

## Энергетический баланс при гравитационном истечении зернового материала из бункера с боковым отверстием\*

**В. С. Кунаков, Д. Н. Савенков, К. А. Тимолянов**  
(Донской государственный технический университет)

*Рассчитана минимальная высота щели, при которой начинается устойчивое истечение зернового материала (пшеницы). Проанализирован энергетический баланс системы. В результате определена удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения при истечении зернового материала из бункера. Установлена зависимость этой работы от высоты насыпного слоя и от высоты выпускного отверстия. Экспериментальным путём найдена скорость истечения зернового материала при различных углах наклона днища и высоте выпускного отверстия бункера. Также была рассчитана удельная работа, совершаемая силами трения при перемещении зернового материала вдоль боковых, торцовых стенок и днища бункера. Определена энергия, необходимая для разрушения сводов при различных углах наклона днища. Полученные результаты можно использовать в механизмах с боковой подачей сыпучего материала.*

**Ключевые слова:** зерновой материал, щелевой бункер, работа сил трения.

**Введение.** В воздушных и решётчатых сепараторах, дозирующих устройствах, мельницах и т. д. используются бункеры с боковым отверстием. Они легче в управлении, чем бункеры с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, так как нагрузка на регулирующую заслонку значительно меньше.

В большинстве технологических линий сыпучий материал истекает из бункеров без дополнительных давлений на верхние слои, только под действием собственного веса. Такое истечение принято называть гравитационным.

Истечение сыпучих материалов из осесимметричных бункеров изучали Г. Янсен, Г. А. Гениев, Р. Л. Зенков, К. В. Алфёров, Л. В. Гячев, В. С. Кунаков и др. [1, 2]. Исследований истечения из бункеров с боковым отверстием мало. В качестве примера можно привести работы В. С. Фуфачёва, В. В. Денисова [3—4]. Это можно объяснить сложностью математического описания движения зернового потока в подобных бункерах и меньшим практическим использованием по сравнению с осесимметричными.

Движение зернового материала в бункере сопровождается трением частиц зерна друг о друга и о стенки. При этом силы внутреннего и внешнего трения совершают определённую работу и тормозят процесс истечения [2]. Величина работы зависит от диаметра и формы частиц, влажности, размеров выпускного отверстия, угла наклона днища и т. д.

Цель данного исследования — определить:

- высоту щели, при которой начинается устойчивое истечение зернового материала;
- высоту щели, при которой вероятность образования сводов стремится к нулю;
- работу, совершаемую силами внутреннего и внешнего трения в зависимости от геометрических параметров бункера, природы и состояния зернового материала.

**Основная часть.** В работе принята комбинированная модель зернового материала, обладающая следующими основными свойствами.

— На первом этапе рассматривается дискретная модель. Зёрна выбраны в виде шаров одинакового диаметра. Трение зёрен между собой и о стенки бункера определяются по закону Амонтонна — Кулона.

\* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

— На втором этапе зерновой материал рассматривается как сплошная несжимаемая среда. Истечение зернового материала является стационарным, и к нему применима теорема о неразрывности потока.

**1. Определим минимальную высоту выпускного отверстия, при котором происходит устойчивое истечение зернового материала.** В зоне выпускного отверстия интенсивно образуются своды. Свод имеет две точки опоры А и Е (рис. 1) — одну на днище, а другую на торцевой стенке. Чем ближе эти точки друг к другу, тем выше вероятность сводообразования.

