УДК 517.53/.57

ПРОСТРАНСТВА БЕРГМАНА, ХАРДИ И СОПРЯЖЕННЫЕ К НИМ

В.Г. РЯБЫХ
(Южный федеральный университет),
Г.Ю. РЯБЫХ
(Донской государственный технический университет)

Доказано, что пространство H_1' строго нормировано, а H_1 не является ни строго нормированным, ни равномерно выпуклым. Найден общий вид линейных функционалов над пространством H_1' и над метрическими пространствами H_p', $0 < p < 1$.

Ключевые слова: *пространство Харди, пространство Бергмана, экстремальная функция, линейный функционал.*

Введение. Основными результатами работы являются: пространство Харди не равномерно выпукло и не строго нормировано; пространство Бергмана H_1' строго нормировано; дано аналитическое представление ограниченных линейных функционалов над пространством Бергмана.

Основные определения и вспомогательные результаты. $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $D = D_1$, $d_r(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < r\}$; $T_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, T = T_1$, $d\sigma$ – плоская мера Лебега; линейный функционал $l_\omega(x) = \frac{1}{\pi}\iint_D x\overline{\omega}\,d\sigma$; пространство H_p': множество аналитических функций в области D, принадлежащих пространству $L_p(D), 0 < p < \infty$; пространство H_p: множество функций, аналитических в области D, с конечной величиной

$$\|\varphi\|_p = \lim_{r\to1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{T_r}|\varphi(z)|^p\,d\arg z\right\}^{1/p}, 0 < p < \infty.$$

Определение 1. *B*-пространство назовем равномерно выпуклым, если из $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и $\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$ следует, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Наряду с равномерной выпуклостью в дальнейшем окажется полезным понятие строго нормированного пространства.

Определение 2. Пространство называется строго нормированным, если из равенства $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ следует, что $x = Cy$, $C > 0$.

Определение 3. Функцию f ($\|f\| = 1$), принадлежащую B-пространству, назовем экстремальной функцией (ЭФ) линейного функционала $l \in B^*$, если $l(f) = \|l\|$.

Теорема I. Если V – равномерно выпуклое пространство, то для любого линейного функционала из V^* ЭФ существует и единственна [1].

Теорема II. Если для линейного функционала $l(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T x\overline{\omega}|dr|$ существует ЭФ f, то почти всюду на T выполняется $\|l\|\frac{|f(t)|}{f(t)} = \overline{\omega}(t) - \chi(t)$, $\omega \in L_\infty$, $\chi \in H_\infty$ [2].

Основные результаты. Теорема 1. Пусть X – строго нормированное банахово пространство и $l(x)$ – линейный непрерывный функционал, определенный на этом пространстве. Если существует функция, на которой достигается экстремум функционала, то она единственна [3].

Доказательство. Пусть $f \in X$ и $l(f) = \|l\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left|\frac{l(x)}{\|x\|}\right|$.

Предположим теперь противное, т. е. что существует еще одна функция $g \not\equiv Cf$ (C – некоторая постоянная) такая, что $\|g\| \le 1$ и $l(g) = \|l\|$. Так как $l(x)$ – непрерывный линейный функционал, то $|l(x)| \le \|l\| \cdot \|x\|$. И поэтому экстремум функционала достигается только для функций с нормой, равной единице, т. е. $\|f\| = \|g\| = 1$. Из-за строгой нормируемости X и условия $g \not\equiv Cf$ следует:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| < \frac{1}{2}\left(\|f\| + \|g\|\right),$$

и, следовательно, $\left\|\frac{f+g}{2}\right\| < 1$, но f и g – экстремальные элементы $l(x)$, значит,

$$l\left(\frac{f+g}{2}\right) = \frac{1}{2}(l(f) + l(g)) = \|l\|.$$

То есть $\frac{f+g}{2}$ – тоже экстремальный элемент, но его норма строго меньше единицы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. Пространство H_1' – строго нормированное.

