

УДК 539.3

Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами¹**А. О. Ватульян, Д. С. Шведов**

(Донской государственный технический университет)

В рамках плоской деформации рассмотрена задача об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного пористого упругого слоя с пустыми порами. Нижняя грань слоя сцеплена с абсолютно жёстким основанием, колебания вызываются поверхностной нагрузкой на верхней грани. При известных законах неоднородности для аналогов параметров Ляме — положительных функциях вертикальной координаты — колебания слоя описываются системой трёх уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. С помощью преобразования Фурье и обращения некоторых операторов задача сведена к системе трёх интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Предложен численный метод нахождения трансформант на основе метода коллокаций. С помощью численного обращения преобразования Фурье осуществлён расчёт вектора смещения и функции относительного объёма.

Ключевые слова: пороупругость, система интегральных уравнений Фредгольма второго рода, функция относительного объёма.

Введение. Теория пористых линейно упругих материалов с пустотами первоначально была разработана Коуином и Нунциато [1]. Она предназначена для моделирования упругих материалов, содержащих распределение малых пор (рис. 1). Главной особенностью данной теории является введение в определяющие соотношения новой переменной, характеризующей относительный объём пор, который берётся в качестве независимой кинематической переменной. Включение новой переменной требует дополнительных сил для обеспечения равновесия объёма пор. Если объём пор обращается в ноль, поведение материала описывается классической теорией упругости.

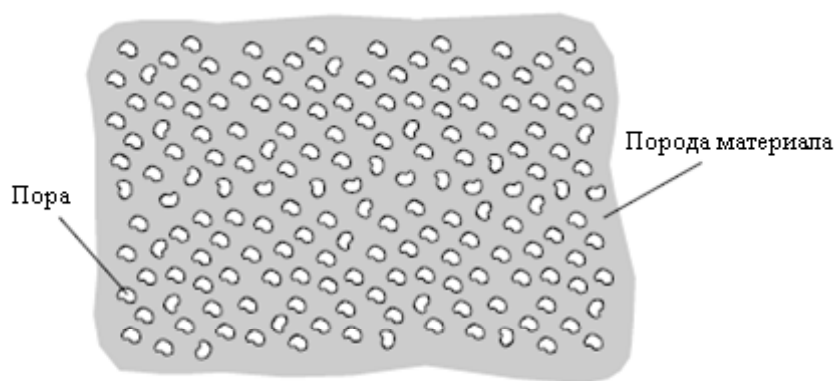


Рис. 1. Упругая среда с распределёнными порами

Теория Коуина—Нунциато хорошо описывает поведение композитных, керамических, пенных и пористых материалов. При этом ряд функционально-градиентных материалов отличается тем, что распределение физических характеристик неравномерно, что приводит к их зависимости от координат.

Настоящая работа посвящена исследованию колебаний неоднородного по толщине пороупругого слоя с пустыми порами.

¹ Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

Постановка задачи. Рассмотрим двумерную задачу об установившихся колебаниях с частотой Ω неоднородного изотропного пористого упругого слоя $0 \leq y \leq h$, $|x| < \infty$. Нижняя грань слоя горизонтальна и сцеплена с абсолютно жёстким основанием.

Необходимо найти поля перемещений в слое $\bar{u}(x, y) = \{u, v\} e^{-i\Omega t}$ и функцию относительного объёма $\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y) e^{-i\Omega t}$ при известных законах неоднородности под действием нагрузок, приложенных к верхней границе слоя.

Считая режим колебаний установившимся, отделим временной множитель $e^{-i\Omega t}$. Будем рассматривать амплитудные значения функций.

Уравнения движения имеют вид [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \rho\Omega^2 u = 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \rho\Omega^2 v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений находятся из следующих определяющих соотношений [2]:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xx}}{\lambda + 2\mu} = u'_x + (1 - 2c^2)v'_y + H\Phi, \\ \frac{\sigma_{yy}}{\lambda + 2\mu} = (1 - 2c^2)u'_x + v'_y + H\Phi, \\ \sigma_{xy} = \mu(u'_y + v'_x), \end{cases} \quad (2)$$

где $H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}$, $1 - 2c^2 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$.