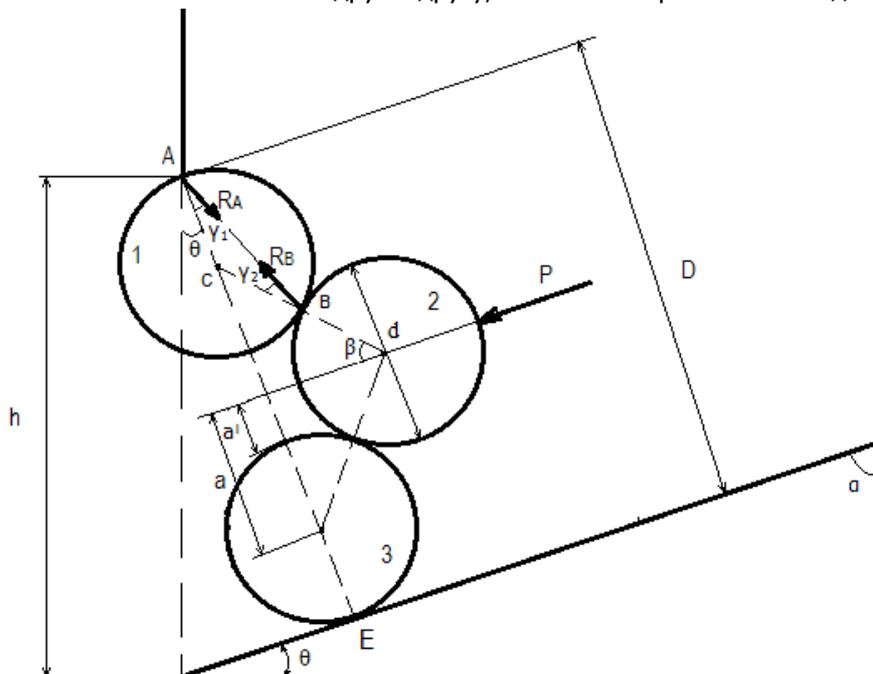


Рис. 1. Схема укладки трёх шаров в бункере с боковым выпускным отверстием

Упрощённо смоделируем зёрна невесомыми шарами диаметром  $d$ , с углами внешнего и внутреннего трения  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно. Свод разрушится, если шар 1 либо 3 потеряет равновесие. Условием равновесия шара 1 являются равенства сил реакций  $R_A$  и  $R_B$ , приложенных в точках А и В.

$$\angle CAB = \angle ABC = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma,$$

где  $\gamma_1$  — коэффициент внешнего трения;  $\gamma_2$  — коэффициент внутреннего трения.

Диаметр зёрен пшеницы определи по формуле:

$$d = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}, \quad (1)$$

где  $a$  — длина зерна,  $b$  — ширина зерна,  $c$  — толщина зерна.

Поперечное сечение потока зернового материала определяет расстояние

$$D = d \cdot (2 \sin \beta + 1),$$

где  $\beta$  — угол укладки зёрен, имеющий возможные значения от нуля до  $\frac{\pi}{2}$ .

Минимальную высоту выпускного отверстия находим по формуле:

$$h_{\min} = \frac{d \cdot (2 \cdot \sin \beta + 1)}{\cos \theta}, \quad (2)$$

где  $h_{\min}$  — минимальная высота выпускного отверстия, при которой начинается устойчивое истечение, м;  $\theta$  — угол наклона днища к горизонтали, град.

Согласно (2) для зернового материала с углом укладки  $45^\circ$  и углом наклона днища  $\theta = 30^\circ$  получим  $h = 2,78 d$  или  $h = 11 \cdot 10^{-3}$  м.

Соотношение  $h = 2,78 d$  получено в предположении, что угол укладки  $\beta = 45^\circ$  имеет среднестатистическое значение, характерное для большого числа зёрен при хаотической укладке. С ростом числа зёрен, которые могут уложиться на выпускной щели, вероятность формирования сводов уменьшается.

При полученных значениях отношения  $h/d$  истечение носит пульсирующий характер и может прерываться, что подтверждается экспериментально. С ростом  $h/d$  пульсация постепенно сглаживается, а истечение приобретает всё более устойчивый характер.

## 2. Введение в модель экспериментальных данных.

2.1. Определение энергии, необходимой для разрушения сводов при различных углах наклона днища.

