

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием¹

А. С. Васильев, Е. В. Садырин

(Донской государственный технический университет),

И. А. Федотов

(Технологический университет Тшване, Претория, ЮАР)

Рассмотрена осесимметричная контактная задача теории упругости о кручении круговым штампом трансверсально-изотропного полупространства с неоднородным покрытием. С помощью техники интегральных преобразований решение задачи сведено к решению интегрального уравнения. Построено явное выражение трансформанты ядра интегрального уравнения для однородного трансверсально-изотропного покрытия. Предложена схема численного построения трансформанты ядра в случае произвольного закона изменения модуля сдвига по глубине покрытия. Используя аппроксимацию трансформанты ядра некоторыми специальными функциями, построено двухсторонне асимптотически точное приближённое аналитическое решение задачи. Проанализирован частный случай изменения модулей сдвига в трансверсально-изотропном покрытии, позволяющий построить явное замкнутое решение задачи. Численно исследуется модельная задача о кручении биоматериала. Считается, что покрытие представляет собой хрящевую ткань, а свойства подложки соответствуют кортикальной кости.

Ключевые слова: контактные задачи, теория упругости, кручение, неоднородность, анизотропия.

Введение. Первые работы по моделированию задачи о кручении упругого полупространства круглым штампом относятся к середине прошлого века. Задача о кручении однородного упругого полупространства круглым штампом впервые была сформулирована и решена в динамической постановке Рейснером и Сагочи [1]. В работе Снеддона [2] данная задача, с использованием техники интегральных преобразований, сведена к решению интегрального уравнения.

Грилицкий В. Д. [3] построил решение задачи о кручении круглым штампом изотропной двухслойной среды и ортотропного упругого слоя в виде ряда по степеням δ^{-1} , где δ — отношение толщины первого слоя к радиусу штампа. Kassir M. K. [4] построил решение задачи о кручении неоднородного изотропного полупространства в случае степенного изменения модуля сдвига по глубине. Решение задачи для изотропного полупространства с неоднородным покрытием при произвольном законе изменения модуля сдвига по глубине получено Айзиковичем С. М. [5]. Ergiven M. E. рассмотрел задачу о кручении трансверсально-изотропного упругого полупространства с однородным покрытием [6].

Задача активно изучается по настоящее время, в частности, Wang Y.-S. использовал кусочно-линейную аппроксимацию трансформанты ядра для сведения задачи к решению интегрального уравнения [7]. В работе [8] решена задача о кручении трансверсально-изотропного пьезоэлектрического однородного полупространства.

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (ГК № 11.519.11.3028, соглашения №14.B37.21.1632, 14.B37.21.1131, 14.132.21.1693) и РФФИ (12-07-00639_a).

В настоящей работе построено решение контактной задачи о кручении трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием при произвольном изменении упругих свойств по глубине покрытия.

Изменение механических свойств по одной из координат и анизотропия упругих свойств характерны для многих тел, как в природе, так и в технике. В технике неоднородность и анизотропия связаны с условиями создания и эксплуатации деталей машин. Большинство биологических объектов являются неоднородными и анизотропными, что свидетельствует об актуальности построения математических моделей, учитывающих одновременно и неоднородность, и анизотропию.

Постановка задачи. Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием жёстко сцеплен с верхней гранью Γ упругого неоднородного трансверсально-изотропного полупространства Ω . С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z . Штамп контактирует с полупространством по поверхности $z = 0, r \leq a$.

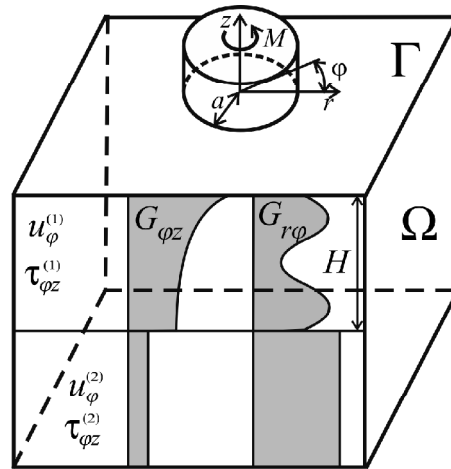


Рис. 1. Задача о кручении

К штампу приложен крутящий момент M , ось которого совпадает с осью z (рис. 1). Под действием этого момента штамп повернётся относительно оси z на угол ε , вызвав деформацию кручения Ω . Модули сдвига $G_{r\varphi}, G_{\varphi z}$ полупространства с глубиной изменяются по законам:

$$G_{r\varphi} = \begin{cases} f_{r\varphi}(z) & -H < z \leq 0 \\ \beta_1 \cdot f_{r\varphi}(-H) & -\infty < z \leq -H, \end{cases} \quad G_{\varphi z} = \begin{cases} f_{\varphi z}(z) & -H < z \leq 0 \\ \beta_2 \cdot f_{\varphi z}(-H) & -\infty < z \leq -H, \end{cases} \quad (1)$$

где $f_{r\varphi}, f_{\varphi z}$ — некоторые функции, определяющие закон изменения модулей сдвига в покрытии, причём $f_{r\varphi}$ — непрерывная, а $f_{\varphi z}$ — непрерывно дифференцируемая; параметры β_1, β_2 задают скачок упругих свойств на границе покрытие-подложка.

