УДК 681.51

Метод синтеза системы управления колебаниями перевёрнутого маятника с инерционным маховиком[1]

А. А. Колесников
(Южный федеральный университет)

Рассматривается задача управления известной системой, состоящей из перевёрнутого маятника с неподвижной точкой подвеса. При этом на маятнике закреплён электродвигатель с маховиком. Ротор электродвигателя жёстко соединён с маховиком. Вращением маховика можно стабилизировать маятник в определённом положении. Развиваемый электродвигателем маховой момент приложен как к его ротору (т. е. к маховику), так и к его статору (т. е. к маятнику). Требуется перевести маятник в верхнее неустойчивое положение и в этом положении стабилизировать его — добиться автоколебаний с определёнными амплитудой и частотой. Синтезирован новый закон управления перевёрнутым маятником, обеспечивающий его устойчивость в верхнем положении. Данный закон управления основан на энергетических инвариантах системы.
Ключевые слова: *перевёрнутый маятник с маховиком, устойчивость в верхнем положении, закон управления, энергетические инварианты.*

Введение. Управление перевёрнутым маятником с неподвижной точкой подвеса, перевод его в верхнее неустойчивое состояние и стабилизация этого неустойчивого состояния — важные классические проблемы в механике, теории колебаний и теории управления. Рассмотрим задачу управления известной системой, состоящей из перевёрнутого маятника с *неподвижной* точкой подвеса. При этом на маятнике закреплён электродвигатель с маховиком. На рис. 1 представлена реальная конструкция такого маятника, разработанная в Институте механики МГУ [1]. Ротор электродвигателя жёстко соединён с маховиком, вращением которого маятник может быть стабилизирован в определённом, например верхнем, положении. Развиваемый электродвигателем маховой момент приложен как к его ротору (т. е. к маховику), так и к его статору (т. е. к маятнику). Этот момент управляет движением маятника [1, 2]. В работе [1] указывается, что такой способ управления маятником можно строго доказать на основе теоремы об изменении момента количества движения системы относительно точки подвеса маятника [3, 4].

В прикладном плане рассматриваемая здесь задача стабилизации перевёрнутого маятника с помощью управляемого маховика имеет непосредственное применение, например, в космонавтике, когда управление ориентацией спутника осуществляется при помощи гиродинов [2]. Аналогичный способ управления используется и в других областях техники [5–8].

В [9] представлена кинематическая схема маятниковой системы (рис. 2). Ставится следующая задача управления: требуется перевести маятник в верхнее неустойчивое положение и стабилизировать его в указанном положении в форме автоколебаний с определёнными амплитудой и частотой.

[1] Работа выполнена по гранту Южного федерального университета «Синергокибернетический подход к созданию интеллектуальных систем навигации и управления сложными системами, функционирующими в экстремальных условиях».

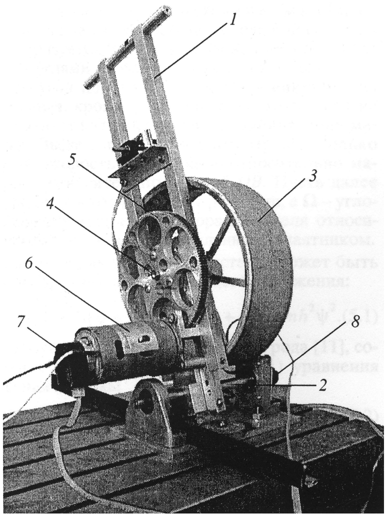

Рис. 1. Перевёрнутый маятник с маховиком: 1 — маятник; 2 — ось маятника; 3 — маховик; 4 — ось маховика; 5 — шестерня редуктора; 6 — двигатель; 7 — датчик угла поворота маховика; 8 — датчик угла поворота маятника

