

Трёхмерная контактная задача для трансверсально изотропного тела***Д. А. Пожарский, Д. Б. Давтян**

(Донской государственный технический университет)

Изучена пространственная контактная задача с неизвестной областью контакта для трансверсально-изотропного упругого полупространства, граница которого перпендикулярна плоскостям изотропии. Жёсткость границы упругого тела зависит от направления, поэтому для кругового в плане штампа область контакта, как правило, не является круговой. Задача сведена к интегральному уравнению (ИУ) относительно контактного давления, ядро которого не содержит квадратур. Для решения ИУ применяется численный метод Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и давление в этой области. Простой вид ядра ИУ облегчает его регуляризацию, параметр которой зависит от шагов сетки и параметров анизотропии. Для отладки программы использовано известное точное решение задачи для штампа в форме эллиптического параболоида. Сделаны расчёты для разных трансверсально-изотропных материалов при внедрении конического и пирамидального штампов.

Ключевые слова: теория упругости, контактная задача, трансверсально-изотропное полупространство, метод Галанова.

Введение. Механические свойства трансверсально-изотропных материалов вызывают интерес у исследователей, поскольку касаются ряда важных материалов, имеющих гексагональную кристаллическую решётку [1]. Развиваемый метод позволяет эффективно оценивать твёрдость и контактную прочность материалов, приповерхностные свойства которых могут существенно зависеть от направления. Ядро интегрального уравнения контактной задачи ранее было получено в виде двойного интегрального преобразования Фурье [2]. Затем при помощи теории обобщённых функций удалось представить это ядро в виде свободном от квадратур [3]. Такой вид ядра, ввиду простоты его регуляризации в особых точках, сделал возможным применить для решения контактной задачи с неизвестной областью контакта метод нелинейных граничных ИУ типа Гаммерштейна, развитый Галановым [4, 5]. Твёрдость по Бринеллю для эллиптического штампа может быть оценена на основе точного решения для эллиптического параболоида [2]. В представленной работе сделаны расчёты для разных материалов при внедрении конического штампа и штампа в форме четырёхугольной пирамиды (твёрдость по Виккерсу). Определены области контакта, давления и значения вдавливающей силы при заданной осадке штампа.

Постановка задачи. В декартовых координатах рассмотрим трансверсально-изотропное упругое полупространство $x \geq 0$, граница которого перпендикулярна плоскостям изотропии $z = \text{const}$. Закон Гука, включающий пять упругих параметров, и уравнения равновесия приведены в [2, 3]. Пусть при $x = 0$ в полупространство внедряется абсолютно жёсткий штамп, основание которого в области контакта описывается функцией $f(y, z)$. Штамп вдавливается без перекоса центральной приложенной силой P , испытывая осадку δ . При заданных упругих параметрах, значении δ и функции $f(y, z)$ требуется определить область контакта Ω , контактное давление $q(y, z)$ и силу P . На основании решения задачи Буссинеска [1] ИУ контактной задачи можно записать в форме

$$\iint_{\Omega} q(y_0, z_0) K(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = \delta - f(y, z), \quad (y, z) \in \Omega, \quad (1)$$

где ядро представляется двойным интегралом Фурье (3.4) [2] или (1.4) [3].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00065).

При помощи теории обобщённых функций ядро удаётся представить в форме свободной квадратуры [3]:

$$K(y, z) = \frac{(m_1 - m_2) \gamma_3^2}{2\pi A_{66}} \cdot \frac{y^2 \zeta_1 \zeta_2}{D}, \quad \zeta_n = \sqrt{\gamma_n^2 y^2 + z^2} \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$D = m_1 h_2^2 \zeta_1 - m_2 h_1^2 \zeta_2 - 4(m_1 - m_2) z^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3,$$

$$m_l = \frac{A_{11} \gamma_l^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad h_l = (m_l + 1) \gamma_3^2 y^2 + 2z^2 \quad (l = 1, 2), \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{66}}}.$$

Здесь $A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44}, A_{66}$ — упругие параметры, γ_1, γ_2 удовлетворяют уравнению

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13} (A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0. \quad (3)$$

В табл. 1 (колонки 3—7) приведены параметры анизотропии (2), (3) для ряда материалов, параметры упругости которых A_{ij} табулированы в [1].

