УДК 539.3+624.131

Осесимметричная контактная задача консолидации для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства[1]

Л. Н. Евич
(Донской государственный технический университет)

Рассматривается постановка осесимметричной задачи консолидации для пористого, неоднородного по глубине полупространства и построение фундаментального решения для определения полей перемещений, деформаций, напряжений и порового давления при заданных граничных условиях. Отдельно рассмотрено решение уравнений описывающих напряжённое состояние пористой среды под воздействием касательного усилия и под воздействием нормальной и радиальной нагрузках. При решении используется интегральное преобразование Ханкеля, которое позволяет свести задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода моделирующих функций получены представления для напряжений, смещений, порового давления и деформаций в виде интегральных выражений. Полученные решения позволяют рассматривать задачу с разными типами смешанных граничных условий: только по упругости, только по фильтрации или с изменением типа обоих условий.

Ключевые слова: *пористость, осесимметричная задача, консолидация, неоднородное полупространство.*

Введение. Решению различных задач теории консолидации посвящено большое число работ. Краткий обзор основных работ опубликованных до 2001 года и посвящённых контактным задачам теории консолидации представлен в [1]. Большинство работ, в которых рассматриваются контактные задачи для пороупругой среды, посвящены исследованию немонотонному изменению упругих свойств в покрытии. Целью данной работы является постановка осесимметричной задачи и представление её фундаментального решения для пороупругого полупространства с функционально-градиентным покрытием.

1. Основные уравнения теории деформаций пористо-упругих сред.

Представим основные уравнения теории консолидации для пороупругого полупространства. С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r,φ,z). Обозначим через u,v,w смещения вдоль осей r,φ,z; $\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{r\varphi},\tau_{rz},\tau_{\varphi z}$ — радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно.

Для определения полей перемещений, деформаций, напряжений и порового давления в рамках квазистатической несвязанной задачи консолидации мы имеем следующие уравнения [1]:

1. Определяющие соотношения связи напряжений и деформаций с поровым давлением возьмём в виде:

$$\sigma_r=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon+2G\varepsilon_r-\alpha p,$$
$$\sigma_\varphi=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon+2G\varepsilon_\varphi-\alpha p, \qquad (1)$$
$$\sigma_z=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon+2G\varepsilon_z-\alpha p,$$
$$\tau_{rz}=2G\varepsilon_{rz},\ \tau_{\varphi z}=2G\varepsilon_{\varphi z},\ \tau_{r\varphi}=2G\varepsilon_{r\varphi},$$

[1] Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

где $\alpha = \dfrac{3(\nu_0 - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_0)}$ — коэффициент эффективного напряжения Био, $p = \dfrac{2GB^2(1-2\nu)(1+\nu_0)^2}{9(\nu_0-\nu)(1-2\nu_0)}\xi - \dfrac{2GB(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}\varepsilon$, ν, ν_0 — соответственно дренированный и недренированный коэффициенты Пуассона $\nu \le \nu_0 \le 0{,}5$, $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$ — деформация скелета, ς — изменение содержания жидкости в единице объёма, B — коэффициент Скемптона. $B = \dfrac{\beta - \beta_s}{\beta - \beta_s + m(\beta_f - \beta_s)}$, β_s — сжимаемость твёрдой фазы, скелета; β_f — сжимаемость порового флюида; m — пористость, $\beta = \dfrac{3(1-2\nu)}{2G(1+\nu)}$ — дренированная сжимаемость скелета [3], G — модуль сдвига.

2. Уравнения равновесия неоднородного по глубине полупространства при отсутствии массовых сил, записанные в цилиндрической системе координат (r, φ, z):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) определяют напряжённо-деформируемое состояние скелета и распределение порового давления.

3. Движение поровой жидкости предполагается подчиняющимся закону Дарси. Закон Дарси для квазистатического течения жидкости возьмём в виде:

$$\psi_r = -\kappa\frac{\partial p}{\partial r}, \psi_\varphi = -\kappa\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \psi_z = -\kappa\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3}$$

где κ — коэффициент гидравлической проводимости (фильтрации), $\kappa = k/\mu > 0$ — коэффициент проницаемости, μ — динамическая вязкость жидкости.

4. Уравнение неразрывности квазистатического потока жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Для определения положительной энергии деформации будем считать, что параметры имеют следующие ограничения: $G > 0$, $0 \le B \le 1$, $-1 < \nu < \nu_0 \le 0{,}5$, $\kappa > 0$.