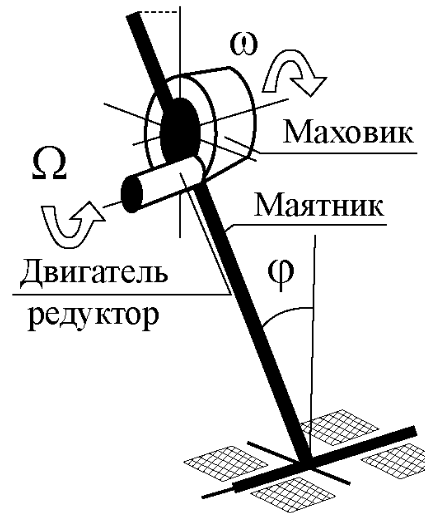

Рис. 2. Кинематическая схема маятника: 1 — маятник; 2 — ось маятника; 3 — маховик; 4 — ось маховика; 5 — электродвигатель

1. Модель маятника с маховиком. Дифференциальные уравнения динамики маятника с инерционным маховиком приведены в работе [9] и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} J\lambda\ddot{\varphi}(t) + (J_r + \lambda J_m)\dot{\omega}(t) = (Mb + mh)g\lambda\sin\varphi, \\ (J_r + \lambda J_m)\lambda\ddot{\varphi}(t) + (J_r + \lambda^2 J_m)\dot{\omega}(t) = \lambda T, \end{cases} \tag{1}$$

где φ — угол крена маятника; ω — скорость вращения маховика относительно маятника; J_m — момент инерции маховика относительно его главной оси (оси вращения); J_r — момент инерции ротора электродвигателя; $J = J_v + J_r + J_m + mh^2$ — полный момент инерции системы «маятник — маховик — двигатель», где через J_v обозначен момент инерции маятника относительно его оси вращения; g — ускорение свободного падения; M, m — массы маятника и двигателя; b, h — расстояния от оси вращения до центров масс маятника и маховика (с ротором двигателя); T — момент электромагнитных сил, приложенных к ротору двигателя; λ — коэффициент редукции, $\omega = \lambda\Omega$, где Ω — скорость вращения ротора двигателя.

С учётом противо-ЭДС реакции якоря величину момента T можно приближённо (пренебрегая электромагнитной постоянной времени) представить в виде

$$T = c_1 u - c_2\omega\lambda^{-1}, \tag{2}$$

где u — управляющее напряжение в цепи якоря двигателя; c_1, c_2 — параметры двигателя [9].

Уравнения (1), (2) описывают нелинейную динамическую систему третьего порядка с переменными состояния $\{\varphi, \dot{\varphi}, \omega\}$ и входным управляющим воздействием u. Вертикальному (неустойчивому) положению равновесия соответствует значение $\varphi = 0$ [9]. Параметры модели (2) [9]:

$$\begin{gathered} M = 1 \text{ кг},\ m = 3 \text{ кг},\ h = 0{,}13 \text{ м},\ J = 0{,}12 \text{ кг}\cdot\text{м},\ J_m = 0{,}003 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,\ J_r = 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \\ b = 1 \text{ м},\ J_v = 3{,}92\cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2,\ \lambda = 0{,}1,\ c_1 = 8\cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м/В},\ c_2 = 7{,}6\cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с} \end{gathered} \tag{3}$$

Разрешив уравнения маятника (1), (2) относительно $\ddot{\varphi}(t)$ и $\dot{\omega}(t)$ и подставив параметры (3), получим следующую модель маятниковой системы с маховиком [9]:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - 6{,}14\omega - 50{,}1\sin\varphi = -6{,}46u, \\ \dot{\omega}(t) + 23{,}8\omega + 38{,}8\sin\varphi = 25u, \end{cases} \tag{4}$$

Полная энергия маятниковой системы (1) равна

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\varphi,\dot{\varphi},\omega) &= (Mb + mh)\,g\,(1-\cos\varphi) + 0{,}5\left(J + J_m + mh^2\right)\dot{\varphi}^2(t) + \\ &+ \left(J_r\lambda^{-1} + 2J_m\right)\omega\dot{\varphi}(t) + \left(J_m + 0{,}5J_r\lambda^{-2}\right)\omega^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив в (4) параметры (3), получим

$$H(\varphi,\dot{\varphi},\omega) = 4{,}81(1-\cos\varphi) + 0{,}1\dot{\varphi}^2(t) + 0{,}06\omega\dot{\varphi}(t) + 0{,}035\omega^2. \tag{6}$$

