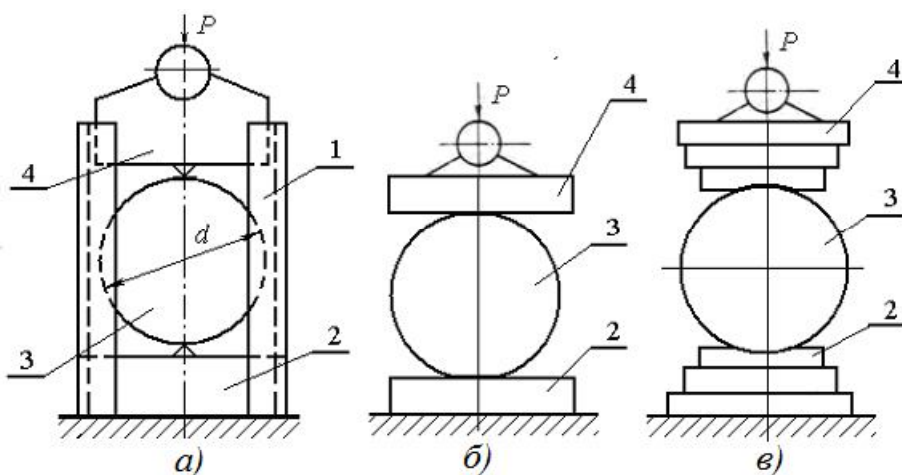


Рис. 1. Способы приложения нагрузки в опытах по бразильскому методу:
 а — начальный контакт по линии; б — начальный контакт по прямоугольной площадке; в — контакт по цилиндрической поверхности; 1 — направляющие; 2 — нижняя опорная плита; 3 — образец; 4 — верхняя нагрузочная плита

На рис. 2, а-г построены эпюры нормальных напряжений $\tilde{Y}_y(\zeta) = Y_y(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{p}$, $\tilde{X}_x(\zeta) = X_x(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{p}$,

полученные по формулам (1)–(2). Как видно из указанных рисунков, компонента нормального напряжения $\tilde{Y}_y(\zeta)$ во всех точках диаметральной плоскости, содержащей внешние нагрузки, остается постоянной за исключением чрезвычайно малой окрестности точек $\zeta = \pm 1$. Наличие сингулярности в точках $\zeta = \pm 1$ вытекает из формул (1). В малости указанной окрестности точек $\zeta = \pm 1$ можно убедиться непосредственными расчетами. Например, $\tilde{Y}_y(\pm 0,999999) = 2,005$, а $\tilde{Y}_y(\pm 0,9999999) = -55,564$. Наличие отмеченной

* В формуле для функции $\Psi_1(z)$ на с. 298 работы [6], использованной для получения формул (1), есть опечатка: перед третьим слагаемым в скобках должен быть знак «+».

сингулярности условно изображено на графиках функции $\tilde{Y}_y(\zeta)$ кружками, построенными в диаметрально противоположных точках $\zeta = \pm 1$, (рис. 2, 5).