Полевые характеристики задачи должны быть подчинены следующему уравнению [2]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{a} \Phi - \frac{\beta}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Соответствующие граничные условия для слоя могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & \sigma_{xy}(x, h) = \tau(x), \\ v(x, 0) = 0, & \sigma_{yy}(x, h) = \sigma(x), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0) = 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, h) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda = \lambda(y)$, $\mu = \mu(y)$ — положительные функции координаты y , являющиеся аналогами параметров Ляме, ρ — массовая плотность материала; a, β, ξ, ω, k — положительные физические параметры, связанные с пористостью [1].

Система интегральных уравнений Фредгольма 2 рода. Отметим, что в представленной постановке колебания описываются системой уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Наиболее эффективным средством анализа колебаний в слое является использование преобразования Фурье по переменной x и сведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3].

Функция

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx$$

называется прямым преобразованием Фурье $f(x)$.

В свою очередь, функция

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds$$

называется обратным преобразованием Фурье и с физической точки зрения это выражение представляет собой интегральную запись принципа суперпозиции гармоник с комплексной амплитудой и волновым числом s с непрерывным спектром.

Системы (1), (2) и уравнение (3) в образах Фурье выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} -is\tilde{\sigma}_{xx} + \frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{xy} + \rho\Omega^2\tilde{u} = 0, \\ -is\tilde{\sigma}_{xy} + \frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{yy} + \rho\Omega^2\tilde{v} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xx} = -is\tilde{u}(\lambda + 2\mu) + (1 - 2c^2)(\lambda + 2\mu)\frac{d}{dy}\tilde{v} + H\tilde{\Phi}(\lambda + 2\mu), \\ \tilde{\sigma}_{yy} = (1 - 2c^2)(\lambda + 2\mu)(-is)\tilde{u} + (\lambda + 2\mu)\frac{d}{dy}\tilde{v} + H\tilde{\Phi}(\lambda + 2\mu), \\ \tilde{\sigma}_{xy} = \mu\left(\frac{d}{dy}\tilde{u} - is\tilde{v}\right) = \mu\frac{d}{dy}\tilde{u} - \mu is\tilde{v}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\tilde{\Phi} + \left(\frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{a} - s^2\right)\tilde{\Phi} - \frac{\beta}{a}\left(\frac{d}{dy}\tilde{v} - is\tilde{u}\right) = 0. \quad (7)$$

Если из (5)–(7) выразить функции $\frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{xy}$, $\frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{yy}$, $\frac{d}{dy}\tilde{u}$, $\frac{d}{dy}\tilde{v}$, $\frac{d^2}{dy^2}\tilde{\Phi}$, исключить $\tilde{\sigma}_{xx}$, а также

ввести $\frac{d}{dy}\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi}$, получается каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений

1-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{xy} = is\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\tilde{\sigma}_{yy} - \left[\rho\Omega^2 - 4s^2\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\right]\tilde{u} + is2\mu H\tilde{\Phi}, \\ \frac{d}{dy}\tilde{\sigma}_{yy} = is\tilde{\sigma}_{xy} - \rho\Omega^2\tilde{v}, \\ \frac{d}{dy}\tilde{u} = \frac{1}{\mu}\tilde{\sigma}_{xy} + is\tilde{v}, \\ \frac{d}{dy}\tilde{v} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\tilde{\sigma}_{yy} + is\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\tilde{u} - H\tilde{\Phi}, \\ \frac{d}{dy}\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi}, \\ \frac{d}{dy}\tilde{\Psi} = \frac{\beta}{a(\lambda + 2\mu)}\tilde{\sigma}_{yy} - 2is\frac{\beta}{a}\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\tilde{u} - \left(\frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{a} - s^2 + \frac{\beta}{a}H\right)\tilde{\Phi}. \end{cases} \quad (8)$$