Таблица 1

Параметры анизотропии (безразмерные)

№	Материал	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	m_1	m_2	u_{xy}	u_{xz}
1	Al ₂ O ₃	2,786	0,3974	0,8890	4,543	0,2201	0,7283	0,7248
2	Co	3,269	0,3568	1,061	5,206	0,1921	0,5701	0,6504
3	Mg	2,050	0,5041	0,9791	2,782	0,3595	0,6778	0,6950
4	SiC	2,859	0,3808	0,7786	5,994	0,1668	0,8911	0,8304
5	Ti	1,759	0,6324	1,327	2,066	0,4840	0,5204	0,6384
6	CdS	3,186	0,3432	0,9198	4,219	0,2370	0,5849	0,6167
7	Углеволокно	7,492	1,568	4,790	4,132	0,2420	0,2941	0,6671
8	Графит	105,1	0,0003322	0,0007955	7256	0,0001378	22,95	0,8548
9	Сапфир	2,336	0,4293	0,8848	3,921	0,2550	0,7695	0,7523
10	Древесина (ель Дугласа)	13,79	0,1227	0,7101	76,22	0,01312	0,5306	0,6021
11	Керамика PZT-4	1,198	0,6907	0,8393	1,415	0,7069	0,7066	0,6406
12	Композит (60 % волокон)	22,32	0,4745	1,821	25,91	0,03859	0,4099	0,6602
13	Бедренная кость человека	4,157	0,2787	0,9429	4,443	0,2251	0,4779	0,5412

Поверхность полупространства, в зависимости от материала из которого оно состоит, может быть более жёсткой как в направлении оси y , так и в направлении оси z . При действии на границе полупространства в начале координат нормальной сосредоточенной силы P_x для нормальных перемещений на осях y и z можно получить формулы [3]

$$u_x(0, y, 0) = \frac{P_x}{2\pi A_{66}} \cdot \frac{u_{xy}}{y}, \quad u_{xy} = \frac{(m_1 - m_2) \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3^2 [m_1 (m_2 + 1)^2 \gamma_1 - m_2 (m_1 + 1)^2 \gamma_2]},$$

$$u_x(0, 0, z) = \frac{P_x}{2\pi A_{66}} \cdot \frac{u_{xz}}{z}, \quad u_{xz} = \frac{(m_1 - m_2) \gamma_3^2}{2 [(m_1 - m_2) \gamma_3^2 - m_1 \gamma_2^2 + m_2 \gamma_1^2]}.$$

Значения безразмерных величин u_{xy}, u_{xz} приведены в двух последних колонках табл. 1 и характеризуют нормальные перемещения точек поверхности, лежащих на координатных осях и равноудалённых от начала координат, где действует сосредоточенная сила. Видно, что для материалов 1, 4, 8, 9 и 11 поверхность полупространства жёстче в направлении оси z (соответствующее перемещение меньше). Для остальных материалов поверхность жёстче в направлении оси y .

Направления экстремальной жёсткости границы полупространства после перехода к полярным координатам ρ, α можно определить из формул [3]

$$u_x(0, \rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) = \frac{P_x u(\alpha)}{2\pi A_{66}}, \quad u(\alpha) = \frac{(m_1 - m_2) \gamma_3^2 \cos^2 \alpha \zeta_1(\alpha) \zeta_2(\alpha)}{D(\alpha)},$$

$$D(\alpha) = m_1 h_2^2(\alpha) \zeta_1(\alpha) - m_2 h_1^2(\alpha) \zeta_2(\alpha) - 4(m_1 - m_2) \sin^2 \alpha \zeta_1(\alpha) \zeta_2(\alpha) \zeta_3(\alpha),$$

$$h_k(\alpha) = (m_k + 1) \gamma_3^2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha, \quad \zeta_n(\alpha) = \sqrt{\gamma_n^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

В табл. 2 для материалов из табл. 1 даны значения углов $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$, при которых функция $u(\alpha)$ (4) достигает на отрезке $[0; \pi/2]$ соответственно наименьшего и наибольшего значения. Эти углы характеризуют направления наибольшей и наименьшей жёсткости поверхности полупространства.

Таблица 2

Направления экстремальной жёсткости

Материал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\alpha_{\min}$	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	0
$\alpha_{\max}$	0,699	$\pi/2$	1,20	0	$\pi/2$	1,08	$\pi/2$	0	0,503	0,833	0	$\pi/2$	1,21

Как видно, экстремальные направления безразмерного перемещения (4) часто (но не всегда) совпадают с направлениями осей координат y, z .

