

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Определение изменения формы поверхности непрерывно-неоднородного термоупругого полупространства при локальном нагреве¹**Л. И. Кренёв, С. М. Айзикович, Б. И. Митрин**

(Донской государственный технический университет)

Рассматривается осесимметричная квазистатическая задача термоупругости для функционально-градиентного полупространства, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициенты теплопроводности и линейного расширения которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое. Предполагается, что область внутри круга нагревается источником тепла с постоянной во времени температурой. Вне круга поверхность идеально теплоизолирована. Для решения задачи используются аналитические методы, в частности, аппарат интегральных преобразований Ханкеля. Решение задачи на первом этапе сводится к решению краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами шестого порядка. Для организации устойчивого процесса численного построения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется метод модулирующих функций. В результате решение смешанной граничной задачи сводится к построению решения парного интегрального уравнения. Свойства трансформанты ядра интегрального уравнения задачи позволяют применить хорошо обоснованный и развиваемый в настоящее время двусторонний асимптотический метод. С помощью данного метода найдены в аналитическом виде приближённые выражения величины теплового потока и смещения поверхности полупространства. Приведены численные результаты, отражающие искривление поверхности неоднородного полупространства для различных случаев изменения механических и температурных свойств в приповерхностном слое под действием равномерной температуры в пределах единичного круга. Рассматриваются случаи, когда значения термоупругих свойств покрытия совпадают со значениями термоупругих свойств подложки, либо когда значение характеристики отличается в 2 раза (в большую или в меньшую сторону) на поверхности и линейно убывает (или растёт) по глубине до значения характеристики в подложке. Показано, что максимальное влияние на величину максимального выпора поверхности оказывает разнонаправленное изменение коэффициентов теплопроводности и линейного расширения в покрытии.

Ключевые слова: смешанные задачи, неоднородные материалы, термоупругость, функционально-градиентные материалы, аналитические методы

Введение. Учёт неоднородности свойств материала при моделировании тепломеханического воздействия является актуальной задачей термоупругости. Такая задача возникает, например, при исследовании свойств защитных покрытий из функционально-градиентных материалов для частей машин и механизмов, подвергающихся интенсивному тепломеханическому воздействию. Подробное изложение основ термоупругости представлено в монографиях В. Новацкого [1] и А. Д. Коваленко [2]. Среди тех, кто активно занимается решением контактных термоупругих задач для однородных тел, стоит отметить Дж. Р. Барбера. В его работе [3] приводятся аналитические и численные методы решения задачи термоупругой устойчивости, а также приводятся результаты по изучению термоупругих деформаций.

В последнее время в отечественной и зарубежной научной литературе наблюдается растущий интерес к решению задач термоупругости для неоднородных материалов. Для задачи теп-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № 11.519.11.3028, соглашение № 14.В37.21.1632), а также грантов РФФИ (12-07-00639-а, 13-08-01435-а).

лопроводности решения для отдельных видов законов неоднородности (экспоненциальный, линейный законы) приведены в работе [4]. Задача для слоистого покрытия решается в работе И. Г. Величко, И. Г. Ткаченко [5]. Собственный метод решения смешанных задач для экспоненциального закона неоднородности покрытия развивает N. Noda [6—7]. Решение плоской задачи для термоупругого взаимодействия в присутствии трения рассматривали также Liu, Ke, Wang [8].

Аналитические методы для решения термоупругих задач применяет Краснюк П. П. Так, в работе [9] рассмотрено решение плоской задачи контактного взаимодействия жёсткого теплопроводного штампа кругового поперечного сечения с упругим слоем.

Решения, используемые в приведённых выше работах, не могут быть применены для сложных случаев изменения термоупругих и механических свойств по глубине слоя.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная квазистатическая задача термоупругости для функционально-градиентного полупространства, модуль упругости и коэффициенты Пуассона, теплопроводности и линейного расширения которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое. Для её решения используется двусторонне-асимптотический метод, изложенный в статье [10].

Постановка задачи о воздействии локального источника с постоянной температурой на непрерывно-неоднородное полупространство. Рассмотрим полупространство Ω , термо-механические характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины H , а затем стабилизируются и остаются постоянными. С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . При этом полагаем, что $0 \leq r < \infty$, а $z < 0$. Обозначим через u, v, w смещения вдоль осей r, φ, z , а через $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$ — радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно. Кроме того, введём обозначения: для температуры — T , коэффициента теплопроводности — $\lambda_T(z)$, коэффициента линейного расширения — $\alpha_T(z)$, коэффициента теплоёмкости — $c_T(z)$. В ненапряжённом состоянии температуру полупространства примем равной T_0 и будем анализировать разность температур $\theta = T - T_0$.