Граничные условия в образах Фурье имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{u}(s, 0) = 0, & \tilde{\sigma}_{xy}(s, h) = \tilde{\tau}(s), \\ \tilde{v}(s, 0) = 0, & \tilde{\sigma}_{yy}(s, h) = \tilde{\sigma}(s), \\ \frac{d\tilde{\Phi}}{dy}(s, 0) = 0, & \frac{d\tilde{\Phi}}{dy}(s, h) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Краевая задача для системы функций (8), (9) после введения безразмерных переменных и параметров приведена к следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{y}{h}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{1}{h} \frac{d}{dz}, \quad (y \in [0, h] \rightarrow z \in [0, 1]), \\
 Q_{xy}(s, z) &= \frac{\tilde{\sigma}_{xy}(s, z)}{\mu_0}, \quad Q_{yy}(s, z) = \frac{\tilde{\sigma}_{yy}(s, z)}{\mu_0}, \quad U(s, z) = \frac{\tilde{u}(s, z)}{h}, \\
 V(s, z) &= \frac{\tilde{v}(s, z)}{h}, \quad \Phi(s, z) = \tilde{\Phi}(s, z), \\
 \lambda_1(z) &= \frac{\lambda(z)}{\mu_0}, \quad \mu_1(z) = \frac{\mu(z)}{\mu_0}, \\
 H_1(z) &= \frac{\beta}{\mu_0(\lambda_1(z) + 2\mu_1(z))}, \\
 \mu_0 &= \mu(h), \quad \rho_0 = \rho(h), \quad \tau_0(s) = \frac{\tilde{\tau}(s)}{\mu_0}, \quad \sigma_0(s) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\mu_0}.
 \end{aligned}$$

После замены для получения вещественных коэффициентов в вырожденной системе ($\omega = 0$)

$$iU = U_1, \quad iQ_{xy} = Q_1, \quad Q_{yy} = Q_2, \quad (10)$$

она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dz} Q_1 = -hs \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} Q_2 + \left[4s^2 h^2 \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{\rho\Omega^2 h^2}{\mu_0} \right] U_1 - 2hs\mu_1 H_1 \Phi, \\
 \frac{d}{dz} Q_2 = hsQ_1 - \frac{\rho\Omega^2 h^2}{\mu_0} V, \\
 \frac{d}{dz} U_1 = \frac{1}{\mu_1} Q_1 - hsV, \\
 \frac{d}{dz} V = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} Q_2 + hs \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} U_1 - H_1 \Phi, \\
 \frac{d}{dz} \Phi = \Psi, \\
 \frac{d}{dz} \Psi = \frac{\beta h^2}{\alpha(\lambda_1 + 2\mu_1)} Q_2 - 2s \frac{\beta h^3}{\alpha} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} U_1 - \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho K\Omega^2 - \xi}{\alpha} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{\alpha} H_1 \right) \Phi.
 \end{cases} \quad (11)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases}
 U_1(s, 0) = 0, \\
 V(s, 0) = 0, \\
 \Psi(s, 0) = 0.
 \end{cases}
 \begin{cases}
 Q_1(s, 1) = i\tau_0(s), \\
 Q_2(s, 1) = \sigma_0(s), \\
 \Psi(s, 1) = 0.
 \end{cases} \quad (12)$$

В общем случае построение решения канонической системы дифференциальных уравнений (11) с переменными коэффициентами в аналитической форме невозможно, поэтому осуществляется её сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Интегрируя систему (11), учитывая граничные условия (12) и осуществляя элементарные преобразования, получим систему уравнений Фредгольма 2 рода с непрерывными ядрами (отметим, что все неизвестные функции зависят от параметра преобразования Фурье):

$$\begin{cases} Q_2 = \int_0^1 (G_1 Q_2(\eta) + G_2 U_1(\eta) + G_3 \Phi(\eta)) d\eta - i h s \tau_0 (1 - z) + \sigma_0, \\ U_1 = - \int_0^1 (G_4 Q_2(\eta) + G_5 U_1(\eta) + G_6 \Phi(\eta)) d\eta + i \tau_0 w(z), \\ \Phi = \int_0^1 (G_7 Q_2(\eta) + G_8 U_1(\eta) + G_9 \Phi(\eta)) d\eta, \end{cases} \quad (13)$$

$$G_i = G_i(z, \eta), \quad i = 1..9.$$

Ядра системы имеют вид:

$$\begin{aligned} G_1(z, \eta) &= -s^2 h^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_1 + \frac{\Omega^2 h^2}{\mu_0} \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_2, \\ G_2(z, \eta) &= \left(4s^3 h^3 \frac{\mu_1 (\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{\rho \Omega^2 s h^3}{\mu_0} \right) K_1 + \frac{\Omega^2 s h^3}{\mu_0} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_2, \\ G_3(z, \eta) &= -2s^2 h^2 \mu_1 H_1 K_1 - \frac{\Omega^2 h^2}{\mu_0} H_1 K_2, \\ G_4(z, \eta) &= -hs \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_3 + hs \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_4, \\ G_5(z, \eta) &= \left(4s^2 h^2 \frac{\mu_1 (\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{\rho \Omega^2 h^2}{\mu_0} \right) K_3 + s^2 h^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} K_4, \\ G_6(z, \eta) &= -2hs \mu_1 H_1 K_3 - hs H_1 K_4, \\ G_7(z, \eta) &= \frac{\beta h^2}{a(\lambda_1 + 2\mu_1)} \left(K_4 + \frac{1 - K_5 - K_6}{I} \right), \\ G_8(z, \eta) &= -2s \frac{\beta h^3}{a} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(K_4 + \frac{1 - K_5 - K_6}{I} \right), \\ G_9(z, \eta) &= - \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho k \Omega^2 - \xi}{a} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{a} H_1 \right) \left(K_4 - \frac{K_5 + K_6}{I} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_i &= K_i(z, \eta), \quad i = 1..6; \quad \lambda_1 = \lambda_1(\eta), \quad \mu_1 = \mu_1(\eta), \\ K_1(z, \eta) &= \max\{z, \eta\} - z, \\ K_2(z, \eta) &= \int_{\min\{z, \eta\}}^{\max\{z, \eta\}} \rho d\varsigma, \\ K_3(z, \eta) &= \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{1}{\mu_1} d\varsigma, \\ K_4(z, \eta) &= z - \min\{z, \eta\}, \\ K_5(z, \eta) &= \int_{\min\{z, \eta\}}^z g(v) dv, \\ K_6(z, \eta) &= \int_{\max\{z, \eta\}}^1 g(v) dv, \\ g(\eta) &= - \int_{\eta}^1 \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho k \Omega^2 - \xi}{a} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{a} H_1 \right) d\varsigma, \\ w(z) &= \int_0^z \frac{1}{\mu_1} d\varsigma, \\ I &= - \int_0^1 \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho k \Omega^2 - \xi}{a} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{a} H_1 \right) d\eta. \end{aligned}$$

Численный метод решения системы интегральных уравнений и обращения преобразования Фурье. Осуществим дискретизацию системы интегральных уравнений Фредгольма 2 рода (13), используя квадратурную формулу трапеций [4, 5] и метод коллокаций. Придём к следующей алгебраической системе:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{n-1}, \quad x_i = st(i-1), \quad i=1, \dots, n, \\ A_1 &= A_n = \frac{\Delta x}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = \Delta x, \\ \begin{cases} Q_{2i} - \sum_{j=1}^n A_j (G_{1ij} Q_{2j} + G_{2ij} U_{1j} + G_{3ij} \Phi_j) = \sigma_0 - ihs\tau_0(1-z_i), \\ U_{1i} + \sum_{j=1}^n A_j (G_{4ij} Q_{2j} + G_{5ij} U_{1j} + G_{6ij} \Phi_j) = i\tau_0 w_i, \\ \Phi_i - \sum_{j=1}^n A_j (G_{7ij} Q_{2j} + G_{8ij} U_{1j} + G_{9ij} \Phi_j) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Значения остальных функций в соответствующих узловых точках Q_{1i}, V_i, ψ_i находятся из интегральных представлений:

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= i\tau_0 - \int_z^1 \left(-hs \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} Q_2 + \left[4s^2 h^2 \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{\rho\Omega^2 h^2}{\mu_0} \right] U_1 - 2hs\mu_1 H_1 \Phi \right) ds, \\ V(z) &= \int_0^z \left(\frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} Q_2 + hs \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} U_1 - H_1 \Phi \right) dz, \\ \psi(z) &= \int_0^z \left(\frac{\beta h^2}{a(\lambda_1 + 2\mu_1)} Q_2 - 2s \frac{\beta h^3}{a} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} U_1 - \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{a} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{a} H_1 \right) \Phi \right) dz. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых значений параметра преобразования можно найти узловые значения переменных, и далее требуется построение обратного преобразования Фурье. Для численного осуществления обратного преобразования Фурье, т. е. для вычисления интеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds,$$

используем интерполяционную формулу третьей степени, являющуюся аналогом «правила трёх восьмых» Ньютона-Котеса [5, 6]. Оно получается при замене функции F на каждом из отрезков $[0, 3h_1], [3h_1, 6h_1], \dots$ алгебраическим многочленом третьей степени, интерполирующим F по четырём значениям.