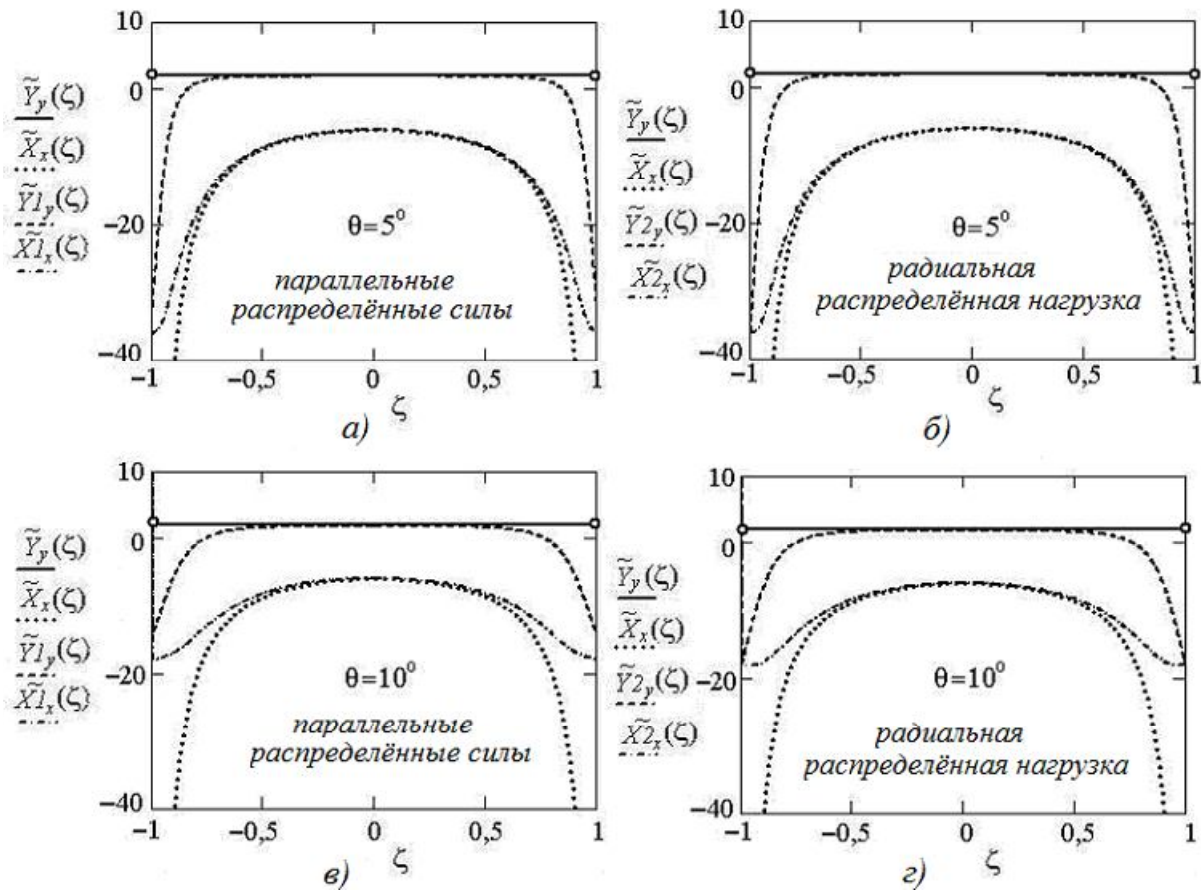


Рис. 2. Эпюры нормальных напряжений в вертикальной плоскости образца

2. Образцы с лысками. В инструкции по инженерным изысканиям в горных выработках [7] при подготовке кернов к испытаниям бразильским методом предписано вдоль двух диаметрально противоположных образующих выполнить на плоской шлифовальной план-шайбе две лыски шириной 3...5 мм.

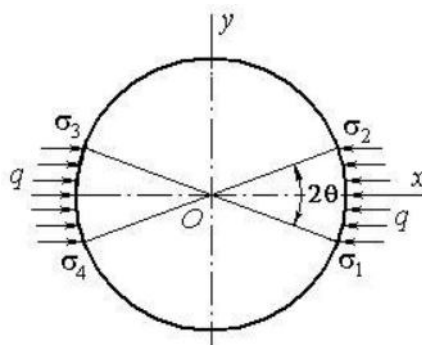


Рис. 3. Расчётная схема образца с лысками

После такой подготовки реализуется схема нагружения образца, изображённая на рис. 1, б. Таким образом, в этом варианте нагружения приходим к первой основной задаче теории упругости для круга, нагруженного по симметричным дугам $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_3\sigma_4$ системой параллельных равномерно распределённых нагрузок q , (рис. 3).

Из условия статической эквивалентности нагрузок в каждом из вариантов нагружения для рассматриваемого случая параллельных сил имеем:

$$q = \frac{P}{2R\theta}, \quad (3)$$

где 2θ — угол, стягиваемый дугой $\sigma_1\sigma_2$, (рис. 3). Ввиду малой ширины лысок мы можем пренебречь изменением формы поперечного сечения образца в результате удаления материала в местах выполнения лысок и заменить хорды, ограничивающие лыски, дугами $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_3\sigma_4$.