На площадке $0 \leq r < a$ поддерживается постоянная температура и образуется тепловой поток, направленный внутрь неоднородного полупространства.

Далее будем полагать, что коэффициенты Ламе $M(z)$ и $\Lambda(z)$, коэффициенты теплопроводности $\lambda_T(z)$ и линейного расширения $\alpha_T(z)$ являются непрерывными функциями координаты z , такими, что

$$\begin{aligned} 1. \quad & M(z) = M(-H) = M^S, \quad -\infty \leq z \leq -H \\ & \Lambda(z) = \Lambda(-H) = \Lambda^S, \quad \lambda_T(z) = \lambda_T(-H) = \lambda_T^S, \\ & \alpha_T(z) = \alpha_T(-H) = \alpha_T^S. \\ 2. \quad & M(z) = M^C(z), \quad \Lambda(z) = \Lambda^C(z), \quad -H \leq z \leq 0 \\ & \lambda_T(z) = \lambda_T^C(z), \quad \alpha_T(z) = \alpha_T^C(z). \\ 3. \quad & M^C(-H) = M^S, \quad \Lambda^C(-H) = \Lambda^S, \\ & \lambda_T^C(-H) = \lambda_T^S, \quad \alpha_T^C(-H) = \alpha_T^S. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \min_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) &\geq \Lambda_* > 0, \quad \max_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) \leq \Lambda^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} M(z) &\geq M_* > 0, \quad \max_{z \in (-\infty, 0)} M(z) \leq M^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) &\geq \lambda_{T*} > 0, \quad \max_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) \leq \lambda_T^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) &\geq \alpha_{T*} > 0, \quad \max_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) \leq \alpha_T^* < \infty, \end{aligned}$$

где H — толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим полупространством, то есть глубина, с которой мы полагаем термомеханические характеристики полупространства постоянными; индекс S соответствует подстилающему однородному полупространству; C — неоднородному слою; $\Lambda_*, \Lambda^*, M_*, M^*, \lambda_{T*}, \lambda_T^*, \alpha_{T*}, \alpha_T^*$ — произвольные константы.

Наряду с парой коэффициентов Ламе для описания упругого поведения твёрдого изотропного тела используются: модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν или модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Коэффициенты Ламе Λ и M (иногда обозначаемый G и называемый модулем сдвига) связаны с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и изотермическим модулем объёмного расширения K соотношениями:

$$M = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E = \frac{M(2M+3\Lambda)}{M+\Lambda}, \quad \nu = \frac{\Lambda}{2(M+\Lambda)}, \quad 3K(z) = 3\Lambda(z) + 2M(z). \quad (2)$$

Граничные условия, при сделанных предположениях, имеют вид:

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \theta = \theta_0, & r \leq a, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, & r > a. \end{cases} \quad (3)$$

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при $z = -H$, в силу непрерывности, должны выполняться условия сопряжения по смещениям, их производным, температуре и тепловому потоку:

$$\begin{aligned} \sigma_z^C(r, -H) &= \sigma_z^S(r, -H), \quad \tau_{rz}^C(r, -H) = \tau_{rz}^S(r, -H), \\ u^C(r, -H) &= u^S(r, -H), \quad w^C(r, -H) = w^S(r, -H), \\ \theta^C(r, -H) &= \theta^S(r, -H), \quad (\theta^C)'(r, -H) = (\theta^S)'(r, -H). \end{aligned} \quad (4)$$

На бесконечности при $(r, -H) \rightarrow \infty$ смещения, деформации и напряжения исчезают. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Требуется определить смещение поверхности покрытия:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta(r), \quad r \leq a. \quad (6)$$

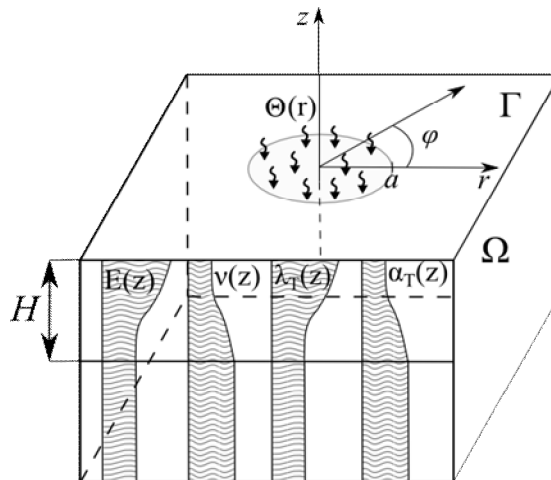


Рис. 1. Постановка задачи об изменении формы поверхности непрерывно-неоднородного термоупругого полупространства при локальном нагреве