Наряду с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν, для описания упругого поведения твёрдого изотропного тела используются коэффициенты Ламе Λ и M или модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν. При приложении нагрузки, мгновенное деформированное состояние среды даётся решением задачи теории упругости с постоянными Ламе M и $\Lambda_c = \Lambda + \alpha^2\mu$, то есть с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона

$$\nu_0 = \frac{\Lambda + \alpha^2\mu}{2(\Lambda + \mathrm{M} + \alpha^2\mu)}. \tag{5}$$

Коэффициенты M (иногда обозначаемый G и называемый модулем сдвига) и Ламе Λ связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\mathrm{M} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \ \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \ E = \frac{\mathrm{M}(2\mathrm{M}+3\Lambda)}{\mathrm{M}+\Lambda}, \ \nu = \frac{\Lambda}{2(\mathrm{M}+\Lambda)}. \tag{6}$$

Компоненты малой деформации выражаются через смещения по формулам Коши следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right),\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{r\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right),\\
&\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\ \varepsilon_{\varphi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right),\\
&\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{r\partial\varphi}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{7}$$

2. Постановка контактной задачи для градиентного пороупругого полупространства.

Рассмотрим пороупругое полупространство, упругие характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины H, а затем стабилизируются и остаются постоянными. Пусть $2a$ — диаметр круга в основании жёсткого штампа. Предположим, что внутри круга приложена произвольная равномерная нормальная нагрузка $q(r)$ и касательные нагрузки $d(r)$ и $t(r)$. Остальная часть поверхности свободна от напряжений.

При осевой симметрии напряжённого состояния смещения, деформации и напряжения не зависят от угловой координаты φ. Из системы уравнений (2) в этом случае имеем

$$1.\ \begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\dfrac{\tau_{rz}}{r}=0.\end{cases}\tag{8}$$

$$2.\ \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\varphi}}{r}=0.\tag{9}$$

Система (8) описывает осесимметричное напряжённое состояние, возникающее, под действием нормальной к поверхности нагрузки, а уравнение (9) — равновесие полупространства, скручиваемого касательным усилием.

Выражения для компонент деформаций (7) при этом упрощаются

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\ \ \varepsilon_\varphi=\frac{u}{r},\ \ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\varepsilon_{\varphi z}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z},\ \ \varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right),\\
&\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Представления для напряжений (1) через смещения, с учётом (10) и (5) примут вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_r=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\Lambda(z)\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\alpha(z)p,\\
&\sigma_\varphi=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\frac{u}{r}+\Lambda(z)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\alpha(z)p,\\
&\sigma_z=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\frac{\partial w}{\partial z}+\Lambda(z)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\alpha(z)p,\\
&\tau_{rz}=\mathrm{M}(z)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\tau_{r\varphi}=\mathrm{M}(z)\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right),\\
&\tau_{\varphi z}=\mathrm{M}(z)\frac{\partial \nu}{\partial z},\alpha(z)=\frac{3\left(\nu_0-\nu(z)\right)}{B(z)\left(1-2\nu(z)\right)\left(1+\nu_0\right)}.
\end{aligned}\tag{11}$$

В осесимметричном случае уравнение квазистатического потока жидкости (4) примет вид:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial r}+\frac{\Psi_r}{r}+\frac{\partial \Psi_z}{\partial z}=0, \tag{12}$$

или, иначе, подставляя в (11) значения из (3):

$$\kappa(z)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial \kappa(z)}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{13}$$

Подставляя выражения (11) в уравнения равновесия (8), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно перемещений и порового давления. Эти уравнения могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} \mathrm{M}(z)\left(\nabla^2 u-\dfrac{u}{r^2}\right)+\left(\mathrm{M}(z)+\Lambda(z)\right)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial r}+\mathrm{M}'(z)\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=\alpha(z)\dfrac{\partial p}{\partial r}, \\ \mathrm{M}(z)\nabla^2 w+\left(\mathrm{M}(z)+\Lambda(z)\right)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z}+2\mathrm{M}'(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}+\Lambda'(z)\varepsilon=\alpha'(z)p+\alpha(z)p', \\ \mathrm{M}(z)\left(\nabla^2 v-\dfrac{v}{r^2}\right)+\mathrm{M}'(z)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)=0, \\ \kappa(z)\nabla^2 p+\kappa'(z)p'=0. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \mathrm{M}'(z)=\frac{d\mathrm{M}(z)}{dz},\quad \Lambda'(z)=\frac{d\Lambda(z)}{dz},\quad \nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \varepsilon=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z},\ \kappa'(z)=\frac{d\kappa(z)}{dz},\ \alpha'(z)=\frac{d\alpha(z)}{dz},\quad p'=\frac{\partial p}{\partial z} \end{gathered} \tag{15}$$