Будем использовать общее решение первой основной задачи теории упругости для круга, представленное формулами [6]:

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(N + iT)d\sigma}{\sigma - \zeta} - a_0, \quad (4)$$

$$\Psi_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i \zeta^2} \int_{\gamma} \frac{(N - iT)d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{\Phi_1'(\zeta)}{\zeta} + \frac{\Phi_1(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{a_0}{\zeta^2},$$

где постоянная a_0 определяется формулой

$$a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} (N - iT) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (5)$$

N и T — соответственно нормальное и касательное усилия на контуре γ единичного круга, σ — произвольная точка на окружности γ , а ζ — любая точка, лежащая внутри γ . В нашем случае получаем:

$$N = \begin{cases} -q \cos \phi & \text{на } \sigma_1\sigma_2, \\ 0 & \text{на } \sigma_2\sigma_3, \\ q \cos \phi & \text{на } \sigma_3\sigma_4, \\ 0 & \text{на } \sigma_4\sigma_1; \end{cases} \quad T = \begin{cases} q \sin \phi & \text{на } \sigma_1\sigma_2, \\ 0 & \text{на } \sigma_2\sigma_3, \\ -q \sin \phi & \text{на } \sigma_3\sigma_4, \\ 0 & \text{на } \sigma_4\sigma_1. \end{cases}$$

где ϕ — полярный угол, отсчитываемый от положительной полуоси Ox в направлении, противоположном вращению часовой стрелки.

Используя последние результаты и имея в виду, что

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi} = \sigma, \quad \sigma_1 = e^{-i\theta}, \quad \sigma_2 = e^{i\theta}, \quad \sigma_3 = e^{i(\pi-\theta)}, \quad \sigma_4 = e^{i(\pi+\theta)},$$

можем записать

$$N + iT = \begin{cases} -\frac{q}{\sigma} & \text{на } \sigma_1\sigma_2, \\ 0 & \text{на } \sigma_2\sigma_3 \text{ и } \sigma_4\sigma_1, \\ \frac{q}{\sigma} & \text{на } \sigma_3\sigma_4. \end{cases} \quad (6)$$

Переходя в формуле (6) к сопряжённым значениям, получим:

$$N - iT = \begin{cases} -q\sigma & \text{на } \sigma_1\sigma_2, \\ 0 & \text{на } \sigma_2\sigma_3 \text{ и } \sigma_4\sigma_1, \\ q\sigma & \text{на } \sigma_3\sigma_4. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя выражения (6), (7) в формулы (4) и (5), найдём после вычисления интегралов:

$$a_0 = -\frac{q \sin \theta}{\pi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= -\frac{q}{2\pi i \zeta} \ln \frac{(\sigma_1 + \zeta)(\sigma_2 - \zeta)}{(\sigma_1 - \zeta)(\sigma_2 + \zeta)} + \frac{q \sin \theta}{\pi}, \\ \Psi_1(\zeta) &= -\frac{q}{2\pi i \zeta^2} \left[2(\sigma_1 - \sigma_2) + \zeta \ln \frac{(\sigma_1 - \zeta)(\sigma_2 + \zeta)}{(\sigma_1 + \zeta)(\sigma_2 - \zeta)} - \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)(1 + \zeta^2)}{(\sigma_1^2 - \zeta^2)(\sigma_2^2 - \zeta^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\zeta} \ln \frac{(\sigma_1 + \zeta)(\sigma_2 - \zeta)}{(\sigma_1 - \zeta)(\sigma_2 + \zeta)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Эпюры нормальных напряжений, полученные исходя из формул (9), (2), построены на рис. 2, *а-в* где соответствующие безразмерные напряжения имеют обозначения $\tilde{Y}_{1_y}(\zeta) = Y_{1_y}(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{\rho}$, $\tilde{X}_{1_x}(\zeta) = X_{1_x}(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{\rho}$, причём $Y_{1_y}(\zeta)$, $X_{1_x}(\zeta)$ — напряжения, определяемые функциями (9) при интенсивности равномерной нагрузки, заданной формулой (3). На рис. 2, *а* эпюры просчитаны при $\theta = 5^\circ$, а на рис. 2, *в* — при $\theta = 10^\circ$.

3. Радиальная распределённая нагрузка. Нагружение испытываемого образца способом [8], изображённым на рис. 1, *в*, приводит к расчётной схеме, показанной на рис. 4.