2. Синтез закона управления с парциальной энергией. Для синтеза закона управления, стабилизирующего маятник (1) в верхнем неустойчивом положении, используем энергетический инвариант в виде полной или парциальной энергии. Другими словами, для синтеза закона управления можно использовать как полную энергию (6), так и парциальную её составляющую

$$H_\varphi(\varphi,\dot{\varphi}) = (Mb + mh)\,g\,(1-\cos\varphi) + 0{,}5\left(J + J_m + mh^2\right)\dot{\varphi}^2(t), \tag{7}$$

отражающую энергию колебаний маятника (1) с неподвижным маховиком. Рассмотрим метод синтеза закона управления на основе парциальной энергии (7), которая с учётом параметров (3) имеет вид

$$H_\varphi(\varphi,\dot{\varphi}) = 4{,}81(1-\cos\varphi) + 0{,}1\dot{\varphi}^2(t). \tag{8}$$

Выберем в качестве макропеременной следующую функцию:

$$\psi_\varphi = H_\varphi - H_0, \tag{9}$$

где H_0 — заданный уровень энергии.

Для синтеза закона управления введём следующее инвариантное соотношение:

$$T_1\dot{\psi}_\varphi(t) + \psi_\varphi\dot{\varphi}^2(t) = 0. \tag{10}$$

Тогда, подставив в (10) функции ψ_φ (9), H_φ (8), в силу уравнений (4) получим закон управления:

$$6{,}46u_\varphi = 74{,}15\sin\varphi + 6{,}14\omega + \frac{5}{T_1}\psi_\varphi\dot{\varphi}(t). \tag{11}$$

Этот закон сначала переводит изображающую точку замкнутой системы (4), (11) на инвариантное многообразие $\psi_\varphi = 0$ (9). Подставив закон управления u_φ (11) в первое уравнение системы (4), получим следующее уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi}(t) + 24{,}05\sin\varphi + \frac{5}{T_1}\psi_\varphi\dot{\varphi}(t) = 0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что движение маятника с остановленным электроприводом на многообразии $\psi_\varphi = 0$ (9) будет описываться уравнением

$$\ddot{\varphi}(t) + 24{,}05\sin\varphi_\psi = 0. \tag{13}$$

Это уравнение колебательной системы с соответствующей амплитудой и частотой колебаний. Аналогично из исходного соотношения (9) имеем

$$\psi_\varphi = 4{,}81(1-\cos\varphi) + 0{,}1\dot{\varphi}^2(t) - H_0.$$

Продифференцировав данное выражение по времени, находим

$$\ddot{\varphi}(t) + 24,05\sin\varphi_\psi = 0\,, \tag{14}$$

Мы видим, что (14) совпадает с (13) и, следовательно, также является колебательной системой. Из (13) и (14) следует, что частота колебаний равна $\omega_\psi = \sqrt{24,05}$. Это частота колебаний маятника с остановленным электроприводом. Однако согласно (5) полная энергия H с вращающимся электроприводом включает в себя помимо парциальной энергии H_φ (8) также и составляющую $H_\omega = \left(J_r\lambda^{-1} + 2J_m\right)\omega\dot{\varphi}(t) + \left(J_m + 0,5J_r\lambda^{-2}\right)\omega^2$, отражающую энергию динамического взаимодействия маятника и вращающегося электропривода. В целом, это означает, что, учитывая закон управления u_φ (11), маятник реально будет колебаться с частотой, меньшей $\omega_\psi = \sqrt{24,05}$. Формально, если подставить закон управления u_φ (11) во второе уравнение системы (4), то получим следующее уравнение движения на многообразии $\psi_1 = 0$:

$$\dot{\omega}_\psi(t) + 0,04\omega_\psi = 249,9\sin\varphi_\psi\,. \tag{15}$$

Очевидно, что (15) — это также уравнение колебательной системы с определённой амплитудой и частотой колебаний. Итак, из приведённых рассуждений, основанных на использовании парциальной энергии H_φ (8) для синтеза закона управления u_φ (11), следует, что маятник с вращающимся маховиком будет устойчиво колебаться около верхнего неустойчивого состояния с определёнными амплитудой и частотой колебаний, зависящими от H_0 и параметров (3) маятника.