Построение решения несмешанной задачи о термическом воздействии на непрерывно-неоднородное полупространство. При сделанных предположениях соответствующая краевая задача статической осесимметричной термоупругости в форме Ламе имеет следующий вид (без учёта кручения):

$$\begin{cases} M(z) \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + M'(z) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = k(z) \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ M(z) \nabla^2 w + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + 2M'(z) \frac{\partial w}{\partial z} + \Lambda'(z) \varepsilon = k'(z) \theta + k(z) \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \lambda_T(z) \nabla^2 \theta + \lambda_T'(z) \theta' = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$M'(z) = \frac{dM(z)}{dz}, \quad \Lambda'(z) = \frac{d\Lambda(z)}{dz}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda_T'(z) = \frac{d\lambda_T(z)}{dz}, \quad k'(z) = \frac{dk(z)}{dz}.$$

Будем искать решение для смещений u, w и температуры θ в виде интегралов Ханкеля:

$$u(r, z) = - \int_0^\infty U(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad w(r, z) = \int_0^\infty W(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \\ \theta(r, z) = \int_0^\infty T(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma. \quad (8)$$

Подставим (8) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (7) и, приравняв к нулю подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} MU'' + \gamma(M + \Lambda)W' - \gamma^2(2M + \Lambda)U + M'U' + \gamma M'W = k\gamma T, \\ (2M + \Lambda)W'' - \gamma(M + \Lambda)U' - \gamma^2 MW + (2M' + \Lambda')W' - \gamma \Lambda'U = k'T + kT', \\ \lambda_T^C (T^C)'' - \gamma^2 \lambda_T^C T^C + (\lambda_T^C)' (T^C)' = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где ' указывает на дифференцирование по z .

Граничные условия (3) примут следующий вид (для общности мы учитываем также возможность приложения в пределах круга радиуса a горизонтального воздействия $q(r)$):

$$T'(\gamma, 0) = -B(\gamma), \\ B(\gamma) = \int_0^\infty \beta(\rho) J_0(\rho \gamma) \rho d\rho. \quad (10)$$

Используя векторное представление для трансформант:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\ x_1 = U, x_2 = U', x_3 = W, x_4 = W', x_5 = T, x_6 = T', \quad (11)$$

запишем систему (9) в матричном виде, при этом явно выделим части соответствующие покрытию и подложке:

$$\frac{d\mathbf{x}^C}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{x}^C, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^S}{dz} = \mathbf{A}^S \mathbf{x}^S, \quad -\infty < z \leq -H, \quad (13)$$

Граничные условия при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} x_6^C(\gamma, 0) &= -B(\gamma), \\ x_1^C(\gamma, 0) &= x_1^S(\gamma, -H), \quad x_3^C(\gamma, 0) = x_3^S(\gamma, -H), \\ x_2^C(\gamma, 0) &= x_2^S(\gamma, -H), \quad x_4^C(\gamma, 0) = x_4^S(\gamma, -H), \\ x_5^C(\gamma, 0) &= x_5^S(\gamma, -H), \quad x_6^C(\gamma, 0) = x_6^S(\gamma, -H). \end{aligned} \quad (14)$$

Необходимо отметить, что последнее условие имеет место в силу непрерывности изменения свойств слоя и основания (4).

Общее решение системы (9) для однородного полупространства $\Lambda' = M' = K' = \lambda'_T = 0$, $M > 0$, $\Lambda > 0$, $K > 0$, $\lambda_T > 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1^S(\gamma, z) &= (d_1 + \gamma z d_2 + (-\kappa_2/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z)d_3)e^{\gamma z}, \\ x_2^S(\gamma, z) &= (d_1 + (1 + \gamma z)d_2 + (\kappa_3/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z)d_3)\gamma e^{\gamma z}, \\ x_3^S(\gamma, z) &= (d_1 + (-\kappa_1 + \gamma z)d_2 + (-\kappa_3/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z)d_3)e^{\gamma z}, \\ x_4^S(\gamma, z) &= (d_1 + (1 - \kappa_1 + \gamma z)d_2 + (\kappa_2/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z)d_3)\gamma e^{\gamma z}, \\ x_5^S(\gamma, z) &= d_3 e^{\gamma z}, \quad x_6^S(\gamma, z) = \gamma d_3 e^{\gamma z}, \\ \kappa_1 &= \frac{\Lambda + 3M}{\Lambda + M}, \quad \kappa_2 = \frac{k}{4(2M + \Lambda)}, \quad \kappa_3 = \frac{k}{4M}, \end{aligned} \quad (15)$$

где d_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольная функция параметра γ .