Для определения энергии, необходимой для разрушения сводов, рассмотрим истечение зернового материала из бункера с боковым выпускным отверстием, ограниченным сечениями  $AB$  и  $CD$  (рис. 2).

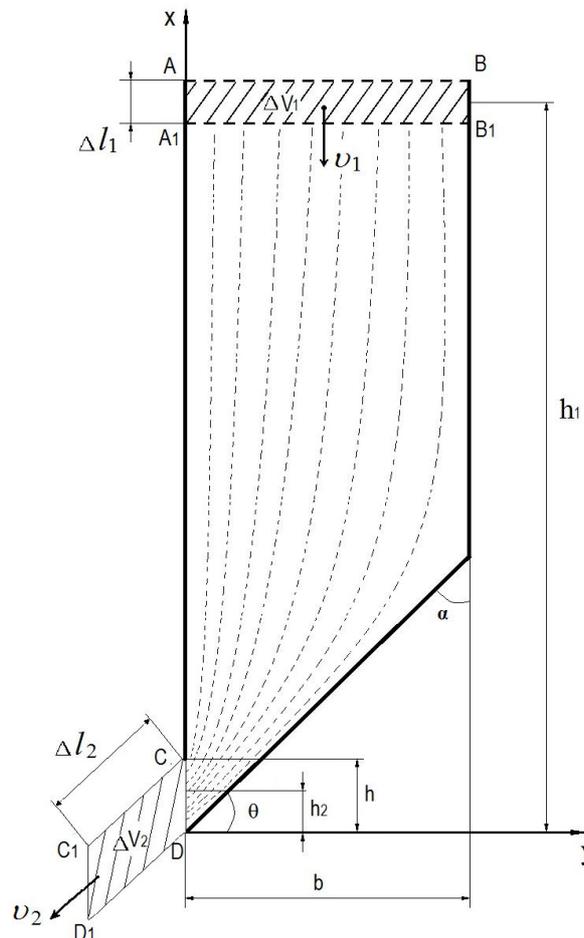


Рис. 2. Истечение зернового материала из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием

Сечение  $AB$  представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , где  $a$  — длина,  $b$  — ширина бункера. Сечение  $AB$  имеет площадь  $S_1$  и расположено на высоте  $h_1$  от нулевого уровня.

Сечение  $CD$  является выпускным отверстием длиной  $a$  и высотой  $h$ , имеет площадь  $S_2$  и расположено на высоте  $h_2$  от нулевого уровня;  $\alpha$  — угол между днищем и вертикалью.

Перемещаясь от сечения  $AB$  к  $CD$ , зерновой материал переходит в суженную часть бункера и, как следует из уравнения неразрывности, движется ускоренно под действием сил тяжести  $S_1 u_1 = S_2 u_2$ . Для решения задачи можно применить законы динамики. Однако при большом числе частиц удобнее воспользоваться законом сохранения энергии.

Пусть за время  $\Delta t$  зерновой материал в бункере сместится. Причём сечение  $AB$  получит приращение  $\Delta l_1$  и займёт положение  $A_1 B_1$ , а сечение  $CD$  получит приращение  $\Delta l_2$  и займёт положения  $C_1 D_1$ . Истечение стационарно, значит, полная энергия зернового материала объёмом  $V$ , ограниченная сечениями  $AB$  и  $CD$ , за время  $\Delta t$  не изменится. Поэтому изменение полной энергии равно разности полной энергии заштрихованных верхней и нижней частей объёмами  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  с массами

$$\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta V_1 \text{ и } \Delta m_2 = \rho \cdot \Delta V_2,$$

где  $\rho$  — насыпная плотность зернового материала, кг/м<sup>3</sup>.

Изменение энергии численно равно работе, совершаемой силами трения.