Возьмём четыре точки $s_k, s_{k+1}, s_{k+2}, s_{k+3}$ и выполним интерполирование F по её значениям в этих точках:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s-s_{k+1})(s-s_{k+2})(s-s_{k+3})}{-h_1(-2h_1)(-3h_1)} F_k + \frac{(s-s_k)(s-s_{k+2})(s-s_{k+3})}{-h_1(-h_1)(-2h_1)} F_{k+1} + \\ &+ \frac{(s-s_k)(s-s_{k+1})(s-s_{k+3})}{2h_1 \cdot h_1(-h_1)} F_{k+2} + \frac{(s-s_k)(s-s_{k+1})(s-s_{k+2})}{3h_1 \cdot 2h_1 \cdot h_1} F_{k+3} + r_3(s). \end{aligned}$$

Умножение этого равенства на e^{-isx} и интегрирование по отрезку $[s_k, s_k + 3h_1]$ с последующим суммированием по значениям $k = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$ приводит к представлению:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds = \frac{(y_3 - i\delta_3)}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{3k+1} e^{-i3k\theta} + \frac{(y_3 + i\delta_3)}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{3k-1} e^{-i3k\theta} + \frac{a_3}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{3k} e^{-i3k\theta} + \frac{R(x)}{2\pi} \quad (15)$$

где

$$R(x) = \frac{h_1^5}{6} \int_0^3 d\xi_1 \int_0^3 d\tau_1 \left[(\xi_1 - \tau_1)^3 E(\xi_1 - \tau_1) - \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 2)(\xi_1 - 3)(1 - \tau_1)^3 E(1 - \tau_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1)(\xi_1 - 3)(2 - \tau_1)^3 E(2 - \tau_1) - \frac{1}{6} \xi_1 (\xi_1 - 1)(\xi_1 - 2)(3 - \tau_1)^3 \right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} F^{(4)}(s_k + h_1 \tau_1) e^{-i(s_{3k} + h_1 \xi_1)x}, \\ E(s) = \begin{cases} 1, s > 0, \\ \frac{1}{2}, s = 0, \\ 0, s < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты a_3, γ_3, δ_3 имеют вид:

$$\theta = x h_1, \\ h_1^{-1} a_3 = \frac{11}{6} \theta^{-2} - \theta^{-4} + \left(\theta^{-4} - \frac{1}{3} \theta^{-2} \right) \cos 3\theta + \theta^{-3} \sin 3\theta, \\ h_1^{-1} \gamma_3 = 3\theta^{-4} - 3\theta^{-2} + 3 \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} - \theta^{-4} \right) \cos 3\theta - 4\theta^{-3} \sin 3\theta, \\ h_1^{-1} \delta_3 = 5\theta^{-3} + 3 \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} - \theta^{-4} \right) \sin 3\theta + 4\theta^{-3} \cos 3\theta.$$

Стоит отметить, что численный эксперимент проводился для $n = 30$ узловых значений при точности $\varepsilon = 0,001$.

Расчёт полей смещений и функции относительного объёма при некоторых законах неоднородности. В качестве примеров реализации предложенной схемы рассмотрим возрастающие и убывающие функции, характеризующие законы неоднородности в случае сосредоточенной и распределённой нагрузки.

Для сосредоточенной нагрузки находим:

$$\sigma_0(x) = \delta(x); \quad \sigma_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{isx} dx = 1, \\ \tau_0(x) = \delta(x); \quad \tau_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{isx} dx = 1.$$

Для равномерно распределённой на отрезке нагрузки получим:

$$\begin{cases} \sigma_0(x) = \sigma_0, & |x| \leq a; \\ \sigma_0(x) = 0, & |x| > a; \end{cases} \quad \sigma_0(s) = \sigma_0 \frac{\sin(as)}{s}, \\ \begin{cases} \tau_0(x) = \tau_0, & |x| \leq a; \\ \tau_0(x) = 0, & |x| > a; \end{cases} \quad \tau_0(s) = \tau_0 \frac{\sin(as)}{s},$$

где a — полудлина области приложения нагрузки.