Решение $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ системы дифференциальных уравнений (12) строится методом модулирующих функций. Будем искать $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ в виде:

$$\mathbf{x}^C(\gamma, z) = \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) \mathbf{a}_i(\gamma, z) e^{\gamma z}. \quad (16)$$

Векторы $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, ($i = 1, 2, 3$) определяются из решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{a}_i - \gamma \mathbf{a}_i, \quad -H \leq z \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

при начальных условиях, для $z = -H$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\gamma, z)|_{z=-H} &= (1, \gamma, 1, \gamma, 0, 0), \\ \mathbf{a}_2(\gamma, z)|_{z=-H} &= (\gamma z, \gamma + \gamma^2 z, -\kappa_1 + \gamma z, \gamma - \kappa_1 \gamma + \gamma^2 z, 0, 0)|_{z=-H}, \\ \mathbf{a}_3(\gamma, z)|_{z=-H} &= (-\kappa_2/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z, \kappa_3 + (\kappa_2 + \kappa_3)\gamma z, -\kappa_3/\gamma + (\kappa_2 + \kappa_3)z, \kappa_2 + (\kappa_2 + \kappa_3)\gamma z, 1, \gamma)|_{z=-H}. \end{aligned}$$

Константы $d_i(\gamma)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются из условия (14).

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) O_i(\gamma) &= -B(\gamma), \\ M_i(\gamma) &= M(0) a_i^2(\gamma, 0) + M(0) \gamma a_i^3(\gamma, 0), \\ N_i(\gamma) &= -\Lambda(0) \gamma a_i^1(\gamma, 0) + (\Lambda(0) + 2M(0)) a_i^4(\gamma, 0) - k(0) a_i^5(\gamma, 0), \\ O_i(\gamma) &= a_i^6(\gamma, 0), \quad O_1(\gamma) = O_2(\gamma) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $a_i^k(\gamma, z)$, ($i = 1, 2, 3$) обозначает k -ю компоненту вектора $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\begin{aligned}d_1 &= -k_1^3(\gamma)B(\gamma), \\d_2 &= k_2^3(\gamma)B(\gamma), \\d_3 &= -k_3^3B(\gamma).\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}k_1^3(\gamma) &= \frac{\Delta_{23}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)}, \\k_2^3(\gamma) &= \frac{\Delta_{13}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)}, \\k_3^3(\gamma) &= \frac{1}{O_3(\gamma)}, \Delta_{ij}(\gamma) = N_i(\gamma)M_j(\gamma) - N_j(\gamma)M_i(\gamma).\end{aligned}$$

Окончательно получаем следующее выражение для компонент вектора решения $\mathbf{x}^c(\gamma, z)$, при $z \geq -H$:

$$\begin{aligned}x_1 &= U(\gamma, z) = (L_3^1(\gamma, z)B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\x_2 &= U'(\gamma, z) = (L_3^2(\gamma, z)B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\x_3 &= W(\gamma, z) = (L_3^3(\gamma, z)B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\x_4 &= W'(\gamma, z) = (L_3^4(\gamma, z)B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\x_5 &= T(\gamma, z) = L_3^5(\gamma, z)B(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma, \\x_6 &= T'(\gamma, z) = L_3^6(\gamma, z)B(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma, \\L_i^j(\gamma, z) &= \left(k_1^3(\gamma)a_2^j(\gamma, z) - k_2^3(\gamma)a_1^j(\gamma, z) + \frac{a_3^j(\gamma, z)}{O_3(\gamma)} \right) \gamma.\end{aligned}\tag{20}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}I_3^k(r, z) &= \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z)B(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)d\gamma, (k=1, 2 \ i=1), (k=3, 4, 5, 6 \ i=0), \\J_{3i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z)B(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r)\gamma d\gamma, (k=2 \ i=0), (k=4 \ i=1).\end{aligned}\tag{21}$$

В соответствии с (8), (16) мы можем теперь выписать выражения для смещений, температуры, теплового потока и деформаций.

$$\begin{aligned}u(r, z) &= I_{31}^1(r, z), w(r, z) = I_{30}^3(r, z), \\ \theta(r, z) &= I_{30}^5(r, z), \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = I_{30}^6(r, z).\end{aligned}\tag{22}$$

Построение замкнутого приближённого численно-аналитического решения смешанной задачи статической теплопроводности о нагреве неоднородного полупространства источником с постоянной температурой в пределах круга радиуса a . Рассмотрим задачу о нагревании функционально-градиентного полупространства с поверхности источником с постоянной температурой в пределах круга радиуса a . Из (21)—(22) следует, что

$$\theta(r, z) = \int_0^\infty L_3^5(\gamma, z)B(\gamma)J_0(\gamma r)e^{\gamma z}d\gamma.\tag{23}$$

На основании (3), (23) получаем, при $z = 0$:

$$\int_0^\infty L_3^5(\gamma, 0)B(\gamma)J_0(\gamma r)e^{\gamma z}d\gamma = \theta_0, \quad r \leq a,\tag{24}$$