3. Результаты моделирования. Для подтверждения изложенных выше соображений смоделируем систему (4) с парциальным законом управления (11). На рис. 3–11 представлены графики изменения угла маятника $\varphi(t)$ и скорости вращения электропривода $\omega(t)$ для разной задаваемой энергии, начальных условий системы φ_0, $\dot{\varphi}_0$, ω_0 и параметра T_1.

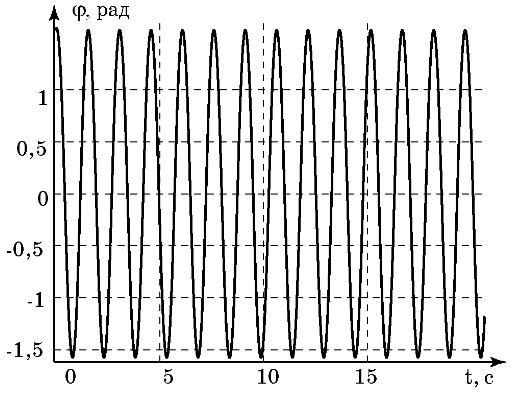

Рис. 3. Изменение угла $\varphi(t)$ при $H_0 = 4,81$, $\varphi_0 = \pi/2$, $\dot{\varphi}_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

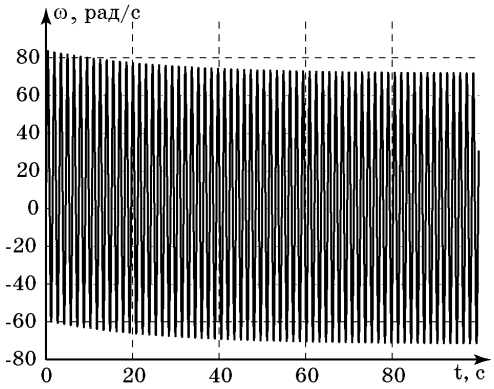

Рис. 4. Изменение скорости вращения электропривода при $H_0 = 4,81$, $\varphi_0 = \pi/2$, $\dot{\varphi}_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

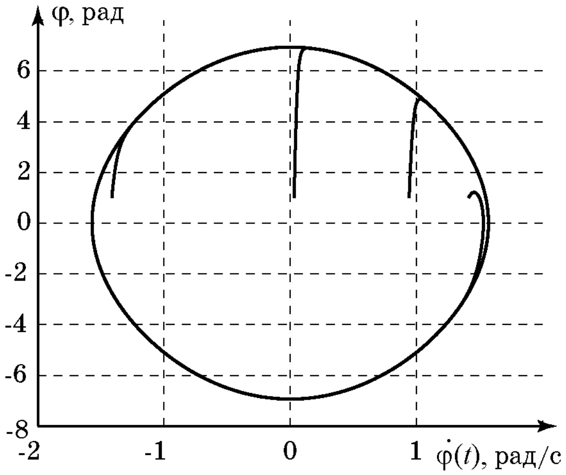

Рис. 5. Фазовый портрет $F(\varphi\dot{\varphi}) = 0$

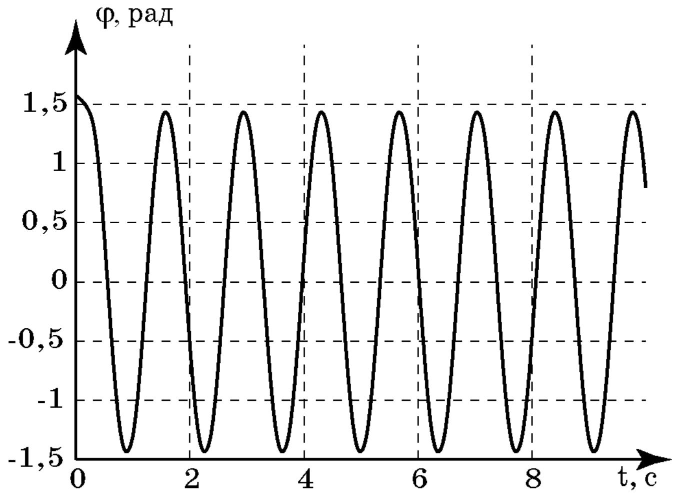

Рис. 6. Изменение угла $\varphi(t)$ при $H_0 = 4,81$, $\varphi_0 = 0,5\pi$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $T_1 = 0,1$