Применим закон сохранения и превращения энергии для истечения зернового материала из бункера с боковым выпускным отверстием:

$$\frac{\rho \cdot u_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{\rho \cdot u_2^2}{2} - \rho \cdot g \cdot h_2 = \frac{\Delta A_{TP}}{\Delta V} + \frac{\Delta W}{\Delta V}, \quad (3)$$

где  $u_1$  — скорость движения зернового материала в сечении  $AB$ , м/с;  $u_2$  — скорость зернового материала в сечении  $CD$ , м/с;  $h_1$  — высота сыпучего материала, засыпанного в бункер, м;

$h_2$  — половина высоты выпускного отверстия  $h_2 = \frac{h}{2}$ , м;  $h$  — высота выпускного отверстия, м;  $g$  — ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $\Delta A_{TP}$  — работа сил трения, совершаемая в объёмах  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$ , Дж;  $\Delta W$  — потеря энергии для разрушения сводов в объёме  $\Delta V_1$ , Дж.

Выражение (3) можно использовать для решения двух задач. Первая: определить удельную работу зернового материала, совершаемую силами трения, и потери энергии, необходимые для разрушения сводов при известной скорости истечения зернового материала. Вторая: определить скорость истечения при известной удельной работе.

Выражение (3) можно преобразовать к виду:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2) - \frac{2 \cdot \Delta A_{TP}}{\rho \cdot \Delta V}}{\left[1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right]}}. \quad (4)$$

Зная удельную работу сил трения, можно оценить скорость истечения зернового материала из бункера с боковым выпускным отверстием.

Потеря энергии для разрушения сводов зависит от высоты щели и размеров зёрен:

$$\Delta W = \Delta W_0 \cdot e^{-\frac{h}{d}}, \quad (5)$$

где  $\Delta W_0$  — максимальная энергия, затраченная на разрушение сводов, Дж.

Полагая, что  $\frac{\Delta A_{TP}}{\Delta V} = \frac{A_{TP}}{V}$ , а  $\frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{W}{V}$ , из выражения (3) получим:

$$W_{VD} = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + \frac{\rho \cdot u_2^2}{2} \cdot \left[ \frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 \right] - \frac{A_{TP}}{V}, \quad (6)$$

где  $W_{VD}$  — удельная энергия, затраченная на разрушение сводов, Дж.

$W_{yD}$  имеет максимальное значение, когда своды формируются малым числом зёрен  $h = h_{\min}$ . В этом случае сводообразование значительно тормозит процесс истечения.

2.2. Определение удельной работы, совершаемой силами внутреннего и внешнего трения.

Из выражения (3) найдём работу сил внешнего и внутреннего трения:

$$A_{TP}^{yD} = \frac{A_{TP}}{V} = \rho g \cdot (h_1 - h_2) + \rho \frac{u_2^2}{2} \cdot \left[ \frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 \right] - \frac{W_0 \cdot e^{-\frac{h}{d}}}{V}, \quad (7)$$

где  $A_{TP}^{yD}$  — удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения, Дж/м<sup>3</sup>.

При  $\frac{h}{d} = 10$  формирование сводов становится менее вероятным, а устойчивость их уменьшается. На их разрушение тратится всё меньше и меньше энергии  $W_{yD} \approx 0$ .

Для проведения эксперимента использовалась пшеница «донская безостая», выращенная на полях Кумо-Манычской впадины в 2012 году:

- диаметр зёрен  $d = 0,0037$  м;
- угол внешнего трения  $\varphi = 23,1^\circ$ ;
- внутреннего  $\psi = 17^\circ$ ;
- влажность пшеницы 15,2 %;
- плотность 820 кг/м<sup>3</sup>;
- объём засыпки 0,02 м<sup>3</sup>.