Решение задачи. Для решения ИУ (1) при условии $q(y, z) = 0$, $(r, z) \in \Omega$, используем метод нелинейных граничных ИУ [4, 5], позволяющий одновременно определить область контакта, контактное давление, нормальное перемещение материала вне области контакта. Предположим, что область контакта целиком содержится в прямоугольнике $S = \{|y| \leq b_0, |z| \leq a_0\}$. Прямоугольник S покроем равномерной сеткой из m узлов с шагами h_1 по оси y и h_2 по оси z . При расчёте значений ядра в этих узлах его особенности сглаживались по формулам

$$\gamma(y - y_0)^2 + \eta(z - z_0)^2 \rightarrow \gamma(y - y_0)^2 + \eta(z - z_0)^2 + (\gamma + \eta)\delta_*, \quad \delta_* = \frac{h_1 h_2}{32}. \quad (5)$$

Регуляризация (5) обеспечивает сходимость метода и отладку программы, давая хорошее совпадение с точным решением для эллиптического параболоида [2], когда

$$f(y, z) = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}. \quad (6)$$

Для случая (6) решение ИУ (1) с ядром в форме двойного интеграла Фурье получено в виде [2]

$$q(y, z) = q_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2}}, \quad P = \iint_{\Omega} q(y, z) dy dz = \frac{2\pi}{3} abq_0, \quad (7)$$

$$\delta = aq_0 \frac{(m_1 - m_2) \gamma_3^2}{8A_{66}} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1(\theta) \zeta_2(\theta) \cos^2 \theta d\theta}{D(\theta) r(\theta)}, \quad (8)$$

$$\frac{b^2}{2R_1} + \frac{a^2}{2R_2} = \delta, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{c}{d}, \quad r(\theta) = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \quad (9)$$

где использованы обозначения (4) и

$$c = \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1(\theta) \zeta_2(\theta) \cos^4 \theta d\theta}{D(\theta) r^3(\theta)}, \quad d = \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1(\theta) \zeta_2(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta}{D(\theta) r^3(\theta)}.$$

При заданных величинах δ , R_1 , R_2 отношение полуосей эллипса контакта a/b определяется из второго соотношения (9). Затем величина a находится из первой формулы (9), величина q_0 — из (8). Вдавливающая сила рассчитывается по второй формуле (7).

При расчётах брали $a_0 = b_0$ (прямоугольник S — квадрат), случаи материалов соответствуют табл. 1. Число узлов бралось от 81 до 289.

Использовались безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$y' = \frac{y}{a_0}, \quad z' = \frac{z}{a_0}, \quad \delta' = \frac{\delta}{a_0}, \quad R_1' = \frac{R_1}{a_0}, \quad R_2' = \frac{R_2}{a_0}, \quad a' = \frac{a}{a_0}, \quad b' = \frac{b}{a_0},$$

$$k = \frac{b}{a}, \quad q'(y', z') = \frac{q(y, z)}{A_{66}}, \quad q_0' = \frac{q_0}{A_{66}}, \quad P' = \frac{P}{A_{66} a_0^2}.$$

Отметим, что при вдавливании эллиптического параболоида может возникать круговая область контакта ($k = 1$). При вдавливании кругового параболоида ($R_1 = R_2$), как правило, возникает эллиптическая область контакта. При этом оказывается, что для материалов 1, 4, 8, 9 и 11, когда поверхность полупространства жёстче в направлении оси z , область контакта вытянута вдоль оси z . Для материалов 2, 3, 5—7, 10, 12 и 13, когда поверхность тела жёстче в направлении оси y , зона контакта вытянута вдоль оси y .

Аналогичный вывод можно сделать для штампа в форме кругового конуса, когда

$$f(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2},$$

и для штампа в форме правильной четырёхугольной пирамиды, когда

$$f(y, z) = \max(|y|, |z|). \quad (10)$$

На рис. 1 схематично показаны узлы сетки, принадлежащие области контакта, при вдавливании пирамиды (10). При этом брали сетку из 13×13 узлов, $\delta = 1$. Как видно, по сравнению с изотропным материалом, зона контакта увеличивается в том направлении, в котором поверхность тела более жёсткая. Из материалов, приведённых в табл. 1, наименьшая площадь области контакта наблюдается для графита.