Доказательство. Пусть мы имеем случай равенства в неравенстве треугольника, т. е.

$$\iint\limits_D \left(|f(z)| + |g(z)|\right) d\sigma = \iint\limits_D |f(z)|\, d\sigma + \iint\limits_D |g(z)|\, d\sigma.$$

Поскольку $|f(z) + g(z)| \le |f(z)| + |g(z)|$, то из

$$\iint\limits_D \left(|f(z) + g(z)| - |f(z)| - |g(z)|\right) d\sigma = 0$$

следует, что почти всюду $|f(z) + g(z)| = |f(z)| + |g(z)|$, и из этого равенства следует, что $\arg f = \arg g$ почти всюду. Выбирая теперь в области $|z| < 1$ подобласть, в которой $f(z) \neq 0$ и $g(z) \neq 0$, что можно сделать вследствие аналитичности функций, получаем, что $\arg f / g = 0$, а тогда в этой области $\ln f / g = C > 0$, так как мнимая часть логарифма равна нулю и, следовательно, в этой области

$$f(z) = Cg(z) \tag{1}$$

Пространство строго нормированное, так как с учетом теоремы единственности аналитических функций равенство (1) можно распространить на весь единичный круг.

Теорема доказана.

Теперь докажем теорему об общем виде линейного функционала над пространством H_1', полученную Х.Х. Бурчаевым и В.Г. Рябых [4], используя идею доказательства [5].

Теорема 3. Для того, чтобы выражение вида

$$l_\omega(x) = \lim_{R\to 1-0} \frac{1}{\pi} \iint\limits_D x(Rz)\overline{\omega(Rz)}\, d\sigma$$

было линейным функционалом над пространством H_1', необходимо и достаточно, чтобы $|\omega'(\zeta)| < \frac{C}{1-|\zeta|}$, $\zeta \in D$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in H_1'$, а $l_\omega \in H_1'^*$. Замечая, что $x(Rz)$ сходится по норме пространства H_1' к $x(z)$, имеем:

$$l(x(t)) = \lim_{R\to 1-0} l(x(R^2 t)) = \lim_{R\to 1-0} l\left(\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{x(Rz)d\sigma(z)}{(1-Rt\bar{z})^2}\right) =$$

$$= \lim_{R\to 1-0} \frac{1}{\pi}\iint_D x(Rz) l\left(\frac{1}{(1-Rt\bar{z})^2}\right) d\sigma(z) = \lim_{R\to 1-0} \frac{1}{\pi}\iint_D x(Rz)\overline{\omega(Rz)}d\sigma.$$

Здесь $\overline{\omega(Rz)} = l\left(\frac{1}{(1-Rt\bar{z})^2}\right)$, $z \in D, R < 1$.

Отсюда ($t = re^{i\theta}, z = \rho e^{i\phi}$) $\overline{\omega'(Rz)} = 2Rl\left(\frac{t}{(1-Rt\bar{z})^3}\right)$. Следовательно,

$$\left|\omega'(Rz)\right| = \left| l\left(\frac{2Rt}{(1-Rt\bar{z})^2}\right)\right| \le 2R\|l\| \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(t)}{(1-Rt\bar{z})^3}\right| \le$$

$$\le 4R\|l\|\int_0^1 \frac{rdr}{\left(1-Rr|z|\right)\left(1-\left(Rr|z|\right)^2\right)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Rr|z|, \theta-\phi)d\theta.$$

Здесь P – ядро Пуассона.

Таким образом, $\left|\omega'(Rz)\right| \le 4\|l\|\int_0^1 \frac{Rrdr}{\left(1-Rr|z|\right)^2} \le \frac{1}{1-R|z|}$.

Необходимое условие доказано.

Достаточность. Для упрощения вычислений доказательство проведем при несущественном ограничении на функцию $x(z)$, именно: $x(0) = 0,\ x \in H_1'$.