Результаты вычислений  $A_{TP}^{yD}$  и  $W_{yD}$  сведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения  $A_{TP}^{yD}$  и  $W_{yD}$

Угол наклона днища $\theta$ , град.	19	30	40	45	50	60
Минимальная высота выпускного отверстия $h_{\min}$ , $10^{-3}$ м	10,4	11,1	11,8	13,0	13,7	15,9
Скорость истечения зернового материала ( $h_{\min} = 11 \cdot 10^{-3}$ м), м/с	0,068	0,092	0,110	0,119	0,110	0,095
Высота выпускного отверстия, когда $W_{yD} \approx 0$ , $10^{-3}$ м	26,3	27,0	27,8	28,5	29,2	30,0
Удельная работа, сил внутреннего и внешнего трения $A_{TP}^{yD}$ , кДж/м <sup>3</sup>	3,22	3,39	3,61	3,82	3,95	3,95
Удельная энергия для разрушения сводов $W_{yD}$ , кДж/м <sup>3</sup>	0,102	0,103	0,105	0,109	0,115	0,133

2.3. Определение работы силы внешнего трения при перемещении зернового материала вдоль каждой стенки бункера.

Работа силы внешнего трения при перемещении зернового материала вдоль вертикальных стенок бункера определяется по формуле [2]:

$$A_{TP} = \frac{S_1 \cdot \rho \cdot g}{P} \cdot S_{CT} \cdot l, \quad (8)$$

где  $A_{TP}$  — работа силы внешнего трения о вертикальные стены бункера, Дж;  $P$  — периметр бункера  $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ , м;  $S_{CT}$  — площадь стенки бункера, м<sup>2</sup>;  $l$  — путь, пройденный зерновым материалом, м.

Применим выражение (8) для всех вертикальных стенок бункера.

Работа силы внешнего трения при перемещении зернового материала вдоль торцовых стен бункера ( $A_1$ , Дж) определяется по формуле:

$$A_1 = \frac{S_1 \cdot \rho \cdot g}{P} \cdot \left( b \cdot \left[ h_1 - \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right] + \frac{b^2}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \left( \left[ h_1 - \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right] + \frac{b}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (9)$$

Работа силы трения при перемещении зернового материала вдоль задней стенки бункера ( $A_2$ , Дж) определяется по формуле:

$$A_2 = \frac{S_1 \cdot \rho \cdot g}{2 \cdot P} \cdot (a \cdot (h_1 - b \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2). \quad (10)$$

Работа сил трения при перемещении зернового материала вдоль передней стенки бункера ( $A_3$ , Дж) определяется по формуле:

$$A_3 = \frac{S_1 \cdot \rho \cdot g \cdot a}{2 \cdot P} \cdot (h_1 - h)^2 \quad (11)$$

Определим работу силы трения при перемещении зернового материала вдоль днища ( $A_4$ , Дж):

$$A_4 = f \cdot \frac{\rho \cdot g}{k} \cdot a \cdot \left( \frac{b}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \cos \theta. \quad (12)$$

Работа силы трения при перемещении зернового материала вдоль боковых стенок и дна бункера ( $A_{\text{ВНЕ}}^{\text{УД}}$ , Дж) определится после сложения (9), (10), (11) и (12):

$$A_{\text{ВНЕ}}^{\text{УД}} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{V}. \quad (13)$$

Найдём суммарную работу сил внутреннего и внешнего трения ( $A_{\text{ТР}}^{\text{УД}}$ , Дж):

$$A_{\text{ТР}}^{\text{УД}} = A_{\text{ВН}}^{\text{УД}} + A_{\text{ВНЕ}}^{\text{УД}}. \quad (14)$$

Результаты вычислений удельной работы зернового материала, совершаемой силами внешнего и внутреннего трения, занесём в табл. 2.