Мы полагаем, что через участок поверхности (круга радиуса a) происходит инфильтрация (откачивание) жидкости, остальная поверхность абсолютно непроницаема. Тогда, на поверхности граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} z=0:\ & p'(r,0)=-\beta(r)\kappa, && r\le a, \\ & p'(r,0)=0, && r>a, \\ & \sigma_z(r,0)=-q(r), && 0\le r\le a, \\ & \sigma_z(r,0)=0, && a<r<\infty, \\ & \tau_{rz}(r,0)=-d(r), && 0\le r<a, \\ & \tau_{rz}(r,0)=0, && a<r<\infty, \\ & \tau_{z\varphi}(r,0)=t(r), && 0\le r<a, \\ & \tau_{z\varphi}(r,0)=0, && a<r<\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при $z=-H$, в силу непрерывности, должны выполняться условия сопряжения по смещениям, напряжениям и поровому давлению.

$$\begin{gathered} \sigma_z^C(r,-H)=\sigma_z^S(r,-H),\ \tau_{rz}^C(r,-H)=\tau_{rz}^S(r,-H), \\ u^C(r,-H)=u^S(r,-H),\ w^C(r,-H)=w^S(r,-H), \\ p^C(r,-H)=p^S(r,-H),\ \left(p^C\right)'(r,-H)=\left(p^S\right)'(r,-H). \end{gathered} \tag{17}$$

На бесконечности, при $(r,-z)\to\infty$ смещения, деформации и напряжения исчезают. Значение порового давления при этом постоянно.

$$\begin{gathered}\lim_{z\to-\infty}\left(u,w,\varepsilon_r,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z,\varepsilon_{rz},\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{rz},p'\right)=0,\\ \lim_{z\to-\infty}p=p_\infty,\quad \lim_{r\to\infty}p=p_\infty\\ \lim_{r\to\infty}\left(u,w,\varepsilon_r,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z,\varepsilon_{rz},\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{rz},p'\right)=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Учитывая, что в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины H характеристики рассматриваемого полупространства непрерывно меняются с глубиной, полагаем, что коэффициент Пуассона $\nu(z)$, модуль сдвига $G(z)$, коэффициента Скемптона $B(z)$ и коэффициент фильтрации $\kappa(z)$ являются непрерывными функциями координаты z, такими, что

$$\begin{aligned}&1.\ G(z)=G^C(z),\ \nu(z)=\nu^C(z),\\ &\quad \kappa(z)=\kappa^C(z),\ B(z)=B^C(z), && -H\le z\le 0.\\ &2.\ G(z)=G(-H)=G^S,\ \nu(z)=\nu(-H)=\nu^S,\\ &\quad \kappa(z)=\kappa(-H)=\kappa^S,\ B(z)=B(-H)=B^S, && -\infty<z<-H.\\ &3.\ G^S=G^C(-H),\ \nu^S=\nu^C(-H),\\ &\quad \kappa^S=\kappa^C(-H),B^S=B^C(-H).\end{aligned}\tag{19}$$

Индекс S соответствует подстилающему однородному полупространству, а C — неоднородному слою.

3. Построение фундаментального решения квазистатической осесимметричной задачи консолидации для неоднородного по глубине полупространства.

Будем разыскивать решение для смещений u, w и порового давления p в виде интегралов Ханкеля

$$\begin{gathered}u(r,z)=-\int_0^\infty U(\gamma,z)J_1(\gamma r)\gamma d\gamma,\quad v(r,z)=\int_0^\infty V(\gamma,z)J_1(\gamma r)\gamma d\gamma,\\ w(r,z)=\int_0^\infty W(\gamma,z)J_0(\gamma r)\gamma d\gamma,\quad p(r,z)=\int_0^\infty P(\gamma,z)J_0(\gamma r)\gamma d\gamma.\end{gathered}\tag{20}$$

Подставив (20) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (14) и, приравняв к нулю подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (здесь $'$ указывает на дифференцирование по z).