Будем рассматривать законы неоднородностей, для которых выполняются следующие равенства:

$$\int_0^1 \lambda_1(z) dz = 1, \quad \int_0^1 \mu_1(z) dz = 1, \quad \rho(z) = 1. \quad (16)$$

Согласно физическому смыслу параметры Ляме должны удовлетворять условию:

$$0 < \frac{\lambda_1(z)}{2(\lambda_1(z) + \mu_1(z))} < \frac{1}{2} \quad \forall z \in [0; 1]. \quad (17)$$

Рассмотрим некоторый закон, удовлетворяющий условиям (16), (17):

$$\lambda_1(z) = z + 0,5, \mu_1(z) = 1,5 - z.$$

Пусть $h = 0,5$; $\alpha = 0,01$; $\beta = 10$; $\omega = 0,01$; $\xi = 15$; $k = 0,01$; $\Omega = 100$, а также

$$\sigma_0(s) = 1; \tau_0(s) = 0.$$

Ниже приведены графики полей перемещения и функции относительного объёма. Сплошной линией обозначена действительная часть, пунктирной — мнимая часть.

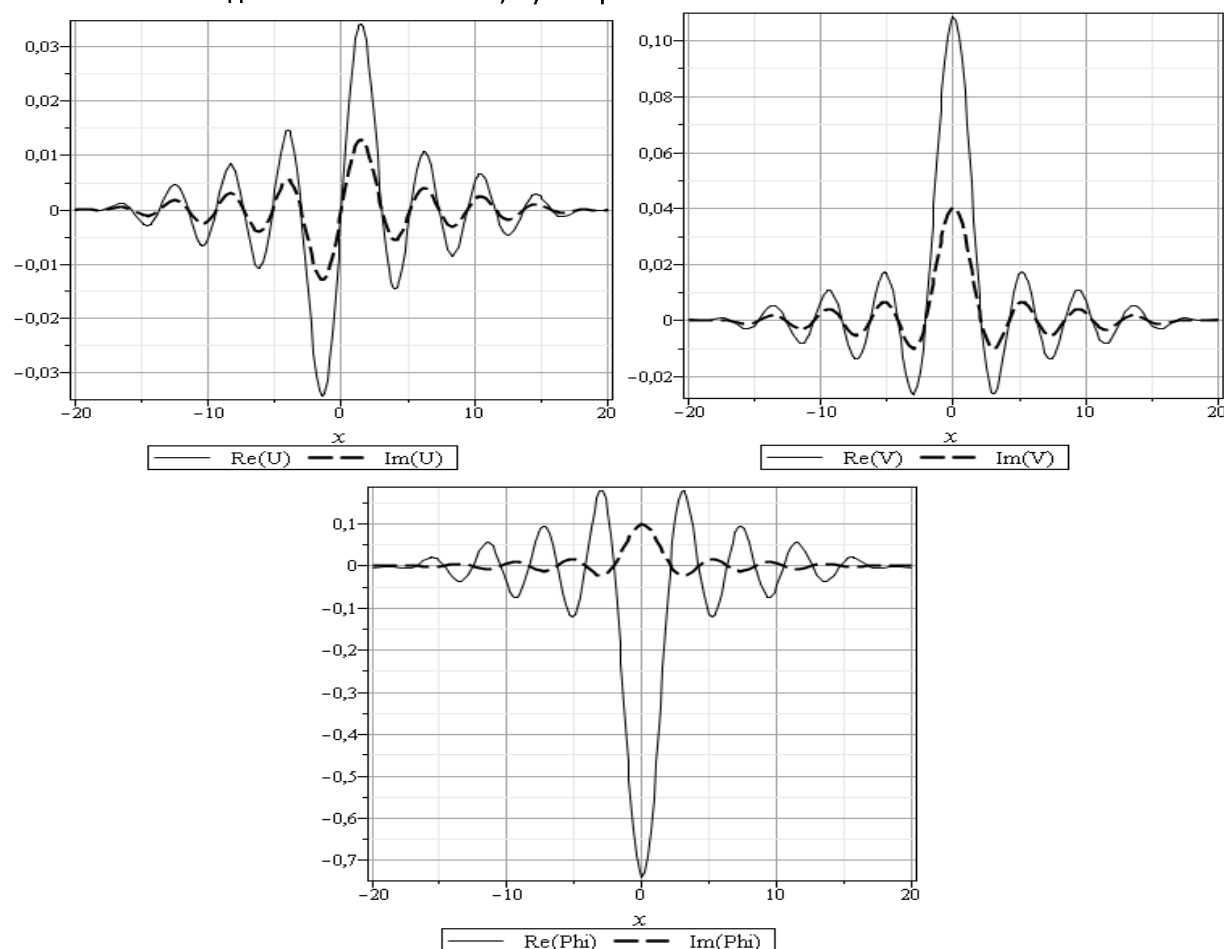


Рис. 2. Поля перемещений в слое и функция относительного объёма

Заключение. Разработан метод решения краевой задачи для неоднородного пороупругого слоя, позволяющий находить поля внутри и на поверхности для широкого класса неоднородностей.

Библиографический список

1. Cowin, S. C. Linear elastic materials with voids / S. C. Cowin, J. W. Nunziato // J. Elasticity. — 1983. — V. 13, № 2. — Pp. 125—147.
2. Скалия, А. Гармонические колебания жёсткого штампа на пористо упругом слое / А. Скалия // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, вып. 3 — С. 484—491.
3. Бабешко, В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. — Москва : Наука, 1989. — 343 с.
4. Манжиров, А. В. Методы решения интегральных уравнений: справочник / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — Москва : Факториал, 1999. — 272 с.
5. Крылов, В. И. Приближённое вычисление интегралов / В. И. Крылов. — Москва : Наука, 1967. — 500 с.

6. Крылов, В. И. Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. — Москва : Наука, 1974. — 600 с.

Материал поступил в редакцию 28.11.2012.

References

1. Cowin, S. C., Nunziato, J. W. Linear elastic materials with voids. J. Elasticity, 1983, vol. 13, no. 2, pp. 125–147.