Таблица 2

**Удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения**

Угол наклона днища $\beta$ , град.	19	30	45	50	55	60
Торцовые стенки $A_1$ , кДж/м <sup>3</sup>	1,56	0,97	0,69	0,53	0,42	0,34
Задняя стенка $A_2$ , кДж/м <sup>3</sup>	0,41	0,36	0,32	0,28	0,21	0,19
Передняя стенка $A_3$ , кДж/м <sup>3</sup>	0,53	0,58	0,76	0,81	0,86	0,90
Днище $A_4$ , кДж/м <sup>3</sup>	0,43	0,48	0,58	0,70	0,76	0,81
Внешнее $A_{\text{ВНЕ}}^{\text{УД}}$ , кДж/м <sup>3</sup>	2,92	2,38	2,35	2,31	2,24	2,23
Внутр. $A_{\text{ВН}}^{\text{УД}}$ , кДж/м <sup>3</sup>	0,3	1,01	1,26	1,51	1,71	2,01
Общ. $A_{\text{ТР}}^{\text{УД}}$ , кДж/м <sup>3</sup>	3,22	3,39	3,61	3,82	3,95	4,24

**Результаты и их обсуждение.** На рис. 3 представлена модель бункера с боковым выпускным отверстием. Бункер представляет собой ёмкость прямоугольной формы с регулируемым углом наклона днища. Две боковые стены сделаны из стекла для наблюдения за истечением, а торцовые и днище — из стали.

Обработав экспериментальные данные  $u(h, h_1)$  и подставив их в выражение (7), получим зависимость удельной работы сил внутреннего и внешнего трения от высоты засыпки пшеницы и от высоты выпускного отверстия (рис. 4).

Из графика видно, что удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения, увеличивается прямо пропорционально высоте засыпки. Этот факт можно объяснить тем, что высота засыпки определяет количество зёрен, участвующих в трении — следовательно, чем выше  $h_1$ , тем больше и удельная работа работы сил внутреннего и внешнего трения. Последняя может быть определена простой зависимостью

$$A_{\text{УД}} = k \cdot h_1,$$

где  $k$  — безразмерный эмпирический коэффициент пропорциональности (для  $\alpha = 45^\circ$   $k = 7,5...7,9$ ).

Из графика также видно, что удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения, с ростом высоты выпускного отверстия незначительно уменьшается. Очевидно, что с ростом  $h/d$  формирование сводов становится менее вероятным, а устойчивость их уменьшается. На их разрушение тратится всё меньше и меньше энергии.