Пусть теперь $\omega'(z) \le C / \left(1-|z|\right)$. Воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\left(1-|z|^2\right)x(Rz)\overline{\omega(Rz)}\right) = -2zx(Rz)\overline{\omega(Rz)} + R\left(1-|z|^2\right)x(Rz)\overline{\omega'(Rz)}.$$

На его основании выводим, используя формулу Грина: $\iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\phi(z)d\sigma = \frac{1}{2i}\int_T \phi(z)dz$,

$$\left|\lim_{R\to 1}\frac{1}{\pi}\iint_D zx(Rz)\overline{\omega(Rz)}d\sigma\right| = \left|\lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\iint_D x(Rz)\left(1-|z|^2\right)\overline{\omega'(Rz)}d\sigma\right| \le$$

$$\le \lim_{R\to 1} C\left\|x(Rz)\right\|_{H_1'} \le C_1\left\|zx(z)\right\|_{H_1'} \tag{2}$$

Теорема доказана.

Найдем аналитическое представление общей формы линейного непрерывного функционала над пространством $H_p', 0 < p < 1$.

Положим

$$\|f\|_{H_p'} = \left(\iint_D |f(z)|^p d\sigma(z)\right)^{1/p},\ z = re^{i\theta}, 0 \le \theta < 2\pi, d\sigma(z) = rdrd\theta. \tag{3}$$

При $0 < p < 1$ величина (3) не является нормой, но имеет место неравенство: $\|f+g\|_{H_p'}^p \le \|f\|_{H_p'}^p + \|g\|_{H_p'}^p$, если $f(z), g(z)$ из H_p'.

Предварительно докажем ряд лемм относительно функций из пространства H_p'.

В дальнейшем потребуются следующие определения.

Определение 4. Функция $f(z)$, заданная и непрерывная в замкнутом круге $|z|\le 1$ и аналитическая в открытом круге $|z|<1$, принадлежит:

а) классу $\Lambda_\alpha A$, если она удовлетворяет условию $\sup_{|\theta_1-\theta_2|<h}|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|=O(h^\alpha)$, где $0<\alpha\le 1$ (условие Липшица);

б) классу $\Lambda_* A$, если она удовлетворяет условию $\left|f(e^{i(\theta+h)})-2f(e^{i\theta})+f(e^{i(\theta-h)})\right|=O(h)$ (условие Зигмунда).

Определение 5. Пусть функция $f(z)$ определена и аналитична в единичном круге $|z|<1$ и $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$. Тогда

а) дробная производная порядка $\beta>0$ функции $f(z)$ есть функция

$$f^{[\beta]}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{k!}z^k;$$

б) дробный интеграл порядка $\beta>0$ функции $f(z)$ есть функция

$$f_{[\beta]}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{k!}{\Gamma(k+1+\beta)}z^k.$$

Лемма 1. Если функция $f(z)\in H'_p$ и $0<p<q<\infty$, то

$$\int_0^1(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta<\infty.$$

Доказательство. В силу оценки [6] $|f(z)|\le\dfrac{C_1\|f\|_{H'_p}}{(1-|z|)^{\frac{2}{p}}}$, $C_1=\text{const}$,

для функций из H'_p имеем:

$$\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\theta\le\frac{\left(C_1\|f\|_{H'_p}\right)^{q-p}}{(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\rho(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}d\rho$ и интегрируя по ρ от нуля до единицы, получаем:

$$\int_0^1(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta\le C_1^{q-p}\|f\|_{H'_p}^q<\infty.$$

Следовательно, так как

$$\int_0^1(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta=\int_0^{1/2}(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta+$$

$$+\int_{1/2}^1(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta\le M+2\int_0^1(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta$$

($M=\int_0^{1/2}(1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2}\rho\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^q d\rho d\theta$), то лемма доказана.

Положим $M_\eta(\rho,f)=\left(\dfrac{1}{2\pi}\iint_{|z|<\rho}|f(z)|^\eta d\sigma(z)\right)^{1/\eta}$, где $0<\eta<\infty$, $0<\rho<1$.