где θ_0 — температура источника тепла, а

$$\beta(r) = \int_0^\infty B(a)J_0(ra)ada, \quad B(\gamma) = \int_0^a \beta(\rho)J_0(\gamma\rho)\rho d\rho.\tag{25}$$

Сделаем замену переменных и обозначим:

$$\gamma H = u; \lambda = H/a; r' = r/a; \rho' = \rho/a; L_3^{5'}(\gamma) = L_3^5(\gamma, 0), \beta'(\rho'a) = \beta(\rho), \quad (26)$$

далее штрихи опускаем. Получим, что поставленная задача сводится к решению интегрального уравнения вида:

$$\int_0^1 \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^5(u\lambda) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \theta_0, \quad r \leq 1. \quad (27)$$

Выражение (27) представим в виде парного интегрального уравнения:

$$\begin{cases} \int_0^\infty B(\gamma) L_3^5(\gamma, z) J_0(\gamma r) e^{\gamma z} d\gamma = \theta, & r \leq 1, \\ \int_0^\infty B(\gamma) J_0(r\gamma) \gamma d\gamma = 0, & r > 1. \end{cases} \quad (28)$$

Используя операторы

$$U_1^t \Phi(r) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r\Phi(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad U_1^t J_0(r\gamma) = \cos t\gamma; \quad U_1^t 1 = 1; \quad (29)$$

$$U_2^t \Phi(r) = \int_0^\infty \frac{r\Phi(r) dr}{\sqrt{r^2 - t^2}}; \quad U_2^t J_0(r\gamma) = \gamma^{-1} \cos t\gamma, \quad (30)$$

преобразуем (28) к следующему виду:

$$\begin{cases} \int_0^\infty B(\gamma) L_3^5(\lambda\gamma) \cos(t\gamma) d\gamma = 1, & t \leq 1, \\ \int_0^\infty B(\gamma) \cos(t\gamma) d\gamma = 0, & t > 1. \end{cases} \quad (31)$$

Аналогично работе [11] можно исследовать асимптотические свойства функции $L_3^5(u)$ и показать, что её можно аппроксимировать выражением вида [12—13]:

$$L(u) = L_{\Pi}^N(u) + L_{\Sigma}^\infty(u).$$

Здесь обозначено

$$L_{\Pi}^N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad L_{\Sigma}^M(u) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k |u|}{u^2 + D_k^2}.$$

Рассмотрим простейший случай, когда $L_3^5(u)$ имеет вид:

$$L_3^5(\lambda\gamma) = \frac{\gamma^2 + A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2 + B^2\lambda^{-2}}.$$

Тогда уравнение (31) для случая, когда область внутри круга некоторого радиуса нагревается источником тепла с постоянной по времени температурой, можно записать в виде:

$$\begin{cases} \int_0^\infty B(\gamma) \frac{\gamma^2 + A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2 + B^2\lambda^{-2}} \cos t\gamma d\gamma = 1, & t \leq 1, \\ \int_0^\infty B(\gamma) \cos t\gamma d\gamma = 0, & t > 1. \end{cases} \quad (32)$$

Введём обозначение

$$\beta(t) = \int_0^\infty B(\gamma) \cos t\gamma d\gamma.$$

Из уравнения (32) с учётом чётности правой части получим:

$$\beta(t) = C \operatorname{ch} A\lambda^{-1}t + \frac{B^2\lambda^{-2}}{A^2\lambda^{-2}}. \quad (33)$$

Используя (33), (32) можно переписать:

$$\begin{cases} \int_0^\infty B(\gamma) \cos t\gamma d\gamma = C \operatorname{ch} A\lambda^{-1}t + \frac{B^2\lambda^{-2}}{A^2\lambda^{-2}}, & t \leq 1, \\ \int_0^\infty B(\gamma) \cos t\gamma d\gamma = 0, & t > 1. \end{cases} \quad (34)$$

Обращая преобразование Фурье, имеем:

$$B(u) = \frac{2}{\pi} \frac{B^2\lambda^{-2}}{A^2\lambda^{-2}} \frac{\sin u}{u} + C \frac{2}{\pi} \frac{u \sin u \operatorname{ch} A\lambda^{-1} + A\lambda^{-1} \cos u \operatorname{sh} A\lambda^{-1}}{u^2 + A^2\lambda^{-2}}. \quad (35)$$

Постоянную C определим из условия, что $B(u)$ должно удовлетворять исходному уравнению (13). Получим:

$$C \frac{B\lambda^{-1} \operatorname{ch} A\lambda^{-1} + A\lambda^{-1} \operatorname{sh} A\lambda^{-1}}{B^2\lambda^{-2} - A^2\lambda^{-2}} + \frac{B\lambda^{-1}}{A^2\lambda^{-2}} = 0. \quad (36)$$