Рис. 3. Бункер для экспериментального исследования истечения зернового материала

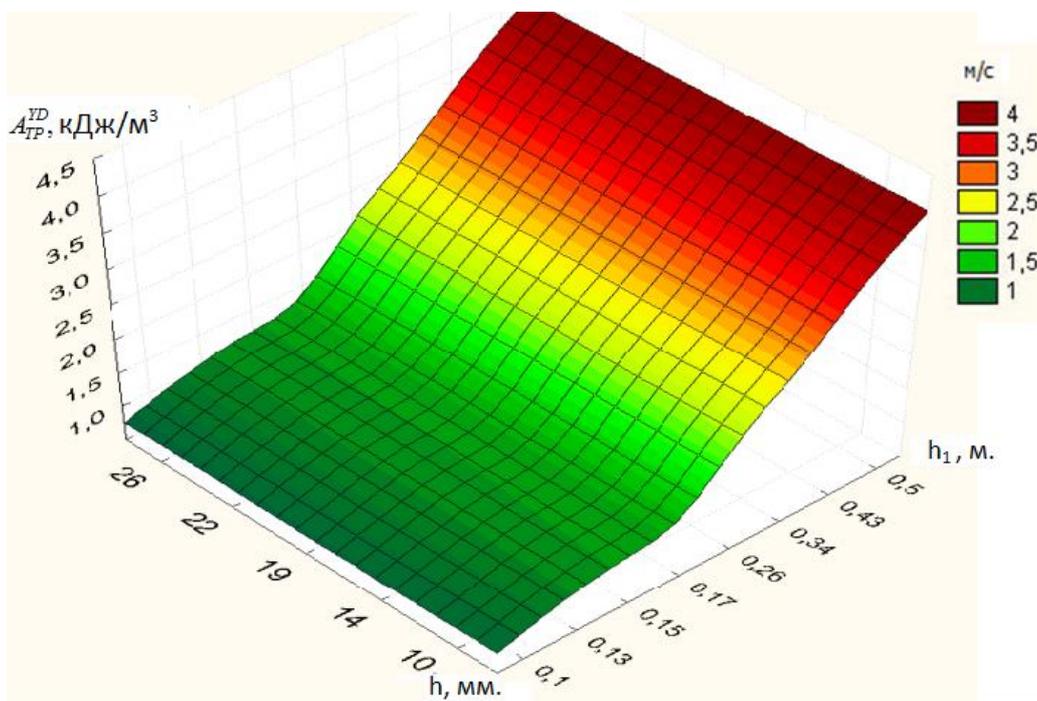


Рис. 4. Зависимость удельной работы, совершаемой силами внутреннего и внешнего трения ( $A_{TP}^{UD}$ ), от высоты засыпки пшеницы ( $h_1$ ) и от высоты выпускного отверстия  $h$  при  $\alpha = 45$  град.

При перемещении зернового материала вдоль всех стенок и дна бункера силы внешнего трения совершают удельную работу. На рис. 5 приведена её зависимость от угла наклона дна  $\theta$ , определяемого формулами (8)—(12).

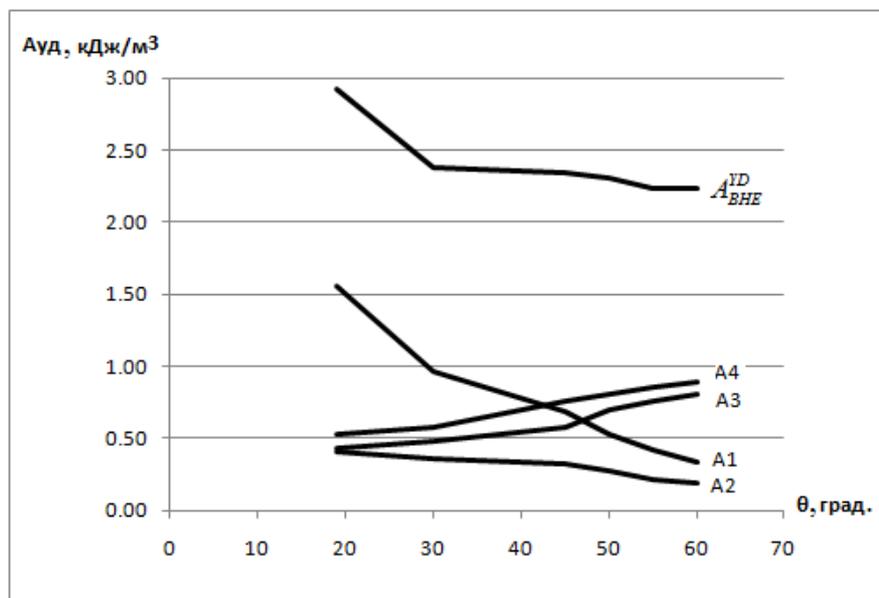


Рис. 5. Зависимость удельной работы, совершаемой силами внешнего трения, от угла наклона дна  $\theta$ :  $A_1$  — торцовые стенки;  $A_2$  — задняя стенка;  $A_3$  — передняя стенка;  $A_4$  — дно;  $A_{БНЕ}$  — суммарное

Из графика видно, что при увеличении угла наклона дна удельная работа, совершаемая силами внешнего трения при перемещении зернового материала вдоль задней и торцовых стенок бункера, уменьшается. Это обусловлено тем, что при увеличении нормальное давление на стенки бункера остаётся величиной постоянной, а площадь этих стенок уменьшается. Площадь передней стенки с увеличением угла наклона дна увеличивается, следовательно, растёт и удельная работа, совершаемая силами трения.