Вне штампа поверхность Γ не нагружена. При сделанных предположениях граничные условия задачи имеют вид:

$$z = 0: \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \begin{cases} \tau_{\varphi z} = 0, & r > a \\ u_\varphi = r\varepsilon, & r \leq a. \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая, что слой подвержен лишь деформации скручивания, ненулевым является лишь смещение вдоль оси φ :

$$u_z = u_r = 0, \quad u_\varphi = u(r, z).$$

Напряжения, в соответствии с законом Гука, примут вид:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = G_{\varphi z}(z) \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \tau_{r\varphi} = G_{r\varphi}(z) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \quad (3)$$

Введём обозначения:

$$\tau_{\varphi z} = \begin{cases} \tau_{\varphi z}^{(1)}, & -H < z \leq 0 \\ \tau_{\varphi z}^{(2)}, & z \leq -H, \end{cases} \quad u_{\varphi} = \begin{cases} u_{\varphi}^{(1)}, & -H < z \leq 0 \\ u_{\varphi}^{(2)}, & z \leq -H. \end{cases}$$

При $r \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$ напряжения исчезают. Считаем, что перемещения и напряжения сопрягаются на границе изменения закона неоднородности:

$$z = -H: \tau_{\varphi z}^{(1)} = \tau_{\varphi z}^{(2)}, \quad u_{\varphi}^{(1)} = u_{\varphi}^{(2)}. \quad (4)$$

Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом

$$\tau_{\varphi z} \big|_{z=0} = \tau_a(r), \quad r \leq a.$$

Сведение задачи к решению интегрального уравнения. Уравнения равновесия при данной постановке принимают вид:

$$G_{r\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} u_{\varphi}^{(1)} \right) + \frac{dG_{\varphi z}}{dz} \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial z} + G_{\varphi z} \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad -H < z \leq 0, \quad (5)$$

$$G_{r\varphi}(-H) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} u_{\varphi}^{(2)} \right) + G_{\varphi z}(-H) \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad z \leq -H. \quad (6)$$

Для сведения задачи к решению интегрального уравнения используем интегральное преобразование Ханкеля:

$$u_{\varphi}^{(j)}(r, z) = \int_0^{\infty} U_j(\gamma, z) J_1(r\gamma) \gamma d\gamma, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Обозначим

$$\kappa(z) = \frac{G_{r\varphi}(z)}{G_{\varphi z}(z)}, \quad \nu(z) = \frac{G'_{\varphi z}(z)}{G_{\varphi z}(z)}. \quad (8)$$

Подставив (7), (8) в (5) и (6), и приравнявая к нулю в полученных соотношениях подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U_j(\gamma, z)$, $j = 1, 2$:

$$U_1''(\gamma, z) + \nu(z) U_1'(\gamma, z) - \gamma^2 \kappa(z) U_1(\gamma, z) = 0, \quad -H < z \leq 0, \quad (9)$$

$$U_2''(\gamma, z) - \gamma^2 \kappa(-H) U_2(\gamma, z) = 0, \quad -\infty < z \leq -H. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$U_2(\gamma, z) = B_1(\gamma) e^{\gamma z \sqrt{\kappa(-H)}} + B_2(\gamma) e^{-\gamma z \sqrt{\kappa(-H)}}.$$

Из условия ограниченности перемещений при $z \rightarrow -\infty$ имеем $B_2(\gamma) = 0$, тогда

$$U_2(\gamma, z) = B_1(\gamma) e^{\gamma z \sqrt{\kappa(-H)}}. \quad (11)$$

Условия сопряжения (4) можно записать в виде:

$$U_1(\gamma, -H) = U_2(\gamma, -H), \quad U_1'(\gamma, -H) = \beta_2 U_2'(\gamma, -H).$$

Или, используя явный вид функции $U_2(\gamma, z)$ (11), получим:

$$\frac{U_1'(\gamma, -H)}{U_1(\gamma, -H)} = \beta_2 \gamma \sqrt{\kappa(-H)}. \quad (12)$$