Формулу для теплового потока (25) приведём к более удобному виду, используя равенство Парсеваля:

$$\beta(r) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{L_3^5(0)} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + C \left[\frac{\operatorname{ch} A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}} - A\lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\operatorname{sh} A\lambda^{-1} t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] \right\}. \quad (37)$$

Определение формы изменения поверхности неоднородного полупространства, нагретого источником с постоянной температурой в пределах круга радиуса a . Проанализируем деформацию поверхности неоднородного полупространства под действием локального статического нагрева. Согласно (23) при отсутствии поверхностного механического воздействия получаем:

$$w_t(r, z) = \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^3(\gamma, z) J_0(\gamma\rho) J_0(\gamma r) e^{\gamma z} d\gamma. \quad (38)$$

В случае однородного полупространства формула (38) позволяет записать простые аналитические выражения для описания вертикального смещения поверхности полупространства при действии постоянного теплового потока и постоянной температуры. Рассматривается установившийся процесс подвода тепла к полупространству при отсутствии его отвода через поверхность, поэтому форма поверхности описывается логарифмической функцией и, для определённости, будем фиксировать некоторое значение r_0 на оси r , при котором $w_t(r_0, 0) = 0$. При отображении полученных значений для перемещений поверхности на рисунке 2 примем $r_0 = 3,6$.

$$\begin{aligned} w_t^s(r) &= w_t^s(r, 0) - w_t^s(r_0, 0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} J_0(\gamma\rho) \rho d\rho \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} (J_0(\gamma r) - J_0(\gamma r_0)) d\gamma = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2} (J_0(\gamma r) - J_0(\gamma r_0)) \sin \gamma d\gamma = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2} (J_0(\gamma r) - 1 + 1 - J_0(\gamma r_0)) \sin \gamma d\gamma = \\ &= \begin{cases} \ln \frac{r_0}{2} + \sqrt{1-r^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{2}, & r < 1, \\ \ln \frac{r_0}{r}, & r > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

На рисунке 2 представлено относительное изменение формы поверхности неоднородного полупространства под действием постоянной температуры, приложенной в пределах круга единичного радиуса. Обозначения кривых формируются следующим образом. Последовательно описывается характер изменения модуля Юнга, коэффициента Пуассона, коэффициента теплопроводности и коэффициента линейного расширения в покрытии:

0 — значение характеристики в покрытии не отличаются от соответствующих значений в подложке;

3 — значение характеристики на поверхности в 2 раза превышает значение в подложке и линейно убывает по всей толщине покрытия до значения в подложке;

4 — значение характеристики на поверхности в 2 раза меньше значения в подложке и линейно возрастает по всей толщине покрытия до значения в подложке.

Таким образом, обозначение 0_0_0_0 соответствует однородному термоупругому полупространству.