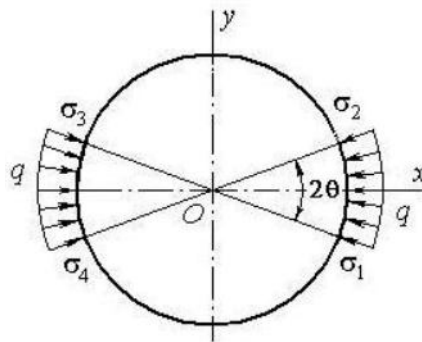


Рис. 4. Радиальная равномерная осесимметричная нагрузка

Легко установить, что для данной задачи

$$N + iT = N - iT = \begin{cases} -q & \text{на } \sigma_1\sigma_2 \text{ и } \sigma_3\sigma_4, \\ 0 & \text{на } \sigma_2\sigma_3 \text{ и } \sigma_4\sigma_1, \end{cases} \quad (10)$$

причём из условия статической эквивалентности нагрузок для рассматриваемого варианта нагружения образца следует положить

$$q = \frac{\rho}{2R \sin \theta}. \quad (11)$$

Подставляя функцию (10) в формулы (4)–(5) и вычисляя соответствующие интегралы типа Коши, получим функции Мусхелишвили для круга, нагруженного осесимметричной равномерной нагрузкой на дугах $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_3\sigma_4$:

$$\begin{aligned}\Phi_2(\zeta) &= -\frac{q}{2\pi i} \ln \frac{\sigma_2^2 - \zeta^2}{\sigma_1^2 - \zeta^2} + \frac{q\theta}{\pi}, \\ \Psi_2(\zeta) &= -\frac{q}{2\pi i} \cdot \frac{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{(\sigma_1^2 - \zeta^2)(\sigma_2^2 - \zeta^2)}.\end{aligned}\quad (12)$$

Эпюры нормальных напряжений $\tilde{Y}2_\gamma(\zeta) = Y2_\gamma(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{\rho}$, $\tilde{X}2_x(\zeta) = X2_x(\zeta) \cdot \frac{\pi d}{\rho}$, где $Y2_\gamma(\zeta)$, $X2_x(\zeta)$ определены по формулам (2) при Φ , Ψ представленных формулами (12), построены на рис. 2 б, г при значениях θ , указанных на рисунке.

4. Обсуждение полученных результатов. Сравнивая между собой эпюры напряжений, приведённые на рис. 2, усматриваем, что существенное различие в распределении напряжений обнаруживается лишь вблизи зон приложения нагрузок. Этот результат вполне ожидаем, поскольку он является наглядной демонстрацией справедливости принципа Сен-Венана [9]: статически эквивалентные нагрузки, распределённые различным образом в относительно малой области тела, вызывают эффекты, незначительно отличающиеся при удалении от нагруженной области на расстояние порядка наибольшего размера этой области.

Из анализа рис. 2 также вытекает, что существенным свойством поля нормальных напряжений в плоскости $y = 0$ при распределённой нагрузке является не только количественное его отличие от распределения напряжений, вызванных статически эквивалентными сосредоточенными силами, но и различие в знаках этих напряжений.

Далее, вычисляя компоненту напряжения Z_z при плоской деформации, получим:

$$Z_z = \mu(X_x + Y_y), \quad (13)$$

где μ — коэффициент Пуассона, можно убедиться в том, что вблизи зоны приложения распределённой нагрузки имеет место всестороннее сжатие, и разрушение образца не может начаться с поверхностного слоя.

Для доказательства построим эпюры эквивалентных напряжений ($\sigma_{\text{экв}}^V$) по теории прочности Мора (пятой теории прочности):

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3, \quad \left(m = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}\right), \quad (14)$$

причём σ_p, σ_c — пределы прочности материала на растяжение и сжатие соответственно. При вычислении компоненты Z_z по формуле (13) и эквивалентного напряжения (14) используем данные по механическим свойствам горных пород, заимствованные из справочника [10]. Ради обзорности эти данные выделены в табл. 1.

Эпюры эквивалентных напряжений приведены на рис. 5. При их построении использованы встроенные функции $\max(V)$, $\min(V)$ системы Mathcad, с помощью которых из компонент вектора V , представляющих собой главные напряжения в точках оси Ox , (рис. 3), выбирались наибольшее (σ_1) и наименьшее (σ_3) главные напряжения. Заметим, что при $\zeta \in (-1, A)$ и $\zeta \in (B, 1)$, (рис. 5), главное напряжение σ_1 совпадает с осевой компонентой Z_z , а на отрезке AB в качестве наибольшего глав-

ного напряжения выступает компонента $Y_{1y}(\zeta)$. Прямая 1 на рис. 5 соответствует значению компоненты Y_y базового варианта нагружения.