$$\begin{gathered}\mathrm{M}U''+\gamma(\mathrm{M}+\Lambda)W'-\gamma^2(2\mathrm{M}+\Lambda)U+\mathrm{M}'U'+\gamma\mathrm{M}'W=\alpha\gamma P,\\ (2\mathrm{M}+\Lambda)W''-\gamma(2\mathrm{M}+\Lambda)U'-\gamma^2\mathrm{M}W+(2\mathrm{M}'+\Lambda')W'-\gamma\Lambda'U=\alpha'P+\alpha P',\\ \mathrm{M}V''+\mathrm{M}'V'-\gamma^2\mathrm{M}V=0,\\ \kappa\cdot P''-\gamma^2\kappa\cdot P+\kappa'\cdot P'=0\end{gathered}\tag{21}$$

Граничные условия (16) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}(2\mathrm{M}(0)+\Lambda(0))W'(\gamma,0)-\gamma\Lambda(0)U(\gamma,0)-\alpha(0)P(\gamma,0)=-Q(\gamma),\\ \mathrm{M}(0)(\gamma W(\gamma,0)+U'(\gamma,0))=D(\gamma),\mathrm{M}(0)V'(\gamma,0)=T(\gamma),\\ P'(\gamma,0)=-\kappa\cdot Y(\gamma),\\ Q(\gamma)=\int_0^a q(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho,\quad D(\gamma)=\int_0^a d(\rho)J_1(\rho\gamma)\rho d\rho,\\ Y(\gamma)=\int_0^a \beta(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho,\quad T(\gamma)=\int_0^a t(\rho)J_1(\rho\gamma)\rho d\rho.\end{gathered}\tag{22}$$

Третье уравнение системы (21) не зависит от составляющих остальных уравнений этой системы. Его решение представлено в [4].

Система уравнений, описывающая напряжённое состояние пористой среды под воздействием нормальной и радиальной нагрузках имеет вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}U'' + \gamma(\mathrm{M}+\Lambda)W' - \gamma^2(2\mathrm{M}+\Lambda)U + \mathrm{M}'U' + \gamma\mathrm{M}'W = \alpha\gamma P,\\
(2\mathrm{M}+\Lambda)W'' - \gamma(2\mathrm{M}+\Lambda)U' - \gamma^2\mathrm{M}W + (2\mathrm{M}'+\Lambda')W' - \gamma\Lambda'U = \alpha' P + \alpha P',\\
\kappa(z)\cdot P'' - \gamma^2\kappa(z)P + (\kappa)'(z)\cdot P' = 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

С граничными условиями

$$\begin{gathered}
(2\mathrm{M}(0)+\Lambda(0))\ W'(\gamma,0) - \gamma\Lambda(0)U(\gamma,0) - \alpha(0)P(\gamma,0) = -Q(\gamma),\\
\mathrm{M}(0)\big(\gamma W(\gamma,0) + U'(\gamma,0)\big) = D(\gamma),\\
P'(\gamma,0) = -\kappa\cdot Y(\gamma),\\
Q(\gamma) = \int_0^a q(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho,\quad D(\gamma) = \int_0^a d(\rho)J_1(\rho\gamma)\rho d\rho,\\
Y(\gamma) = \int_0^a \beta(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho.
\end{gathered} \tag{24}$$

Решение аналогичной системы для случая изотермической деформации представлены в [5]. Поскольку уравнения теории термоупругости по форме совпадают с уравнениями теории изотермической деформации для пористой среды [6], содержащей вязкую сжимаемую жидкость, то дальнейшие рассуждения проведём в соответствии с методом решения, предложенным в работе [5].

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),\\
&x_1 = U,\quad x_2 = U',\quad x_3 = W,\quad x_4 = W',\\
&x_5 = P,\quad x_6 = P'.
\end{aligned} \tag{25}$$

Запишем систему (23) в матричном виде, при этом явно выделим части соответствующие покрытию и подложке:

$$\frac{d\mathbf{x}^C}{dz} = \mathbf{A}^C\mathbf{x}^C,\quad -H \le z \le 0. \tag{26}$$

$$\mathbf{A}^C = \begin{Vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\gamma^2\frac{2\mathrm{M}+\Lambda}{\mathrm{M}} & -\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} & -\gamma\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} & -\gamma\frac{\mathrm{M}+\Lambda}{\mathrm{M}} & \frac{\gamma\alpha}{\mathrm{M}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\gamma\frac{\Lambda'}{2\mathrm{M}+\Lambda} & \gamma\frac{\mathrm{M}+\Lambda}{2\mathrm{M}+\Lambda} & \gamma^2\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{M}+\Lambda} & -\frac{2\mathrm{M}'+\Lambda'}{2\mathrm{M}+\Lambda} & \frac{\alpha'}{2\mathrm{M}+\Lambda} & \frac{\alpha}{2\mathrm{M}+\Lambda}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & -\frac{\kappa'}{\kappa}
\end{Vmatrix};$$