Лемма 2. Пусть функция $f(z) \in H'_p$ и $0 < p < q < \infty$. Тогда

$$\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{2}{p}q-3} M_q^q(\rho, f)\,d\rho < \infty.$$

Доказательство. Имеем, на основании теоремы Фубини, что

$$\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{2}{p}q-3} d\rho \int_0^\rho \left|f(te^{i\theta})\right|^q tdt = \int_0^1 \left|f(te^{i\theta})\right|^q tdt \int_t^\rho (1-\rho)^{\frac{2}{p}q-3} d\rho \le$$

$$\le 1 \Big/ \left(\frac{2}{p}q-2\right) \int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{p}q-2} \left|f(te^{i\theta})\right|^q dt.$$

Отсюда $\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{2}{p}q-2} \int_0^\rho \left|f(te^{i\theta})\right|^q tdt \le 1 \Big/ \left(\frac{2}{p}q-2\right) \int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{p}q-2} \left|f(te^{i\theta})\right|^q dt.$

Умножим обе части этого неравенства на $d\theta$ и проинтегрируем его по θ от нуля до 2π. Применяя теорему Фубини и лемму 1, получаем:

$$\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{2}{p}q-3} d\rho \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \left|f(te^{i\theta})\right|^q tdtd\theta < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Если функция $f(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$, то при $0 < q \le 1$ справедливо неравенство

$$\lim_{r\to 1} M_q^q\left(r, f_{[\beta]}\right) \le K(q,\beta) \int_0^1 (1-\rho)^{q\beta-1} M_q^q(\rho, f)\,d\rho,\ K(q,\beta) = \mathrm{const}.$$

Эта лемма доказывается аналогично следующей теореме работы [7].

Теорема 4. Если функция $f(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$, а $0 < q \le 1$, то имеет место неравенство

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f_{[\beta]}(re^{i\theta})\right|^q d\theta \le R(q,\beta) \int_0^1 (1-r)^{q\beta-1} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^q drd\theta,\ \ R(q,\beta) = \mathrm{const}.$$

Лемма 4. Пусть функция $f(z) \in H'_p$ и $0 < p < q \le 1$, $0 < \beta < \frac{2}{p} - 2$. Тогда

$$f_{[\beta]}(z) \in H'_q,\ q = p \Big/ \left(1 - \frac{\beta}{2}p\right).$$

Доказательство следует из лемм 2 и 3.

Теорема 5. Если ϕ есть ограниченный линейный функционал в пространстве H'_p, $0 < p < 1$, то существует единственная функция $g(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$, такая, что

$$\phi(f) = \lim_{R\to 1} \frac{1}{2\pi} \iint_{D_R} f(z) g(\bar{z})\,d\sigma(z). \tag{4}$$

При этом, 1) если $2/(m+1) < p < 2/m$, $m = 2,3,\ldots$, то $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_\alpha A$, где $\alpha = 2/p - m$; 2) если $p = 2/(m+1)$, то $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_* A$.

Обратно, 1) для любой функции $g(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$, и такой, что $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_{2/p-m} A$, предел (4) существует для всех функций $f(z)$ из H'_p, $2/(m+1) < p < 2/m$, $m = 2,3,\ldots$, и определяет линейный ограниченный функционал в пространстве H'_p; 2) любая функция $g(z)$ такая, что $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_* A$, определяет, согласно (4), ограниченный линейный функционал в пространстве H'_p, $p = 2/(m+1)$.

Доказательство. Докажем прямое утверждение теоремы.

Пусть ϕ – ограниченный линейный функционал в пространстве H'_p и $\phi(z^k) = b_k / (2k+2)$, $k = 0,1,\ldots$. Тогда

$$\left|\phi(z^k)\right| \le \|\phi\| \cdot \|z^k\|_{H'_p} = \frac{\|\phi\|}{(kp+2)^{1/p}} < \infty,$$

откуда следует, что функция $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$.