Из (3) при $z = 0$ и (7) следует:

$$U_1'(\gamma, 0) = T(\gamma) / G_{\varphi z}(0). \quad (13)$$

Здесь $T(\gamma)$ связана с $\tau_a(r)$ преобразованием Ханкеля:

$$T(\gamma) = \int_0^{\infty} \tau_a(\rho) J_1(\rho\gamma) \rho d\rho. \quad (14)$$

Введём вспомогательную функцию $U_1^*(\gamma, z)$:

$$U_1^*(\gamma, z) = \gamma U_1(\gamma, z) T^{-1}(\gamma) \sqrt{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)}. \quad (15)$$

Ввиду однородности, уравнение (9) относительно функции $U_1^*(\gamma, z)$ не изменится. Условия (12), (13) относительно U_1^* примут вид:

$$\frac{U_1'^*(\gamma, -H)}{U_1^*(\gamma, -H)} = \beta_2 \gamma \sqrt{\kappa(-H)}, \quad (16)$$

$$U_1'^*(\gamma, 0) = \gamma \sqrt{\kappa(0)}. \quad (17)$$

Далее $U_1^*(\gamma, 0)$ будем обозначать $L^*(\gamma)$. Затем, используя условие (2), можно записать интегральное уравнение нашей задачи:

$$u_\varphi|_{z=0} = \int_0^{\infty} U_1(\gamma, 0) J_1(r\gamma) \gamma d\gamma = \frac{1}{\sqrt{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)}} \int_0^{\infty} L^*(\gamma) T(\gamma) J_1(r\gamma) d\gamma = r\varepsilon, \quad r \leq a.$$

Используя (14), уравнение можно представить в виде:

$$\int_0^a \tau_a(\rho) \rho \int_0^{\infty} L^*(\gamma) J_1(r\gamma) J_1(\rho\gamma) d\gamma d\rho = r\varepsilon \sqrt{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)}, \quad r \leq a.$$

Сделаем замену переменных:

$$H\gamma = u, \quad \lambda = H/a, \quad r' = r/a, \quad \rho' = \rho/a, \quad L(u) = L^*(u/H), \quad \tau(\rho') = \tau_a(\rho'a).$$

Далее штрихи опускаем, тогда интегральное уравнение задачи примет вид:

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho \int_0^{\infty} L(u) J_1(ur\lambda^{-1}) J_1(u\rho\lambda^{-1}) du d\rho = \lambda r\varepsilon \sqrt{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)}, \quad r \leq 1. \quad (18)$$

Таким образом, для построения интегрального уравнения задачи необходимо построить функцию $U_1^*(\gamma, 0)$ из краевой двухточечной задачи (9), (16), (17).

Построение трансформанты ядра интегрального уравнения. Для некоторых частных случаев изменения модуля сдвига в покрытии удаётся получить явное выражение для трансформанты ядра $L(u)$. Например, для покрытия, в котором модули сдвига постоянны:

$$G_{r\varphi}(z) = \begin{cases} G_{r\varphi}^C, & -H < z \leq 0 \\ G_{r\varphi}^S, & -\infty < z \leq -H, \end{cases} \quad G_{\varphi z}(z) = \begin{cases} G_{\varphi z}^C, & -H < z \leq 0 \\ G_{\varphi z}^S, & -\infty < z \leq -H. \end{cases}$$

В этом случае решение уравнения (9) можно построить в явном виде, и трансформанта ядра принимает вид:

$$L(u) = \frac{1 + \mu e^{-2uH\delta_1}}{1 - \mu e^{-2uH\delta_1}}, \quad \mu = \frac{G_{\varphi z}^C \delta_1 - G_{\varphi z}^S \delta_2}{G_{\varphi z}^C \delta_1 + G_{\varphi z}^S \delta_2}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{G_{r\varphi}^C}{G_{\varphi z}^C}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{G_{r\varphi}^S}{G_{\varphi z}^S}}.$$

Заметим, что для многослойной среды уравнение (9) распадается на N независимых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, для каждого из которых известно явное решение. Для построения значения трансформанты ядра в некоторой точке достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений.