$$\frac{d\mathbf{x}^S}{dz} = \mathbf{A}^S\mathbf{x}^S,\quad -\infty < z \le -H. \tag{27}$$

$$\mathbf{A}^S = \begin{Vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\gamma^2\frac{2\mathrm{M}+\Lambda}{\mathrm{M}} & 0 & 0 & -\gamma\frac{\mathrm{M}+\Lambda}{\mathrm{M}} & \frac{\gamma\alpha}{\mathrm{M}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & \gamma\frac{\mathrm{M}+\Lambda}{2\mathrm{M}+\Lambda} & \gamma^2\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{M}+\Lambda} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{2\mathrm{M}+\Lambda}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & 0
\end{Vmatrix};$$

Граничные условия при этом имеют вид

$$\begin{gathered}\left(2\mathrm{M}(0)+\Lambda(0)\right)x_4^C(\gamma,0)-\gamma\Lambda(0)x_1^C(\gamma,0)-\alpha(0)x_5^C=-Q(\gamma),\\ \mathrm{M}(0)\left(\gamma x_3^C(\gamma,0)+x_2^C(\gamma,0)\right)=D(\gamma),\\ x_6^C(\gamma,0)=-\kappa\cdot Y(\gamma),\\ x_1^C(\gamma,0)=x_1^S(\gamma,-H),\quad x_3^C(\gamma,0)=x_3^S(\gamma,-H),\\ x_2^C(\gamma,0)=x_2^S(\gamma,-H),\quad x_4^C(\gamma,0)=x_4^S(\gamma,-H),\\ x_5^C(\gamma,0)=x_5^S(\gamma,-H),\quad x_6^C(\gamma,0)=x_6^S(\gamma,-H).\end{gathered}\tag{28}$$

Общее решение системы (23) для однородного полупространства $\Lambda'=\mathrm{M}'=\alpha'=\kappa'=0$, $\mathrm{M}>0,\Lambda>0,\alpha>0,\kappa>0$ имеет вид

$$\begin{gathered}x_1^S(\gamma,z)=\left(d_1+\gamma z d_2+\left(-\frac{\kappa_2}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z\right)d_3\right)e^{\gamma z},\\ x_2^S(\gamma,z)=\left(d_1+(1+\gamma z)d_2+\left(\frac{\kappa_3}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z\right)d_3\right)\gamma e^{\gamma z},\\ x_3^S(\gamma,z)=\left(d_1+(-\kappa_1+\gamma z)d_2+\left(-\frac{\kappa_3}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z\right)d_3\right)e^{\gamma z},\\ x_4^S(\gamma,z)=\left(d_1+(1-\kappa_1+\gamma z)d_2+\left(\frac{\kappa_2}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z\right)d_3\right)\gamma e^{\gamma z},\\ x_5^S(\gamma,z)=d_3e^{\gamma z},\ x_6^S(\gamma,z)=\gamma d_3 e^{\gamma z},\\ \kappa_1=\frac{\Lambda+3\mathrm{M}}{\Lambda+\mathrm{M}},\quad \kappa_2=\frac{k}{4(2\mathrm{M}+\Lambda)},\quad \kappa_3=\frac{k}{4\mathrm{M}}.\end{gathered}\tag{29}$$

где $d_i\ (i=1,2,3)$ — произвольная функция параметра γ.

Решение $\mathbf{x}^C(\gamma,z)$ системы дифференциальных уравнений (26) строится методом модулирующих функций [7]. Будем искать $\mathbf{x}^C(\gamma,z)$ в виде

$$\mathbf{x}^C(\gamma,z)=\sum_{i=1}^{3}d_i(\gamma)\mathbf{a}_i(\gamma,z)e^{\gamma z}.\tag{30}$$

Векторы $\mathbf{a}_i(\gamma,z)$, $(i=1,2,3)$ определяются из решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dz}=\mathbf{A}^C\mathbf{a}_i-\gamma\mathbf{a}_i,\quad -H\le z\le 0,\quad i=1,2,3.\tag{31}$$