2. Skaliya, A. Garmonicheskie kolebaniya zhestkogo shtampa na poristo uprugom sloe. [Harmonic vibrations of a rigid stamp on porous elastic layer.] Prikladnaya matematika i mexanika, 2009, vol. 73, iss. 3, pp. 484–491 (in Russian).
3. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Zinchenko, Z. F. Dinamika neodnorodny`x linejno-uprugix sred. [Nonhomogenous linear-elastic media dynamics] Moscow : Nauka, 1989, 343 p. (in Russian).
4. Manzhirov, A. V., Polyanin, A. D. Metody` resheniya integral`ny`x uravnenij : spravochnik. [Integral equation solution methods: reference guide.] Moscow : Faktorial, 1999, 272 p. (in Russian).
5. Krylov, V. I. Priblizhennoe vy`chislenie integralov. [Integral approximate computation.] Moscow : Nauka, 1967, 500 p. (in Russian).
6. Krylov, V. I., Skoblya, N. S. Metody` priblizhennogo preobrazovaniya Fur`e i obrashheniya preobrazovaniya Laplasa. [Fourier approximate transformation methods and Laplace transformation inversions.] Moscow : Nauka, 1974, 600 p. (in Russian).

OSCILLATIONS OF INHOMOGENEOUS POROELASTIC LAYER WITH VOIDS¹

A. O. Vatulyan, D. S. Shvedov

(Don State Technical University)

As part of the plane strain, the problem on steady oscillations of the inhomogeneous through-thickness isotropic poroelastic layer with voids is considered. The layer bottom is connected with the perfectly rigid foundation, the oscillations are caused by the surface stress on the top face. Under the known inhomogeneity laws for Lamé parameter analogs – positive functions of the vertical coordinate – the layer oscillations are described by the system of three partial differential second-order equations with variable coefficients. Using the Fourier transform and some access statements, the problem is reduced to the system of three Fredholm integral equations of the second kind with continuous kernels. The numerical technique is proposed for identifying the transforms by the collocation method. The displacement vector and the relative volume are calculated using numerical inverse Fourier transform.

Keywords: poroelasticity, system of Fredholm integral equations of the second kind, relative volume function.

¹ The research is done within the frame of the independent R&D.