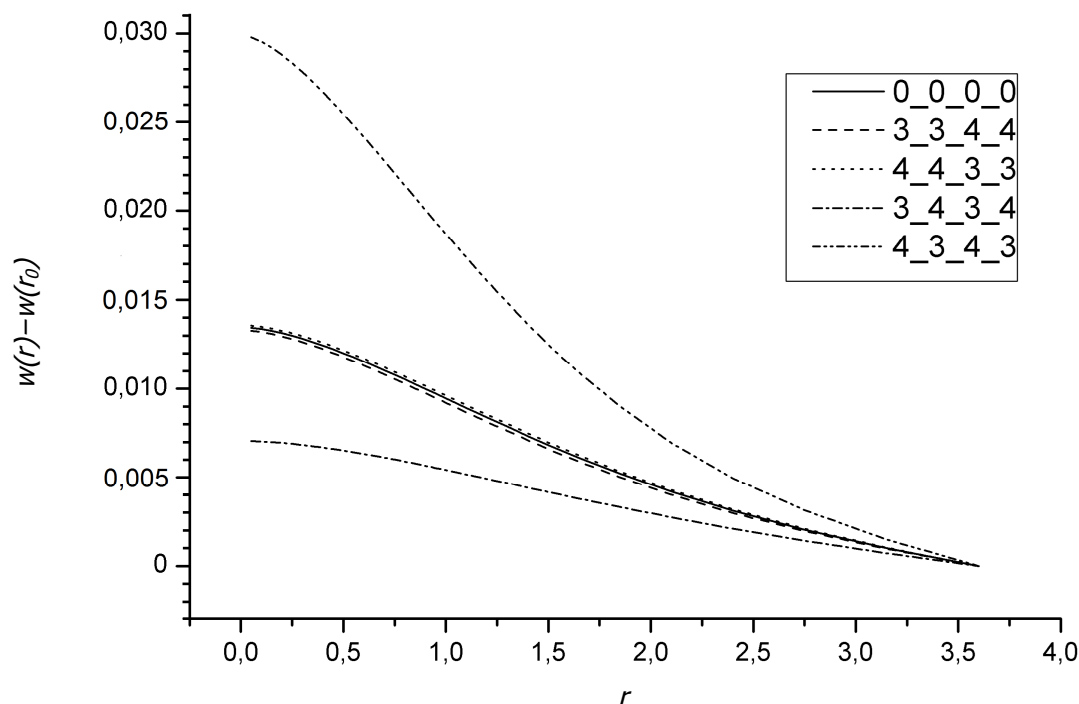


Рис. 2. Термоупругое искривление поверхности неоднородного полупространства для различных случаев изменения свойств в приповерхностном слое под действием равномерной температуры в пределах единичного круга. Толщина слоя равна радиусу круга

Анализ графиков на рисунке 2 показывает, что наибольшее влияние на величину максимального выпора поверхности оказывает разнонаправленное изменение коэффициентов теплопроводности и линейного расширения в покрытии.

Заключение. С помощью двусторонне-асимптотического метода построено решение задачи о локальном нагреве поверхности непрерывно неоднородного термоупругого пространства. Определены численные значения выпора поверхности при различном характере изменения упругих и термомеханических характеристик приповерхностного слоя. Показано, что характер неоднородности приповерхностного слоя оказывает существенное влияние на величину выпора поверхности.

Библиографический список

1. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — Москва : Мир, 1975. — 863 с.
2. Коваленко, А. Д. Введение в термоупругость / А. Д. Коваленко. — Киев : Наукова думка, 1965. — 204 с.
3. Barber, J. R. Thermoelasticity and contact / J. R. Barber. // Journal of Thermal Stresses. — 1999. — Т. 22, № 4. — С. 513–525.
4. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел / Э. М. Карташов. — Москва : Высшая школа, 2001. — 550 с.

5. Величко, И. Г. Аналитическое решение осесимметрической задачи термоупругости для многослойного основания [Электрон. ресурс] / И. Г. Величко, И. Г. Ткаченко // Вестник Восточно-укр. национ. ун-та им. В. Даля. — 2009. — № 4Е. — Режим доступа : <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/Vsunud/2009-4E/09vigdmo.htm>.
6. Noda, N. On a general treatise of three-dimensional thermoelastic problems in transversely isotropic bodies / N. Noda, Y. Takeuti, Y. Sugano. // ZAMM Z. angew. Math. Mech. — 1985. — Т. 65, № 10. — С. 509–512.
7. Jin, Z. H. Transient thermal stress intensity factors for a crack in semi-infinite plate of a functionally gradient material / Z. H. Jin, N. Noda. // International Journal of Solids and Structures. — 1994. — Т. 31, вып. 2. — С. 203–218.
8. Liu, J. Thermoelastic contact analysis of functionally graded materials with properties varying exponentially / J. Liu, L. L. Ke, Y. S. Wang // Advanced Materials Research. — 2011. — Т. 189–193. — С. 988–992.
9. Краснюк, П. П. Плоская контактная задача взаимодействия жёсткого теплопроводного цилиндрического штампа и упругого слоя при нестационарном фрикционном тепловыделении / П. П. Краснюк. // Трение и износ. — 2009. — Т. 30, № 2. — С. 152–162.
10. Айзикович, С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 148–158.
11. Айзикович, С. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству / С. М. Айзикович, В. М. Александров // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 266, № 1. — С. 40–43.
12. Айзикович, С. М. Осесимметрическая задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство / С. М. Айзикович, В. М. Александров // Известия АН СССР, МТТ. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 73–82.
13. Айзикович, С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 872–877.

Материал поступил в редакцию 14.02.13.

References

1. Novatskiy, V. Teoriya uprugosti. [Theory of elasticity.] Moscow : Mir, 1975, 863 p. (in Russian).
2. Kovalenko, A. D. Vvedenie v termouprugost'. [Introduction to thermoelasticity.] Kiev : Naukova dumka, 1965, 204 p. (in Russian).
3. Barber, J. R. Thermoelasticity and contact. Journal of Thermal Stresses, 22, 1999, pp. 513–525.
4. Kartashov, E. M. Analiticheskie metody` v teorii teploprovodnosti tverdy`x tel. [Analytical methods in heat conduction of solids.] Moscow : Vysshaya Shkola, 2001, 550 p. (in Russian).
5. Velichko, I. G., Tkachenko, I. G. Analiticheskoe reshenie osesimmetrichnoy zadachi termouprugosti dlya mnogosloynogo osnovaniya. [Analytical solution of axisymmetric problem of thermoelasticity for multilayered foundation] Vestnik Vostochnoukrainskogo natsionalnogo universiteta imeni Vladimira Dalya, 2009, iss. 4E. Available at : <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/Vsunud/2009-4E/09vigdmo.htm> (in Russian).
6. Noda, N., Takeuti, Y., Sugano, Y. On a general treatise of three-dimensional thermoelastic problems in transversely isotropic bodies. ZAMM Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 1985, vol. 65, iss. 10, pp. 509–512.
7. Jin, Z. H., Noda, N. Transient thermal stress intensity factors for a crack in semi-infinite plate of a functionally gradient material. International Journal of Solids and Structures, 1994, vol. 31, iss. 2, pp. 203–218.