при начальных условиях для $z=-H$

$$\mathbf{a}_1(\gamma,z)\big|_{z=-H}=(1,\gamma,1,\gamma,0,0)$$

$$\mathbf{a}_2(\gamma,z)\big|_{z=-H}=\left(\gamma z,\gamma+\gamma^2 z,-\kappa_1+\gamma z,\gamma-\kappa_1\gamma+\gamma^2 z,0,0\right)\Big|_{z=-H}$$

$$\mathbf{a}_3(\gamma,z)\big|_{z=-H}=\left(-\frac{\kappa_2}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z,\kappa_3+(\kappa_3+\kappa_2)\gamma z,-\frac{\kappa_3}{\gamma}+(\kappa_3+\kappa_2)z,\kappa_2+(\kappa_3+\kappa_2)\gamma z,1,\gamma\right)\Bigg|_{z=-H}$$

Константы $d_i(\gamma)$ $(i=1,2,3)$ определяются из условия (32). Таким образом, мы имеем

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}d_i(\gamma)N_i(\gamma)=-\,Q(\gamma),\\ \sum\limits_{i=1}^{3}d_i(\gamma)M_i(\gamma)=D(\gamma),\\ \sum\limits_{i=1}^{3}d_i(\gamma)O_i(\gamma)=-\,\kappa\cdot Y(\gamma)\end{cases}\tag{32}$$

$$N_i(\gamma) = -\Lambda(0)\quad \gamma a_i^1(\gamma,0) + (\Lambda(0)+2\mathrm{M}(0))\quad a_i^4(\gamma,0) - \alpha(0)\quad a_i^5(\gamma,0),$$
$$M_i(\gamma) = \mathrm{M}(0)a_i^2(\gamma,0) + \mathrm{M}(0)\quad \gamma a_i^3(\gamma,0),$$
$$O_i(\gamma) = a_i^6(\gamma,0),\ O_1(\gamma) = O_2(\gamma) = 0.$$

где $a_i^k(\gamma,z)$, $(i=1,2,3)$ обозначает k-ю компоненту вектора $\mathbf{a}_i(\gamma,z)$, $i=1,2,3$, $k=1,2,3,4,5,6$.

$$\begin{gathered} d_1 = -\ k_2^1(\gamma)Q(\gamma) - k_2^2(\gamma)D(\gamma) - k_2^3(\gamma)\kappa\cdot Y(\gamma),\\ d_2 = k_1^1(\gamma)Q(\gamma) + k_1^2(\gamma)D(\gamma) + k_1^3(\gamma)\kappa\cdot Y(\gamma),\\ d_3 = -\frac{1}{O_3(\gamma)}\kappa Y(\gamma). \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} k_2^1(\gamma) = \frac{M_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)},\ k_2^2(\gamma) = \frac{N_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)},\ k_2^3(\gamma) = \frac{\Delta_{23}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}\frac{1}{O_3(\gamma)},\\ k_1^1(\gamma) = \frac{M_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)},\ k_1^2(\gamma) = \frac{N_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)},\ k_1^3(\gamma) = \frac{\Delta_{13}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}\frac{1}{O_3(\gamma)},\\ \Delta_{ij}(\gamma) = N_i(\gamma)M_j(\gamma) - N_j(\gamma)M_i(\gamma). \end{gathered}$$

Окончательно получаем следующее выражение для компонент вектора решения $\mathbf{x}^C(\gamma,z)$ при $z \ge -H$

$$\begin{gathered} U(\gamma,z) = x_1 = \left(L_1^1(\gamma,z)Q(\gamma) + L_2^1(\gamma,z)D(\gamma) + L_3^1(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)\right)e^{\gamma z}/\gamma,\\ U'(\gamma,z) = x_2 = \left(L_1^2(\gamma,z)Q(\gamma) + L_2^2(\gamma,z)D(\gamma) + L_3^2(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)\right)e^{\gamma z}/\gamma,\\ W(\gamma,z) = x_3 = \left(L_1^3(\gamma,z)Q(\gamma) + L_2^3(\gamma,z)D(\gamma) + L_3^3(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)\right)e^{\gamma z}/\gamma,\\ W'(\gamma,z) = x_4 = \left(L_1^4(\gamma,z)Q(\gamma) + L_2^4(\gamma,z)D(\gamma) + L_3^4(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)\right)e^{\gamma z}/\gamma,\\ P(\gamma,z) = x_5 = L_3^5(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma,\\ P'(\gamma,z) = x_6 = L_3^6(\gamma,z)\kappa Y(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma,\\ L_1^i(\gamma,z) = \left(k_1^1(\gamma)a_2^i(\gamma,z) - k_2^1(\gamma)a_1^i(\gamma,z)\right)\gamma,\\ L_2^i(\gamma,z) = \left(k_1^2(\gamma)a_2^i(\gamma,z) - k_2^2(\gamma)a_1^i(\gamma,z)\right)\gamma,\\ L_3^i(\gamma,z) = \left(k_1^3(\gamma)a_2^i(\gamma,z) - k_2^3(\gamma)a_1^i(\gamma,z) - \frac{a_3^i(\gamma,z)}{O_3(\gamma)}\right)\gamma. \end{gathered} \tag{34}$$