Для произвольного закона изменения модуля сдвига по глубине значение трансформанты ядра может быть получено численно. Введём обозначения:

$$\omega_1 = U_1^*(\gamma, z), \quad \omega_2 = U_1'^*(\gamma, z).$$

Уравнение (9) перепишем в виде линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_2 \\ \omega'_2 = -v(z)\omega_2 + \gamma^2 \kappa(z)\omega_1, \end{cases} \quad -H < z \leq 0,$$

или в матричной форме:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dz} = \mathbf{A}\vec{\omega}, \quad -H < z \leq 0, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2 \kappa(z) & -v(z) \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (16), (17) принимают вид:

$$\omega_2 \omega_1^{-1} \big|_{z=-H} = \beta_2 \gamma \sqrt{\kappa(-H)}, \quad \omega_2 \big|_{z=0} = \gamma \sqrt{\kappa(0)}. \quad (19)$$

Решение краевой двухточечной задачи при фиксированном γ построим, используя метод моделирующих функций [9], предложенный для построения трансформант ядер динамических контактных задач. Ищем $\vec{\omega}(\gamma, z)$ в виде:

$$\vec{\omega}(\gamma, z) = B_1(\gamma) \vec{a}(\gamma, z) e^{\gamma z}.$$

Вектор $\vec{a}(\gamma, z)$ определяется из задачи Коши при фиксированном γ :

$$\frac{d\vec{a}}{dz} = \mathbf{A}\vec{a} - \gamma \vec{a}, \quad -H < z \leq 0,$$

$$a_1 \big|_{z=-H} = 1/\beta_2, \quad a_2 \big|_{z=-H} = \gamma \sqrt{\kappa(-H)}.$$

Затем, используя второе условие (19), находим $B_1(\gamma)$ и тем самым $\omega_1(\gamma, 0)$:

$$B_1(\gamma) = \gamma a_2^{-1}(\gamma, 0) \sqrt{\kappa(0)},$$

$$L(u/H) = L^*(\gamma) = U_1^*(\gamma, 0) = \omega_1(\gamma, 0) = \gamma \sqrt{\kappa(0)} a_1(\gamma, 0) a_2^{-1}(\gamma, 0).$$

Аналогично работе [10] можно показать, что трансформанта ядра $L(u)$ обладает свойствами:

$$L(0) = \sqrt{\frac{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)}{G_{r\varphi}(-H) G_{\varphi z}(-H)}}, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 1. \quad (20)$$

Построение решения задачи. Будем говорить, что функция $f(u)$ принадлежит классу Π_N , где N — натуральное число, если она представима в виде:

$$f(u) = \prod_{j=1}^N \frac{u^2 + A_j^2}{u^2 + B_j^2}, \quad A_i, B_i \in \mathbb{C}, \quad A_i \neq A_j, B_i \neq B_j \quad \text{при } i \neq j.$$

Для трансформанты ядра $L_N(u) \in \Pi_N$ можно построить [11] решение интегрального уравнения (18) в форме:

$$\tau(r) = \frac{4}{\pi} \varepsilon \sqrt{G_{r\varphi}(0) G_{\varphi z}(0)} \left\{ \frac{1}{L_N(0)} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i Z(r, A_i/\lambda) \right\}, \quad (21)$$

где постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i p\left(\frac{A_i}{\lambda}, \frac{B_k}{\lambda}\right) + \frac{1 + B_k \lambda^{-1}}{L_N(0) B_k^2 \lambda^{-2}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь использованы обозначения:

$$Z(r, A) = \frac{\operatorname{sh} Ar}{r} + \frac{r \operatorname{sh} A}{\sqrt{1-r^2} (1 + \sqrt{1-r^2})} - Ar \int_r^1 \frac{\operatorname{ch} At dt}{\sqrt{t^2 - r^2} (t + \sqrt{t^2 - r^2})},$$

$$p(A, B) = (A \operatorname{ch} A + B \operatorname{sh} A) / (B^2 - A^2).$$

Таким образом, для построения решения исходной контактной задачи достаточно аппроксимировать трансформанту ядра интегрального уравнения функцией класса Π_M . Для построения аппроксимации можно использовать алгоритм, описанный в работе [11], где показано, что решение (21) является асимптотически точным при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Решение задачи для частного случая изменения модулей сдвига. Пусть для модулей сдвига выполнены равенства:

$$G_{r\varphi}(z)G_{\varphi z}(z) \equiv c^2 = \text{const}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1. \quad (22)$$

Тогда первое равенство (8) можно переписать в виде:

$$\sqrt{\kappa(z)} = G_{r\varphi}(z)/c. \quad (23)$$

Учитывая (23), уравнение (9) принимает вид:

$$-\frac{G'_{r\varphi}(z)}{G^2_{r\varphi}(z)}U'_1(\gamma, z) + \frac{U''_1(\gamma, z)}{G_{r\varphi}(z)} - \frac{\gamma^2}{c^2}G_{r\varphi}(z)U_1(\gamma, z) = 0, \quad -H < z \leq 0. \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид:

$$U_1^*(\gamma, z) = C_1(\gamma)e^{F(z)\gamma/c} + C_2(\gamma)e^{-F(z)\gamma/c}, \quad (25)$$

где $F(z) = \int G_{r\varphi}(z) dz$.