Таблица 1

Механические свойства образцов горных пород

Название породы	Месторождение	Коэффициент Пуассона, (μ)	Предел прочности при растяжении, (σ_p)	Предел прочности при сжатии, (σ_c)
			МПа	
Песчаник	Гуковско-Зверевский угленосный район, (Ростовская обл.)	0,25	8	118
Кварцит	Бакальское месторождение (Южный Урал)	0,18	14,5	219
Кварц и полевой шпат	Каджаранское молибденовое месторождение (Армения)	0,2	12	40

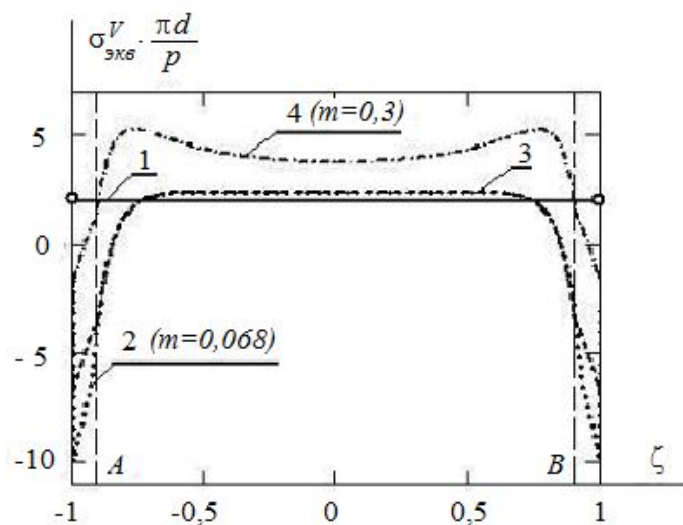


Рис. 5. Эпюры эквивалентных напряжений по пятой теории прочности (Мора):

1– базовый вариант бразильского теста; 2– песчаники;
3– кварциты; 4– кварц и полевой шпат

Как видно из рисунка, положительные значения эквивалентных напряжений во всех случаях превосходят величину растягивающего напряжения в диаметральной плоскости, содержащей силы P . Указанное отклонение возрастает с увеличением параметра m , и для материалов с отношением пределов текучести при растяжении и сжатии от 0,3 и более наибольшее значение эквивалентного напряжения может превосходить напряжение отрыва в базовом варианте в несколько раз. Это означает, что принятие напряжения отрыва Y_y базового варианта бразильского теста за предел прочно-

сти материала при растяжении идёт в запас прочности. Однако этот запас может оказаться чрезмерным, что не всегда оправдано.

Выводы. Выполненное исследование позволяет утверждать следующее:

1. Нормальное напряжение в диаметральной плоскости раздавливания образца в бразильском методе испытания не является пределом прочности материала на растяжение и для некоторых хрупких тел может быть в несколько раз меньше указанного предела прочности.
2. Несмотря на прочно укоренившееся отождествление указанного напряжения отрыва и предела прочности на растяжение целесообразно (по крайней мере в учебной литературе) подчёркивать не идентичность этих двух характеристик прочности материала.
3. Способ приложения нагрузки при раздавливании образца не имеет существенного влияния на величину нормального напряжения отрыва в момент разрушения.
4. Для прочных скальных пород с малым значением параметра m , напряжение отрыва в плоскости разрушения практически совпадает с эквивалентным напряжением по Мору, поэтому его значение может быть принято за предел прочности на растяжение.
5. Приведенное исследование нужно рассматривать как первый этап исследований. Более корректным является анализ напряженного состояния образца из решения соответствующей контактной (упруго-пластической) задачи. Полученные результаты могут быть использованы при решении такой задачи одним из методов последовательных приближений (например, методом переменных параметров упругости Биргера [11]).