#### **Выводы.**

1. В работе предложен метод оценки скорости истечения зернового материала в бункере с боковым выпускным отверстием на основании закона сохранения энергии.
2. Экспериментально установлено и строго обосновано, что истечение зернового материала в бункере с боковым выпускным отверстием при  $\theta = 19^\circ$  начинается с  $h = 2,78 d$ , а при  $\theta = 60^\circ$  — с  $h = 4,1 d$ .
3. При высоте щели выпускного отверстия более  $10 d$  вероятность образования сводов стремится к нулю.
4. Показана возможность определения удельной работы зернового материала, совершаемой силами внутреннего и внешнего трения. Оказалось, что она увеличивается прямо пропорционально высоте засыпки и незначительно уменьшается с увеличением высоты выпускного отверстия. С увеличением угла наклона дна удельная работа, совершаемая силами внутреннего и внешнего трения, увеличивается, имея максимальное значение при  $\theta = 60^\circ$  ( $4,24 \text{ кДж/м}^3$ ), а минимальное — при  $\theta = 19^\circ$  ( $3,22 \text{ кДж/м}^3$ ).

#### **Библиографический список**

1. Зенков, Р. Л. Бункерные устройства / Р. Л. Зенков, Г. П. Гриневич, В. С. Исаев. — Москва : Машиностроение, 1977. — 223 с.

2. Гячев, Л. В. Основы теории бункеров / Л. В. Гячев. — Новосибирск : Издательство Новосибирского университета, 1992. — 311 с.

3. Фуфачёв, В. С. Повышение эффективности функционирования комбикормового агрегата путём совершенствования технологического процесса и рабочих органов дозатора : дис. ... к-та техн. наук / В. С. Фуфачёв. — Киров, 2009. — 188 с.

4. Денисов, В. В. Совершенствование складирования и выпуска из бункеров сводообразующих компонентов комбикорма : дис. ... к-та технич. наук / В. В. Денисов. — Саратов, 2009. — 153 с.

Материал поступил в редакцию 3.04.2013.

## **References**

1. Zenkov, R. L., Grinevich, G. P., Isayev, V. S. Bunkernyye ustroystva. [Hopper gears.] Moscow : Mashinostroyeniye, 1977, 223 p. (in Russian).

2. Gyachev, L. V. Osnovy teorii bunkerov. [Hopper theory basics.] Novosibirsk : Izdatelstvo Novosibirskogo universiteta, 1992, 311 p. (in Russian).

3. Fufachev, V. S. Povysheniye effektivnosti funktsionirovaniya kombikormovogo agregata putem sovershenstvovaniya tekhnologicheskogo protsesssa i rabochikh organov dozatora : dis. ... k-ta tekhnich. nauk. [Feed-milling plant efficiency increase through production process and feeder members improvement : Cand. tech. sci. diss.] Kirov, 2009, 188 p. (in Russian).

4. Denisov, V. V. Sovershenstvovaniye skladirovaniya i vypuska iz bunkerov svodoobrazuyushchikh komponentov kombikorma : dis. ... k-ta tekhnich. nauk. [Improvement of stocking and feed ingredients bin output : Cand. tech. sci. diss.] Saratov, 2009, 153 p. (in Russian).

## **FEATURES OF ENERGY BALANCE UNDER GRAIN GRAVITATION OUTFLOW FROM SIDE-OPENING GRAIN-TANK\***

**V. S. Kunakov, D. N. Savenkov, K. A. Timolyanov**

(Don State Technical University)

*The minimum cut height at which a stable grain (wheat) outflow starts is calculated. The energy balance of the system is analyzed. The specific work done by the viscous and skin-friction forces under the grain outflow from the hopper is eventually defined. The dependence of this work on both the transported layer height and the outlet opening height is specified. The grain outflow velocity at various bottom tilt angles and the outlet height are determined experimentally. Besides, the specific work done by the friction forces under grain moving along the end sidewalls and the hopper bottom is calculated. The energy needed to destroy roofs at various bottom tilt angles is found. The obtained results could be used in bulk side-feeding mechanisms.*

**Keywords:** grain, track hopper, friction work.

---

\* The research is done within the frame of the independent R&D.