Введём обозначения

$$\begin{gathered} I_{1i}^k(r,z) = \int_0^\infty L_1^k(\gamma,z)Q(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)d\gamma, (k=1,2\ i=1),(k=3,4\ i=0)\\ I_{2i}^k(r,z) = \int_0^\infty L_2^k(\gamma,z)D(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)d\gamma, (k=1,2\ i=1),(k=3,4\ i=0)\\ I_{3i}^k(r,z) = \int_0^\infty \kappa\cdot L_3^k(\gamma,z)Y(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)d\gamma,\ (k=1,2\ i=1),(k=3,4,5,6\ i=0)\\ J_{1i}^k(r,z) = \int_0^\infty L_1^k(\gamma,z)Q(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)\gamma d\gamma, (k=2\ i=0),(k=4\ i=1)\\ J_{2i}^k(r,z) = \int_0^\infty L_2^k(\gamma,z)D(\gamma e^{\gamma z}J_i(\gamma r)\gamma d\gamma), (k=2\ i=0),(k=4\ i=1)\\ J_{3i}^k(r,z) = \int_0^\infty \kappa\cdot L_3^k(\gamma,z)Y(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)\gamma d\gamma, (k=2\ i=0),(k=4\ i=1) \end{gathered} \tag{35}$$

В соответствии с (10)—(12) запишем выражения для смещений, порового давления и деформаций.

$$
\begin{gathered}
u(r,z)=-\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z),\ w(r,z)=\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{3}(r,z),\\
p(r,z)=I_{30}^{5}(r,z),\ \frac{\partial p(r,z)}{\partial z}=I_{30}^{6}(r,z),\\
\frac{\partial u(r,z)}{\partial z}=-\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{2}(r,z),\ \varepsilon_z=\frac{\partial w(r,z)}{\partial z}=\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{4}(r,z),\\
\varepsilon_r=\frac{\partial u(r,z)}{\partial r}=-\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{1}(r,z)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z),\\
\frac{\partial w(r,z)}{\partial r}=-\sum_{i=1}^{3} J_{i_1}^{4}(r,z),\ \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{2}(r,z)-\sum_{i=1}^{3} J_{i_1}^{4}(r,z)\right),\\
\varepsilon=-\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{1}(r,z)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)+\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{4}(r,z),
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Выражения для напряжений принимают вид

$$
\begin{gathered}
\sigma_r=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\left(-\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{1}(r,z)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)\right)+\\
+\Lambda(z)\left(-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)+\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{4}(r,z)\right)-\alpha(z)I_{30}^{5}(r,z),\\
\sigma_\varphi=-\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)+\\
-\Lambda(z)\left(\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{2}(r,z)-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{2}(r,z)-\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{4}(r,z)\right)-\alpha(z)I_{30}^{5}(r,z),\\
\sigma_z=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\sum_{i=1}^{3} I_{i0}^{4}(r,z)-\Lambda(z)\left(\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{1}(r,z)-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} I_{i_1}^{1}(r,z)\right)-\\
-\alpha(z)I_{30}^{5}(r,z)=\left(\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)\right)\sum_{i=1}^{3} I_{i_0}^{4}(r,z)-\Lambda(z)\sum_{i=1}^{3} J_{i_0}^{1}(r,z),\\
\tau_{rz}=-\mathrm{M}(z)\left(\sum_{i=1}^{3} I_{i1}^{2}(r,z)+\sum_{i=1}^{3} J_{i_1}^{4}(r,z)\right),\\
\alpha(z)=\frac{3\left(\nu_0-\nu(z)\right)}{B(z)\left(1-2\nu(z)\right)\left(1+\nu_0\right)}
\end{gathered}
\tag{37}
$$

Заключение. В работе рассмотрена постановка осесимметричной задачи для пороупругого полупространства с функционально-градиентным покрытием. Получены представления для напряжений, смещений, порового давления и деформаций, возникающих под воздействием равномерной нормальной и касательных нагрузках.