Для фиксированного ρ такого, что $0 < \rho < 1$, положим $f_\rho(z) = f(\rho^2 z)$, и пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H'_p$. Так как $f_\rho(z)$ есть равномерный предел частичных сумм соответствующего ей степенного ряда, и линейный функционал φ непрерывен, то

$$\phi(f_\rho) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \phi(a_k \rho^{2k} z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_k}{2k+2} \rho^{2k}.$$

Но $f_\rho(z) \to f(z)$ по норме H'_p при $\rho \to 1$ [8]. Следовательно,

$$\phi(f) = \lim_{\rho\to1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_k}{2k+2} \rho^{2k} = \lim_{\rho\to1} \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k d\sigma(z) = \lim_{\rho\to1} \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<\rho} f(z) g(\bar z) d\sigma(z).$$

Таким образом, показано, что ограниченный линейный функционал в пространстве H'_p имеет вид:

$$\phi(f) = \lim_{R\to1} \frac{1}{2\pi} \iint_D f(Rz) g(R\bar z) d\sigma(z), \tag{5}$$

где функция $g(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$.

Докажем свойства функции $g(z)$ в представлении (4).

1) Пусть $2/(m+1) < p < 2/m$, $m = 2,3\ldots$ и

$$F(z) = \frac{d^m}{d\zeta^m}\left(\frac{\zeta}{1-\zeta z}\right) = \frac{m!(-1)^{m+1} z^{m+1}}{(1-\zeta z)^{m+1}}, \ |z| < 1, \ \zeta = |\zeta| e^{ih}.$$

Найдем значение функционала ϕ от функции $F(z)$. Получаем

$$\phi(F) = \lim_{\rho\to1} \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<\rho} F(z) g(\bar z) d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \zeta^{k+1}\right)_{\zeta}^{(m)} g(\bar z) d\sigma(z) =$$

$$= \lim_{\rho\to1} \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi} \iint_{|z|<\rho} \left(\sum_{k=m-1}^{\infty} (k+1)k\ldots(k-m+2)\zeta^{k-m+1} z^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar z^k\right) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi} \lim_{\rho\to1} \rho^{2m} g^{(m-1)}(\rho^2\zeta) = \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi} g^{(m-1)}(\zeta).$$

Отсюда следует оценка:

$$\left|g^{(m-1)}(z)\right| \le 2\|\phi\| \cdot \|F(z)\|_{H'_p} \le 2\|\phi\| m! \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \frac{2\pi d\sigma(z)}{|1-\zeta z|^{(m+1)p}}\right)^{1/p} \le C_2 \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \frac{2\pi d\sigma(z)}{\left(1-r|\zeta|\right)^{(m+1)p-2} |1-\zeta z|^2}\right)^{1/p} =$$

$$= C_2 \left(\int_0^1 \frac{2\pi r dr}{\left(1-r|\zeta|\right)^{(m+1)p-1} \left(1+r|\zeta|\right)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r^2|\zeta|^2\right) d\theta}{1-2r|\zeta|\cos(\theta-h)+r^2|\zeta|^2}\right)^{1/p} \le$$

$$\le C_2 \left(\int_0^1 \frac{2\pi dr}{\left(1-r|\zeta|\right)^{(m+1)p-1}}\right)^{1/p} \le C_2 \left(\frac{2\pi|\zeta|)^{-1}}{(m+1)p-2}\right) \left(1-|\zeta|\right)^{2/p-m-1}, \ C_2 = 2\|\phi\| m!.$$

Используя эту оценку, получаем, что $\left|g^{(m-1)}(\zeta)\right| = O\left(\left(1-|\zeta|\right)^{2/p-m-1}\right)$, а это возможно тогда и только тогда, когда $g^{(m-2)}(\zeta) \in \Lambda_\alpha A$, $\alpha = 2/p - m$ [9].