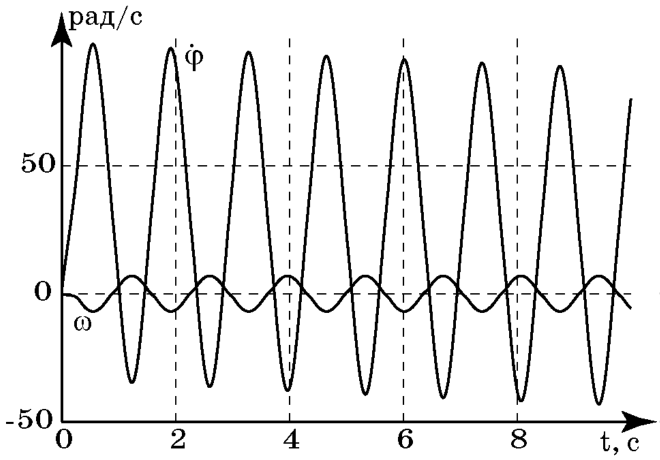

Рис. 7. Изменение угловой скорости маятника $\dot{\varphi}(t)$ и скорости вращения электропривода при $H_0 = 4,81$, $\varphi_0 = 0,5\pi$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $T_1 = 0,1$

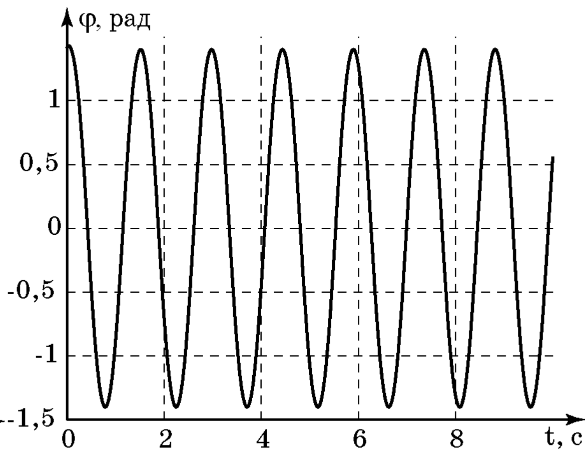

Рис. 8. Изменение угла $\varphi(t)$ при $H_0 = 4,5$, $\varphi_0 = 0,45$, $\dot{\varphi}_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

На рис. 7 для сравнения приведены графики изменения скорости $\dot{\varphi}_0(t)$ отклонения маятника от вертикальной оси и скорости $\omega(t)$ вращения электропривода. Из этих графиков следует, что переменные $\dot{\varphi}_0(t)$ и $\omega(t)$ изменяются в противофазе по отношению друг к другу. Таким образом, электропривод функционирует как осциллятор. Это позволяет успешно решить поставленную задачу управления автоколебаниями перевёрнутого маятника с инерционным маховиком.

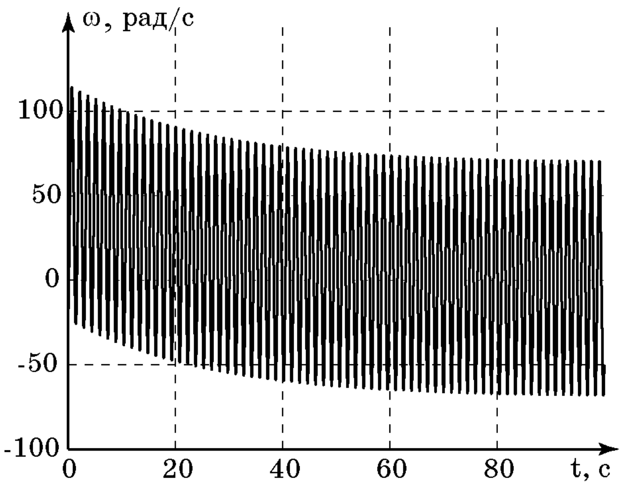

Рис. 9. Изменение скорости вращения электропривода при $H_0 = 4,5$, $\varphi_0 = 0,45$, $\dot{\varphi}_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