Библиографический список

1. Глаговский, Б. В. Контактные задачи теории консолидации / Б. В. Глаговский // Механика контактных взаимодействий / Б. М. Нуллер. — Москва : Физматлит, 2001. — С. 566—582.
2. Yue, Z. Q. On the asymmetric indentation of a consolidating poroelastic half space / Z. Q. Yue, A. P. S. Selvadurai // Applied Mathematical Modelling. — 1994. — 18 (4). — Pp. 170—185.
3. Rojstaczer, S. The influence of formation material properties on the response of water levels in wells to Earth tides and atmospheric loading. / D. S. Agnew // J. Geophys. Res. — 1989. — V. 94. — Pp. 12403—12411.
4. Айзикович, С. М. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С. М. Айзикович [и др.]. — Москва : Физматлит, 2006. — 240 с.
5. Айзикович, С. М. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С. М. Айзикович. — Москва : Физматлит, 2011. — 192 с.

6. Керчман, В. И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства / В. И. Керчман // Изв. АН СССР, МТТ. — 1976. — № 1. — С. 45—47.

7. Бабешко, В. А. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27, № 1. — С. 93—101.

Материал поступил в редакцию 26.10.2012.

References

1. Glagovskiy, B. V., Nuller, B. M. Kontaktny`e zadachi teorii konsolidacii. V kn. "Mexanika kontaktny`x vzaimodejstvij". [Contact problems of consolidation theory. In book "Contact interaction mechanics".] Moscow : Fizmatlit, 2001, pp. 566—582 (in Russian).

2. Yue, Z. Q., Selvadurai, A. P. S. On the asymmetric indentation of a consolidating poroelastic half space. Applied Mathematical Modelling, 1994, April, 18 (4), pp. 170—185.

3. Rojstaczer, S., Agnew, D. S. The influence of formation material properties on the response of water levels in wells to Earth tides and atmospheric loading. J. Geophys. Res., 1989, vol. 94, pp. 12403—12411.

4. Aizikovich, S. M., Belokon, A. V., Krenev, L. I., Trubchik, I. S. Kontaktny`e zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodny`x sred. [Contact problems of elasticity theory for nonhomogeneous media.] Moscow: Fizmatlit, 2006, 240 p. (in Russian).

5. Aizikovich, S. M. Analiticheskie resheniya smeshanny`x osesimmetrichny`x zadach dlya funkcional`no-gradientny`x sred. [Analytical solution to mixed axisymmetric problems for functionally-graded media.] Moscow : Fizmatlit, 2011, 192 p. (in Russian).

6. Kerchman, V. I. Zadachi konsolidacii i svyazannoj termouprugosti dlya deformiruemogo poluprostranstva. [Consolidation and coupled thermoelasticity problems for deformable half-space.] Izvestiya AN SSSR, MTT, 1976, no. 1, pp. 45—47 (in Russian).

7. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. Metody` postroeniya matricy` Grina stratificirovannogo uprugogo poluprostranstva. [Construction methods for Green matrix of stratified elastic half-space.] Zhurnal vy`chislitel`noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 93—101 (in Russian).

AXISYMMETRIC CONTACT CONSOLIDATION PROBLEM FOR CONTINUOUSLY NONHOMOGENEOUS IN DEPTH HALF-SPACE[1]

L. N. Yevich
(Don State Technical University)

The statement of the axisymmetric consolidation problem for a porous, non-homogeneous in-depth half-space, and the construction of the fundamental solution to defining the displacement fields, strains, stresses, and pore pressure under the given boundary conditions are considered. The solution to the equations describing the porous medium stress under the shear force, and under the normal and radial loads is considered absolutely and irrespectively. Hankel integral transform which allows converting the problem to the solution of the ordinary differential second-order system is used. Expressions for stresses, displacements, pore pressure, and strains in the form of integral expressions are obtained through the simulating function method. The resulting solutions allow considering the problem with various types of the mixed boundary conditions: only on elasticity, only on filtration, or with the change of the type of both conditions.
Keywords: *porosity, axisymmetric problem, consolidation, non-homogeneous half-space.*

[1] The research is done within the frame of the independent R&D.