Библиографический список

1. Молотников, В. Я. Методы моделирования в земледельческой механике : дис. на соиск. уч. ст. д-ра физ.-матем. наук / В. Я. Молотников. — Персиановка, 1994. — 291 с.
2. Спивак, А. И. Разрушение горных пород при бурении скважин / А. И. Спивак, А. Н. Попов. — Москва : Недра, 1986. — 208 с.
3. Rodriguez, T., Navarro, C., Sanchez-Galvez, V. Splitting tests: an alternative to determine the dynamic tensile strength of ceramic materials. *Journal de Physique*. 1994, vol. IV, pp. 101–106.
4. Изделия углеродные. Методы определения предела прочности на сжатие, изгиб, разрыв (диаметральное сжатие) : ГОСТ 23775–79 / Межгосударственный стандарт. — Москва : ИПК Издательство стандартов, 2001. — 8 с.
5. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам: ГОСТ 10180–90 / Межгосударственный стандарт. — Москва : Стандартинформ, 2006. — 32 с.
- Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. — Москва : Наука, 1966. — 708 с.
6. Инструкция по инженерным изысканиям в горных выработках, предназначенных для размещения объектов народного хозяйства: СН 484–76/ Госстрой СССР. — Москва : Госстрой СССР, 1977. — 34 с.
7. Изделия химически стойкие и термостойкие керамические. Метод определения предела прочности при разрыве : ГОСТ 473.7–81 / Межгосударственный стандарт. — Москва : Стандартинформ, 1981. — 14 с.
8. Молотников, В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / В. Я. Молотников. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 544 с.
9. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / под ред. Н. Мельникова. — Москва : Недра, 1975. — 279 с.
10. Биргер, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. — Москва : Наука, 1986. — 561 с.

Материал поступил в редакцию 11.10.2014.

References

1. Molotnikov, V. Y. Metody modelirovaniya v zemledelcheskoy mekhanike. [Simulation techniques in the agricultural mechanics: Dr.phys.-math.sci.diss.] Persianovka, 2003, 291 p. (in Russian).
2. Spivak, A. I., Popov, A. N. Razrushenie gornyx porod pri burenii skvazhin. [Destruction of rocks at drilling chinks]. Moscow, Nedra, 1986, 208 p. (in Russian).
3. Rodriguez, T., Navarro, C., Sanchez-Galvez, V. Splitting tests: an alternative to determine the dynamic tensile strength of ceramic materials. Journal de Physique, 1994, vol. IV, pp. 101–106.
4. Interstate Standard 23775–79. [Carbon products. Methods of determination of strength in compression, bending, breaking (diametrical compression)]. Moscow, IPK Izdatelstvo standartov, 2001, 8 p. (in Russian).
5. Interstate Standard 10180–90. [Concrete. Methods of determination of strength on control samples]. Moscow, Standartinform, 2006, 32 p. (in Russian).
6. Muskhelishvili, N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some primary goals of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 708 p. (in Russian).
7. Building regulation CH 484–76. [Instruction on engineering surveys in mine openings intended for allocation of the national economic assets.] Moscow, USSR Gosstroy, 1977, 34 p. (in Russian).
8. Interstate Standard 473.7–81. [Chemically-resistant and heat-resistant ceramic products. A method of determination of strength in breaking]. Moscow, Standartinform, 1981, 14 p. (in Russian).
9. Molotnikov, V. Y. Mekhanika konstruksiy. Teoreticheskaya mekhanika. Soprotivlenie materialov [Structural mechanics. Theoretical mechanics. Resistance of materials.] St. Petersburg, Lan', 2012, 544 p. (in Russian).
10. Spravochnik (kadastr) fizicheskikh svoystv gornyx porod [Reference book (cadaster) of physical properties of rocks]. Moscow, Nedra, 1975, 279 p. (in Russian).
11. Birger, I. A., Mavlyutov, R. R. Soprotivlenie materialov. [Resistance of materials]. Moscow, Nauka, 1986, 561 p. (in Russian).

REMARKS ON THE BRAZILIAN RESEARCH TECHNIQUE FOR BRITTLE TENSION STRENGTH*

V. Y. Molotnikov, A. A. Molotnikova

A plane deformation of a circular cylinder under different systems of statically equivalent loads is considered. The loading is done by the symmetrical constant-rate loads with respect to the centerline; the loads are applied to the cylinder side. Three load cases are analyzed: diametric forces along two generators (Hertz basic feasible solution), uniform normal loads, and uniform parallel forces. The comparison of equivalent stresses based on Mohr theory of strength with the tension intensity of the basic feasible solution in the failure plane is presented. Based on this comparison, the appropriateness of identifying the normal stress in the diametric plane under the specimen fracture, and of its tension stress limit is discussed. It is proved that the normal stress in the diametric plane of crushing the specimen in the Brazilian test technique is not a material tension limit; and it may be several times less than the specified stress limit for some brittle solids.

Keywords: stress, stress limit, Brazilian technique, plane problem, complex potentials, brittle solids, mechanical testing.

* The research is done within the frame of the independent R&D.