Продифференцируем $U_1^*(\gamma, z)$ по z :

$$\frac{d}{dz}U_1^*(\gamma, z) = \frac{\gamma}{c}G_{r\varphi}(z)[C_1(\gamma)e^{F(z)\gamma/c} - C_2(\gamma)e^{-F(z)\gamma/c}].$$

Тогда из краевого условия (16), учитывая (23), следует:

$$C_2(\gamma) = 0. \quad (26)$$

Из краевого условия (17) и равенств (23), (26) получаем следующее:

$$C_1(\gamma)e^{\gamma F(0)} = 1. \quad (27)$$

Из (25), (26), (27) следует, что для любого γ выполнено тождество

$$U_1^*(\gamma, 0) \equiv 1.$$

Тогда

$$L(u) \equiv 1.$$

Таким образом, если для модулей сдвига трансверсально-изотропного полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием выполнены равенства (22), то трансформанта ядра интегрального уравнения тождественно равна единице. Следовательно, решение задачи совпадает с решением для однородного полупространства с модулем сдвига равным c и имеет вид:

$$\tau(r) = \frac{4}{\pi} \varepsilon c \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Численные примеры. Рассмотрим трансверсально-изотропную упругую подложку с модулями сдвига $G_{r\varphi}(-H) = 5$, $G_{\varphi z}(-H) = 6$ и пусть модули сдвига на поверхности покрытия равны $G_{r\varphi}(0) = G_{\varphi z}(0) = 0,608$. Такие значения модулей сдвига соответствуют свойствам хряща (покрытие) и кортикальной кости (подложка). Предположим, модули сдвига покрытия изменяются по одному из следующих законов:

1. $f_{r\varphi}(z) = 5,03 - 4,422e^{5z/H}$, $f_{\varphi z}(z) = 6,037 - 5,428e^{5z/H}$;
2. $f_{r\varphi}(z) = 0,608 - 4,392z/H$, $f_{\varphi z}(z) = 0,608 - 5,392z/H$;
3. $f_{r\varphi}(z) = f_{\varphi z}(z) = 0,608$;
4. $f_{r\varphi}(z) = f_{\varphi z}(z) = 0,118 + 0,489e^{5z/H}$.

Эти законы описывают трансверсально-изотропные покрытия, модули сдвига которых возрастают экспоненциально (закон 1) и линейно (закон 2); однородное изотропное покрытие (закон 3) и изотропное покрытие (закон 4), упругие свойства которого экспоненциально убывают, а на границе покрытие-подложка наблюдается скачок модулей сдвига $G_{\text{гп}}$, $G_{\text{фз}}$ в 41 и 49 раз соответственно ($\beta_1=41$, $\beta_2=49$). Графики изменения модулей сдвига по глубине для законов 1–4 изображены на рисунке 2.

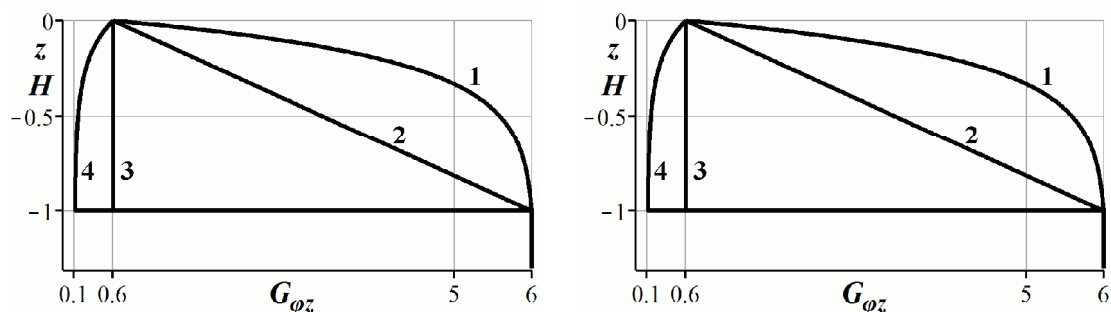


Рис. 2. Изменение модулей сдвига по глубине в материалах 1–4

Трансформанты ядер, соответствующие покрытиям 1–4, изображены на рисунке 3. Построены аппроксимации трансформант ядер функциями класса Π_N , их погрешности равны 0,8 %, 0,82 %, 0,64 % и 0,49 % соответственно. Под погрешностью аппроксимации понимаем следующее выражение:

$$\Delta_L = \max |L_N(u)/L(u) - 1| \times 100 \, \%.$$

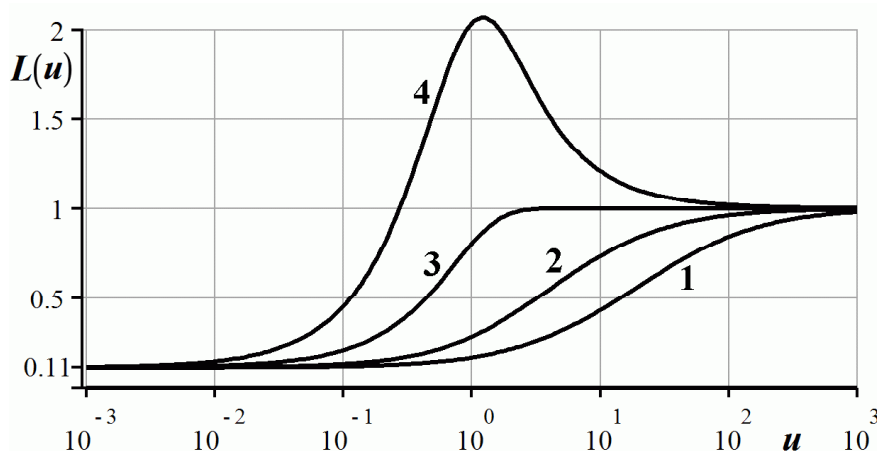


Рис. 3. Трансформанты ядер для материалов 1–4

Введём величину:

$$\tau_{\text{rel}}(\lambda, r) = \tau(\lambda, r) / \tau_{\text{hom}}(r),$$

где $\lambda = H/a$ — геометрический параметр задачи, характеризующий относительную толщину покрытия; $\tau(\lambda, r)$ — контактные напряжения под штампом для рассматриваемой неоднородной среды; $\tau_{\text{hom}}(r)$ — контактные напряжения однородной изотропной среды с модулем сдвига, равным $\sqrt{G_{\text{гп}}(-H)G_{\text{фз}}(-H)}$.

Величина τ_{rel} характеризует распределение контактных касательных напряжений под штампом для неоднородной среды по сравнению с однородной средой.

Графики величины τ_{rel} для материалов 1—4 в случае относительно толстого покрытия ($\lambda=100$), тонкого покрытия ($\lambda \approx 1/100$) и покрытия, сравнимого по размерам с размерами штампа ($\lambda=1$), изображены на рисунке 4. Из графиков видно, что неоднородность покрытия оказывает существенное влияние на решение контактной задачи, особенно для покрытий малой толщины. Наиболее существенное перераспределение контактных напряжений по сравнению со случаем однородного полупространства наблюдается на краю штампа ($r \rightarrow 1$).