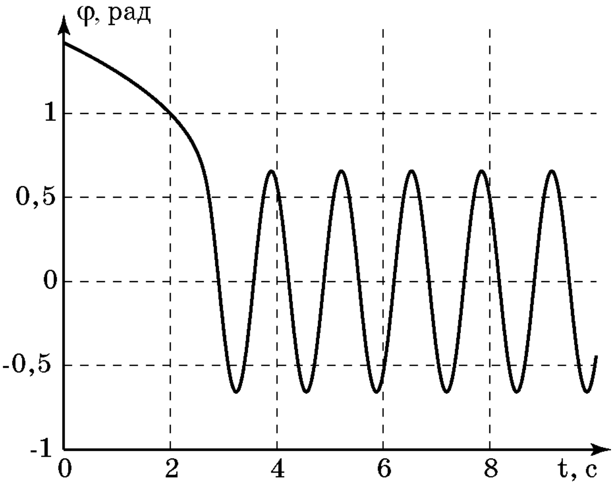

Рис. 10. Изменение угла $\varphi(t)$ при $H_0 = 1$, $\varphi_0 = 1,5$, $\dot{\varphi}_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

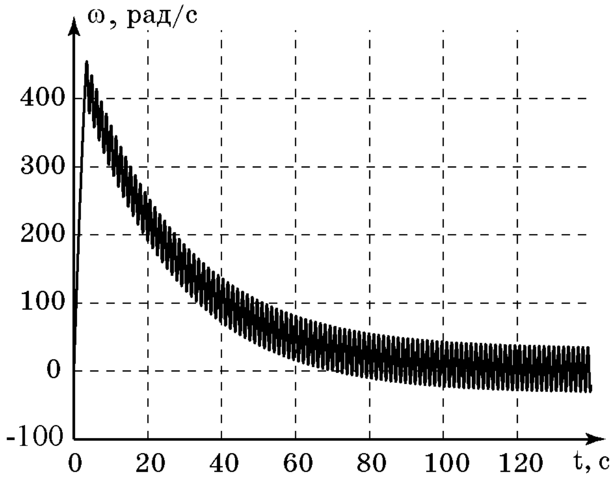

Рис. 11. Изменение скорости вращения электропривода при $H_0 = 1$, $\varphi_0 = 0,5\pi$, $\dot{\varphi}_0 = 1,5$, $\omega_0 = 1$, $T_1 = 0,1$

Как следует из результатов моделирования, закон управления (11) с парциальной энергией обеспечивает устойчивые автоколебания маятника с маховиком. Угол отклонения маятника от верхнего неустойчивого положения — $\varphi_0 = -0,8\pi \div 0,8\pi$ от начальных условий. Во многих практических случаях этого достаточно для решения поставленных технологических задач, например связанных с ориентацией тел в пространстве и др.

Выводы. В статье синтезирован новый закон управления перевёрнутым маятником, обеспечивающий его устойчивость в верхнем положении. Результаты моделирования замкнутой системы подтверждают эффективность предложенного в статье синергетического метода синтеза систем управления перевёрнутым маятником с инерционным маховиком.

Библиографический список

1. Управление при помощи маховика маятником с подвижной точкой подвеса / А. А. Гришин [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 5. — С. 14–24.

2. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса / А. В. Безнос [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 1. — С. 27–38.

3. Белецкий, В. В. Двуногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления / В. В. Белецкий. — Москва : Наука, 1984. — 484 с.

4. Голубев, Ю. Ф. Foundations of Theoretical Mechanics / Ю. Ф. Голубев. — Москва : Издательство МГУ, 2000. — 720 с.

5. Управление мехатронными вибрационными установками / И. И. Блехман [и др.] ; под ред. И. И. Блехмана, А. Л. Фрадкова. — Санкт-Петербург : Наука, 2001. — 278 с.

6. Åström, K.-J., Swinging up a pendulum by energy control / K.-J. Åström, K. Furuta // Automatica. — 2000. — Vol. 36. — № 2. — P. 287–295.