8. Liu, J., Ke, L. L., Wang, Y. S. Thermoelastic contact analysis of functionally graded materials with properties varying exponentially. *Advanced Materials Research*, 2011, vols. 189–193, pp. 988–992.

9. Krasnyuk, P. P. Ploskaya kontaktnaya zadacha vzaimodejstviya zhestkogo teploprovodnogo cilindricheskogo shtampa i uprugogo sloya pri nestacionarnom frikcionnom teplovy`delenii. [Planar contact problem of interaction between a rigid heat-conductive cylindrical die and an elastic layer in frictional heat emission.] *Trenie i iznos*, 2009, vol. 30, iss. 2, pp. 110–117 (in Russian).

10. Aizikovich, S. M. Asimptoticheskie resheniya kontaktny`x zadach teorii uprugosti dlya neodnorodny`x po glubine sred. [Asymptotic solutions to contact problems of elasticity theory for media inhomogeneous in depth.] *Prikladnaya matematika i mexanika*, 1982, vol. 46, iss. 1, pp. 116–124 (in Russian).

11. Aizikovich, S. M., Aleksandrov, V. M. O svoystvax funkciy podatlivosti, sootvetstvuyushhix sloistomu i neprery`vno-neodnorodnomu poluprostranstvu. [On the properties of compliance functions corresponding to polylayered and continuously non-homogeneous half-space.] *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1982, vol. 266, iss. 1, pp. 40–43 (in Russian).

12. Aizikovich, S. M., Aleksandrov, V. M. Osesimmetricheskaya zadacha o vdavlivanii kruglogo shtampa v uprugoe, neodnorodnoe po glubine poluprostranstvo. [Axisymmetric problem on indentation of a circular die into an elastic nonuniform in-depth half-space.] *Izvestiya AN SSSR, MTT*, 1984, vol. 39, no. 2, pp. 73–82 (in Russian).

13. Aizikovich, S. M. Asimptoticheskoe reshenie odnogo klassa parny`x uravnenij. [Asymptotic solution to a class of coupled equations.] *Prikladnaya matematika i mexanika*, 1990, vol. 54, iss. 5, pp. 719–724 (in Russian).

DETERMINATION OF SURFACE DEFORMATION OF CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS THERMOELASTIC HALF-SPACE UNDER LOCAL HEATING¹

L. I. Krenev, S. M. Aizikovich, B. I. Mitrin

(Don State Technical University)

The axially symmetric quasistatic problem on thermoelasticity for the functionally graded half-space, with elasticity modulus, Poisson ratio, heat conduction, and linear expansion coefficients varying continuously in the near-surface layer is considered. It is supposed that the area in the circle with the known radius is being heated by the heat source with time-constant temperature. Outside the circle, the surface is perfectly insulated. Analytic methods, particularly, Hankel integral transform, are used to solve the problem. At first, the solution is reduced to solving a two-point boundary problem for the ODEs system with varying coefficients of the sixth order. The modulating functions method is used to provide a stable numerical solution to the ordinary differential system. As a result, the solution to the mixed boundary problem is reduced to solving the dual integral equation. The kernel transform properties allow applying a well-established evolutionary bilateral asymptotical method. The heat flow approximation and the half-space surface displacement are determined through this method. The numerical results showing the curvature of the inhomogeneous half-space surface under the influence of the uniform temperature within the unit circle are given for various cases of the mechanical and temperature property changes in the near-surface layer. The following cases are considered: when the coating property value does not differ from the corresponding substrate property value, and when the coating value differs two times (to the higher or smaller side) on the surface, and linearly decreases (grows) in depth up to the property value in the substrate. It is shown that the ultimate effect on the maximum surface riser is caused by the oppositely directed changes in the thermal conductivity and linear expansion coefficients in the coating.

Keywords: mixed problems, inhomogeneous materials, thermoelasticity, functionally-graded materials, analytical solution.

¹ The research is done with the support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State Contract No. 11.519.11.3028, Agreement No. 14.B37.21.1632) and by the RFFI grants (12-07-00639-a, 13-08-01435-a).