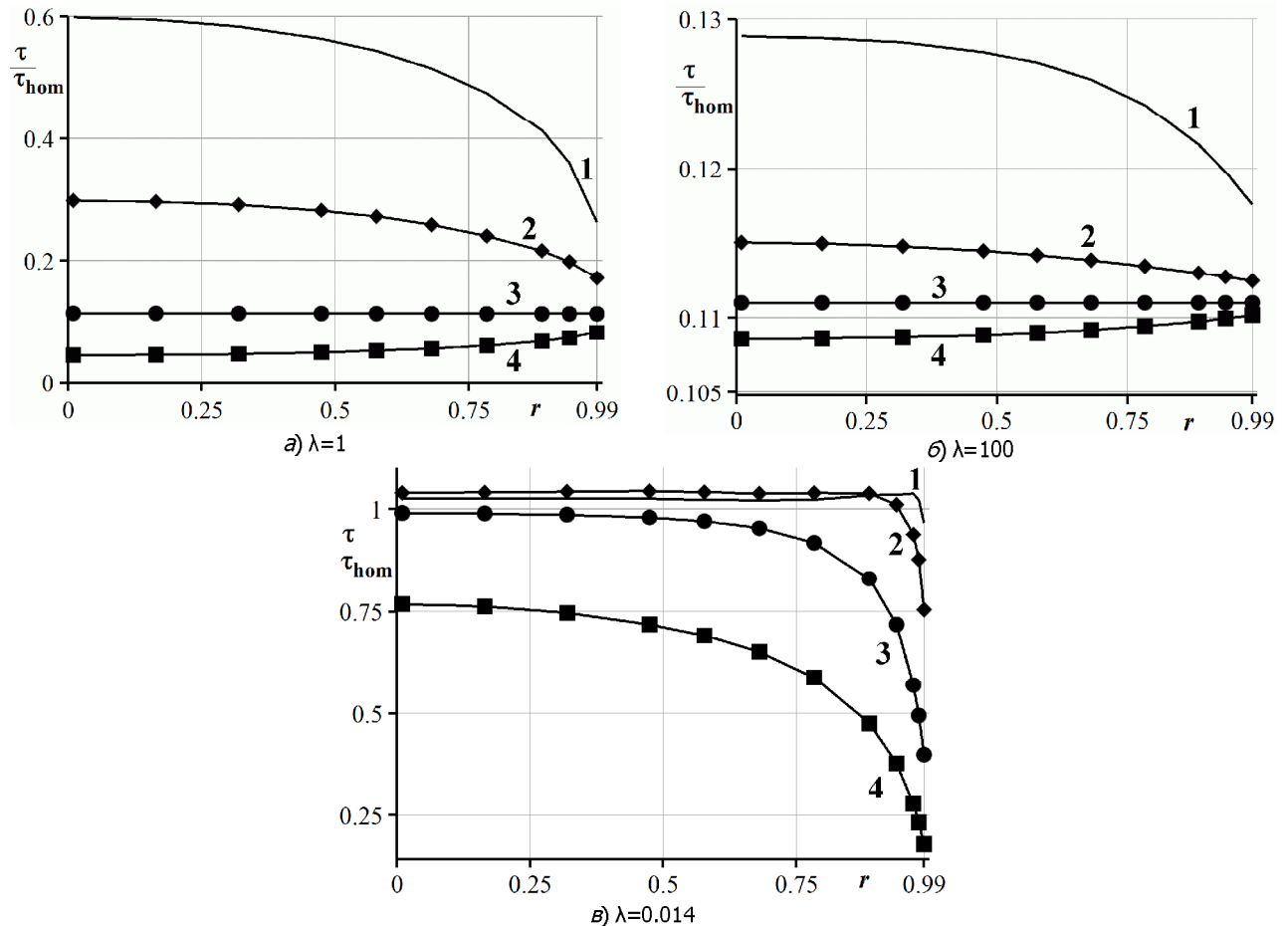


Рис. 4. Контактные напряжения для законов 1—4

Заключение. Построено приближённое аналитическое решение контактной задачи о кручении transversально-изотропного упругого полупространства с неоднородным transversально-изотропным покрытием, эффективное для любых относительных толщин покрытий (значений параметра λ). Показано, что в случае, когда модули сдвига transversально-изотропного полупространства изменяются в соответствии с условием (22), распределение контактных напряжений под штампом совпадает со случаем однородного изотропного полупространства.

На основании высокой точности аппроксимации трансформант ядер интегральных уравнений (менее 0,8 %) можно утверждать о малой погрешности построенных решений контактной задачи даже для покрытий сложной структуры (материал 4).

Построенное в работе решение позволяет исследовать одновременное влияние анизотропии и неоднородности покрытия на механические характеристики контактного взаимодействия. Результаты актуальны для широкого класса современных полимерных, биологических и композиционных материалов.

Библиографический список

1. Reissner, E. Forced torsional oscillations of an elastic half-space / E. Reissner, H. F. Sagoci // *Journal of Applied Physics*. — 1944. — Vol. 15. — № 9. — Pp. 652–654.
2. Sneddon, I. N. The Reissner–Sagoci problem / I. N. Sneddon // *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*. — 1966. — Vol. 7. — № 3. — Pp. 136–144.
3. Грилицкий, Д. В. Кручение двухслойной упругой среды / Д. В. Грилицкий // *Прикладная механика*. — 1961. — Т. 7. — № 1. — С. 89–94.
4. Kassir, M. K. The Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous solid / M. K. Kassir // *International Journal of Engineering Science*. — 1970. — Vol. 8. — № 10. — Pp. 875–885.
5. Айзикович, С. М. Кручение круглым штампом неоднородного полупространства / С. М. Айзикович // *Расчёт оболочек и пластин : сб. трудов*. — Ростов-на-Дону : РИСИ, 1978. — С. 156–169.
6. Erguven, M. E. Torsion of a transversely isotropic elastic layer bonded to a transversely isotropic half-space / M. E. Erguven // *International Journal of Engineering Science*. — 1986. — Vol. 24. — № 9. — Pp. 1501–1509.
7. Liu, Tie-Jun. Reissner–Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties / Tie-Jun Liu, Yue-Sheng Wang // *Mechanics Research Communications*. — 2009. — Vol. 36. — № 3. — Pp. 322–329.
8. Xiong, Su-ming. The Reissner–Sagoci problem for transversely isotropic piezoelectric half-space / Su-ming Xiong, Guang-zheng Ni, Peng-fei Hou // *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*. — 2005. — Vol. 6. — № 9. — Pp. 986–989.
9. Бабешко, В. А. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1987. — Т. 27. — № 1. — С. 93–101.
10. Айзикович, С. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству / С. М. Айзикович, В. М. Александров // *Доклады академии наук СССР*. — 1982. — Т. 266. — № 1. — С. 40–43.
11. Айзикович, С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред / С. М. Айзикович // *Прикладная математика и механика*. — 1982. — Т. 46. — № 1. — С. 148–158.