2) Если $p = 2/(m+1)$, то полагая, что $F(z) = \dfrac{d^{m+1}}{d\zeta^{m+1}}\left(\dfrac{\zeta}{1-\zeta z}\right)$, аналогично получаем равенство $\left|g^{(m)}(\zeta)\right| = O\left(\left(1-|\zeta|\right)^{-1}\right)$, которое имеет место тогда и только тогда, когда $g^{(m-2)}(\zeta) \in \Lambda_* A$ [9].

Докажем теперь обратное утверждение теоремы.

1) Пусть $2/(m+1) < p < 2/m$, $f(z) \in H_p'$, $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_\alpha A$, $\alpha = 2/p - m$. Убедимся, что при этих условиях существует конечный предел

$$\lim_{\rho\to1}\iint\limits_{|z|<\rho} f(z)g(\bar z)d\sigma(z),$$

и что отображение

$$f \to \lim_{\rho\to1}\iint\limits_{|z|<\rho} f(z)g(\bar z)d\sigma(z)$$

определяет линейный ограниченный функционал в пространстве H_p'.

Положим

$$\psi(\rho^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_k}{2k+2}\rho^{2k}, \qquad h^{(m-1)}(z) = (z^{m-2}g(z))^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (k+m-2)...kz^k.$$

Составим выражение

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho} e^{-i\theta} f_{[m-2]}(re^{i\theta})h^{(m-1)}(re^{-i\theta})\rho^2 dr d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \rho^{2k+1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_k}{2k+2}\rho^{2k+2}\right) - a_0 b_0 \rho = (\psi(\rho^2)\rho^2)' - a_0 b_0 \rho.$$

Отсюда

$$(\psi(\rho^2)\rho^2)' = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho} e^{-i\theta} f_{[m-2]}(re^{i\theta})h^{(m-1)}(re^{-i\theta})\rho^2 dr d\theta + a_0 b_0 \rho. \qquad (6)$$

Так как $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_\alpha A$, то легко видеть, что и $h^{(m-2)}(z) \in \Lambda_\alpha A$. Тогда имеет место неравенство:

$$\left|h^{(m-1)}(z)\right| \le C_3(1-|z|)^{2/p-m-1}),\ C_3 < \infty. \qquad (7)$$

Из равенства (6) и неравенства (7) следует, что

$$\left|(\psi(\rho^2)\rho^2)'\right| \le \frac{C_3}{\pi}\int_0^{\rho}(1-r)^{2/p-m-1}\int_0^{2\pi}\left|f_{[m-2]}(re^{i\theta})\right| dr d\theta + |a_0 b_0| \le$$

$$\le 2C_3(1-\rho)^{2/p-m-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} f_{[m-2]}(re^{i\theta})dr d\theta + |a_0 b_0| \le$$

$$\le 2C_3(1-\rho)^{2/p-m-1} M\left(\rho, f_{[m-1]}\right) + C_4 + |a_0 b_0|,\ C_4 = \sup\left|\psi'(r^2)\right|. \qquad (8)$$

Умножая обе части неравенства (8) на $d\rho$ и интегрируя по ρ от нуля до единицы, в силу лемм 2 и 4 заключаем, что $\int_0^1 \left|(\psi(\rho)\rho)'\right| d\rho < \infty$, отсюда следует, что и $\lim\limits_{\rho\to1}|\psi(\rho)| < \infty$.