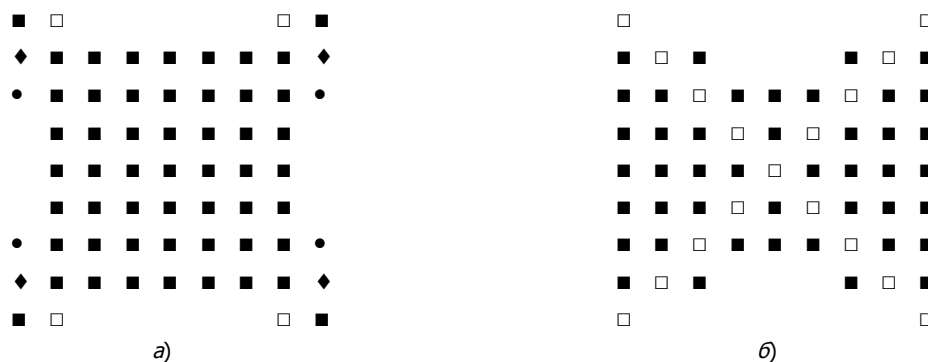


Рис. 1. Узлы сетки в области контакта: а — к затемнённым квадратикам для изотропного материала добавляются незатемнённые для материалов 4, 11, ромбики для материалов 2, 5, 10 или ромбики и кружки для материала 12; б — незатемнённые квадратiki для графита, все квадратiki для углеволокна.

Заключение. Решена новая пространственная контактная задача с неизвестной областью контакта для трансверсально-изотропного тела. В отличие от случая, когда плоскости изотропии параллельны границе полупространства [1], здесь для вытянутого в определённом направлении штампа форма области контакта существенно зависит от ориентации штампа.

Библиографический список

1. Ding, H. Elasticity of transversely isotropic materials / Haojiang Ding, Weiqiu Chen, L. Zhang. — Dordrecht : Springer, 2006. — 435 p.
2. Fabrikant, V. I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space / V. I. Fabrikant // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 64, no. 2. — Pp. 151—170.
3. Давтян, Д. Б. Действие полосового штампа на трансверсально-изотропное полупространство / Д. Б. Давтян, Д. А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76, вып. 5. — С. 783—794.
4. Галанов, Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б. А. Галанов // Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 5. — С. 827—835.

5. Александров, В. М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. — Москва : Факториал, 1998. — 288 с.

Материал поступил в редакцию 13.05.2013.

References

1. Ding, H., Chen, W., Zhang, L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht : Springer, 2006, 435 p.
2. Fabrikant, V. I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2011, vol. 64, no. 2, pp. 151–170.
3. Davtyan, D. B., Pozharskiy, D. A. Deystviye polosovogo shtampa na transversalno-izotropnoye poluprostranstvo. [Band stamp effect on transversally isotropic half-space.] Prikladnaya matematika i mexanika, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 783–794 (in Russian).
4. Galanov, B. A. Metod granichnykh uravneniy tipa Gammershteyna dlya kontaknykh zadach teorii uprugosti v sluchaye neizvestnykh oblastey kontakta. [Hammerstein boundary equation method for elasticity theory contact problems in case of contact unknown domains.] Prikladnaya matematika i mekhanika, 1985, vol. 49, iss. 5, pp. 827–835 (in Russian).
5. Alexandrov, V. M., Pozharskiy, D. A. Neklassicheskiye prostranstvennyye zadachi mekhaniki kontaknykh vzaimodeystviy uprugikh tel. [Nonclassical spatial problems of elastic bodies contact interaction mechanics.] Moscow : Faktorial, 1998, 288 p. (in Russian).

THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEM FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLID*

D. A. Pozharskiy, D. B. Davtyan

(Don State Technical University)

The spatial contact problem with an unknown contact domain is investigated for a transversely isotropic elastic half-space the boundary of which is perpendicular to the planes of isotropy. For a circular punch, the contact zone, as a rule, is not a circle because the stiffness of the elastic solid boundary depends on the direction. The problem is reduced to an integral equation (IE) with respect to the contact pressure the kernel of which does not include quadratures. Galanov's numerical method which makes it possible to determine simultaneously the contact zone and the contact pressure is used to solve the IE. The simple form of the IE kernel allows regularizing it by using a parameter which depends on mesh intervals as well as on anisotropy parameters. A well-known exact solution to a punch in the form of an elliptical paraboloid is used to verify the computer program. The numerical analysis has been made for different transversely isotropic materials contacting with conical and pyramidal punches.

Keywords: theory of elasticity, contact problem, transversely isotropic half-space, Galanov's method.

* The research is done with the financial support from RFFI (grant 12-01-00065).