Материал поступил в редакцию 08.10.2012.

References

1. Reissner, E., Sagoci, H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. *Journal of Applied Physics*, 1944, vol. 15, no. 9, pp. 652–654.
2. Sneddon, I. N. The Reissner–Sagoci problem. *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 136–144.
3. Grilitskiy, D. V. Kruchenie dvuxslojnoj uprugoj sredy`. [Double-layer elastic medium torsion.] *Prikladnaya mexanika*, 1961, vol. 7, no. 1, pp. 89–94 (in Russian).
4. Kassir, M. K. The Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous solid. *International Journal of Engineering Science*, 1970, vol. 8, no. 10, pp. 875–885.
5. Aizikovich, S. M. Kruchenie krugly`m shtampom neodnorodnogo poluprostranstva. [Round-die torsion of inhomogenous half-space.] *Raschet obolochek i plastin : sb. trudov.*[Analysis of shells and plates: coll.of sci.papers.] Rostov-on-Don : Rostov State University of Civil Engineering, 1978, pp. 156–169 (in Russian).

6. Erguven, M. E. Torsion of a transversely isotropic elastic layer bonded to a transversely isotropic half-space. *International Journal of Engineering Science*, 1986, vol. 24, no. 9, pp. 1501—1509.

7. Liu, Tie-Jun, Wang, Yue-Sheng. Reissner—Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties. *Mechanics Research Communications*, 2009, vol. 36, no. 3, pp. 322—329.

8. Xiong, Su-ming, Ni, Guang-zheng, Hou, Peng-fei The Reissner—Sagoci problem for transversely isotropic piezoelectric half-space. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 2005, vol. 6, no. 9, pp. 986—989.

9. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. Metody` postroeniya matricz Grina dlya stratificirovannogo uprugogo poluprostranstva. [Green matrices construction methods for stratified elastic half-space.] *Zhurnal vy`chislitel`noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 93—101 (in Russian).

10. Aizikovich, S. M., Alexandrov, V. M. O svoystvax funkciy podatlivosti, sootvetstvuyushhix sloistomu i neprery`vno-neodnorodnomu poluprostranstvu. [On receptance function properties corresponding to layered and continuous-inhomogeneous half-space.] *Doklady` akademii nauk SSSR*, 1982, vol. 266, no. 1, pp. 40—43 (in Russian).

11. Aizikovich, S. M. Asimptoticheskie resheniya kontaktny`x zadach teorii uprugosti dlya neodnorodny`x po glubine sred. [Asymptotic solutions to contact problems of elasticity theory for inhomogeneous in depth media.] *Prikladnaya matematika i mexanika*, 1982, vol. 46, no. 1, pp. 148—158 (in Russian).

CONTACT PROBLEM ON TORSION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC HALF-SPACE WITH INHOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC COATING BY ROUND DIE¹

A. S. Vasilyev, E. V. Sadyrin

(Don State Technical University),

I. A. Fedotov

(Tshwane University of Technology, Pretoria, South Africa)

An axisymmetric contact problem of the elasticity theory on the torsion of the transversely isotropic half-space with the inhomogeneous coating by the round die is considered. The problem solution is reduced to the integral equation solution using the integral transformations technique. The explicit expression of the kernel transform of the integral equation for the homogeneous transversely isotropic coating is constructed. The numerical construction scheme of the kernel transform in the case of the arbitrary law of variation of the coating depth shear modulus is suggested. The bilateral asymptotically exact approximate analytical problem solution is constructed using the kernel transform approximation by some special functions. A special case of variation of the shear moduli in the transversely isotropic coating that allows constructing an explicit closed problem solution is analyzed. The model problem on the biomaterial torsion is studied numerically. The coating is considered a cartilaginous tissue, and the substrate properties correspond to a cortical bone.

Keywords: contact problems, theory of elasticity, torsion, inhomogeneity, anisotropy.

¹ The research is done with the support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State Contracts No. 11.519.11.3028, Agreements Nos. 14.V37.21.1632, 14.V37.21.1131, 14.132.21.1693) and the RFFI (No. 12-07-00639_a).