7. Fradkov, A. L. Nonlinear excitability analysis with application to two-pendulum system / A. L. Fradkov, B. R. Andrievsky, K. V. Boykov // Modeling, Identification and Control : 21st IASTED International Conference (MIC 2002). — Innsbruck. — 2002. — P. 374–379.

8. Spong, M.-W. Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum / M.-W. Spong, P. Corke, R. Lozano // Automatica. — 2001. — Vol. 37. — P. 1845–1851.

9. Андриевский, В. Р. Стабилизация перевёрнутого маятника с инерционным маховиком в качестве движителя / В. Р. Андриевский // Управление в физико-технических системах ; под ред. А. Л. Фрадкова. — Санкт-Петербург : Наука, 2004. — С. 52–71.

Материал поступил в редакцию 05.02.13.

References

1. Grishin, A. A., et al. Upravlenie pri pomoshhi maxovika mayatnikom s podvizhnoj tochkoj podvesa. [Control through flywheel pendulum with movable suspension point.] Izvestiya RAN. Teorija i sistemy upravlenija. 2002, no. 5, pp. 14–24 (in Russian).

2. Beznos, A. V., et al. Upravlenie pri pomoshhi maxovika mayatnikom s nepodvizhnoj tochkoj podvesa. [Control through flywheel pendulum with fixed suspension point.] Izvestiya RAN. Teorija i sistemy upravlenija. 2004, no. 1, pp. 27–38 (in Russian).

3. Beletskiy, V. V. Dvunogaya xod`ba. Model`ny`e zadachi dinamiki i upravleniya. [Biped gait. Dynamics and control model problems.] Moscow : Nauka, 1984, 484 p. (in Russian).

4. Golubev, Y. F. Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow : Izdatel`stvo MGU, 2000, 720 p.

5. Blehkman, I. I., et al. Upravlenie mexatronny`mi vibracionny`mi ustanovkami. [Mechatronic vibration machine control.] I. I. Blekhman, A. L. Fradkov, eds. Sankt-Peterburg : Nauka, 2001, 278 p. (in Russian).

6. Åström, K.-J., Furuta, K. Swinging up a pendulum by energy control. Automatica, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 287–295.

7. Fradkov, A. L., Andrievsky, B. R., Boykov, K. V. Nonlinear excitability analysis with application to two-pendulum system. Proc. 21st IASTED Conf. "Modeling, Identification and Control" (MIC 2002). Innsbruck, 18-21 Feb, 2002, IASTED, ASTA Press, pp. 374–379.

8. Spong, M.-W., Corke, P., Lozano, R. Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum. Automatica, 2001, vol. 37, pp. 1845–1851 / V. R. Andrievskij // Upravlenie v fiziko-texnicheskix sistemax ; pod red. A. L. Fradkova

9. Andrievsky, B. R. Stabilizaciya perevernutogo mayatnika s inercionny`m maxovikom v kachestve dvizhitelya. [Stabilization of the inverted pendulum with inertia flywheel as an engine.] A. L. Fradkov, ed. Upravlenie v fiziko-texnicheskix sistemax. [Physicotechnical systems control.] Sankt-Peterburg : Nauka, 2004, pp. 52–71 (in Russian).

INVERSED PENDULUM WITH SLUGGED FLYWHEEL OSCILLATION CONTROL SYSTEM SYNTHESIS METHOD[1]

A. A. Kolesnikov
(Southern Federal University)

The problem of a well-known system control consisting of the inversed pendulum with the fixed suspension point is considered. At that, an electric motor with a flywheel is fastened on the pendulum. The motor spindle has a rigid coupling with the flywheel. Its rotation could clamp the pendulum in position. The rotative moment developed by the electric motor is applied both to its rotor (i.e. to flywheel) and to its stator (i.e. to pendulum). The pendulum should be moved to the top instable position, and stabilized in this position — to obtain autooscillations with the specified amplitude and frequency. A new control law for the inversed pendulum to provide stability in top position is synthesized. The control law is based on the energy invariants of the system.
Keywords: *inversed pendulum with a flywheel, stability in top position, control law, energy invariants.*

[1] The research is done on Southern Federal University grant "Synergocybernetic approach to building intelligent systems of navigation and complex systems control operating under extreme conditions".