2) Пусть теперь $p = 2/(m+1)$, $g^{(m-2)}(z) \in \Lambda_* A$. Из равенства (6) при $1/2 < \rho < 1$ вытекает, что

$$\left|(\psi(\rho^2)\rho^2)'\right| \le \frac{4}{\pi}\int_0^{\rho} r dr \left|\int_0^{2\pi} F(z)G(\bar z)d\theta\right| + |a_0 b_0|, \qquad (9)$$

где $G(z)=zh^{(m-1)}(z)=z(z^{m-2}g(z))^{(m-1)}$ и $F(z)=f_{[m-2]}(z)\in H'_{2/3}$ на основании леммы 4. А из условия $g^{(m-2)}(z)\in\Lambda_* A$ следует [9], что

$$\left|G'(z)\right|=O\left(\left(1-|z|\right)^{-1}\right). \quad (10)$$

Заметим также, что

$$\int_0^{2\pi}F(z)G(\bar z)d\theta=\int_0^{2\pi}F_{[1/2]}(z)G^{[1/2]}(\bar z)d\theta, \quad (11)$$

в чем легко убедиться, полагая $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k$, $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k z^k$ и выполняя соответствующие операции над функциями $F(z)$ и $G(z)$.

Из неравенства (9) и равенства (11) вытекает, что

$$\left|(\psi(\rho^2)\rho^2)'\right|\le\frac{4}{\pi}\int_0^{\rho}rdr\int_0^{2\pi}F_{[1/2]}(z)G^{[1/2]}(\bar z)d\theta+\left|a_0b_0\right|,$$

а из (10) следует неравенство

$$\left|G^{[1/2]}(\bar z)\right|\le C_5\left(1-|z|\right)^{-1/2},\ C_5<\infty.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\left|(\psi(\rho^2)\rho^2)'\right|\le\frac{4C_5}{\pi}(1-\rho)^{-1/2}M\left(\rho,F_{[1/2]}\right)+\left|a_0b_0\right|+C_4,$$

где $F_{[1/2]}(z)\in H'_{4/5}$ по лемме 4.

Отсюда, аналогично предыдущему случаю, получаем, что $\lim\limits_{\rho\to1}\left|\psi(\rho)\right|<\infty.$ Теорема доказана.

Теорема 6. Пространство H_1 не является строго нормированным.

Доказательство. От противного. Из теоремы I вытекает, что, если пространство строго нормировано, то у линейного непрерывного функционала над пространством H_1 может быть только одна ЭФ.

Получим противоречие этому утверждению, построив линейный функционал, имеющий более одной ЭФ:

$$l(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_T x(t)t^{-3}dt.$$

Очевидно, что $\|l\|=1$, так как, с одной стороны, $|l(x)|\le\|x\|$, и, одновременно полагая здесь $x(t)=-t^2$ ($\left\|-t^2\right\|=1$), получаем $l(x)=1$; с другой стороны, если $\phi(t)=t(t+d)(1+\bar d t)$, $d\in\mathbb{C}$, то $\|\phi\|=\frac{1}{\pi}\int_T\left|1+\bar d t\right|^2dt=1+|d|^2$, а

$$l\left(\frac{\phi}{1+|d|^2}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\tau^3 d+\tau^2\left(1+|d|^2\right)+\tau d)}{1+|d|^2}\bar\tau^3d\tau=1=\|l\|.$$

Таким образом, ЭФ функционала $l(x)$ не единственна.

Теорема доказана.

Теорема 7. Пространство H_1 не является равномерно выпуклым.

Доказательство. От противного. Предположим, что пространство равномерно выпукло. Из этого предположения следует, что, если $l\in H_1^*$, то функционал l имеет ЭФ.

Получим противоречие этому утверждению, приведя пример линейного функционала из H_1^*, у которого нет ЭФ. Для этого воспользуемся примером из [2]. Положим $\omega(\tau)=1$ при $\tau\in\gamma$, и $\omega(\tau)=0$ при $\tau\in T\setminus\gamma$; $m\gamma>0$, α,β – концы дуги γ; $l(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_T x(\tau)\overline{\omega}(\tau)d\tau$.

Очевидно, $\|l\|=\sup\limits_{\|x\|_{H_1}\le 1}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma x(\tau)d\tau\right|$. А при использовании теоремы из [2]:

$$\|l\|=\inf_{a\in H_\infty} v.m.\left|\omega(\tau)-a(\tau)\right|\le\left|\omega(\tau)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

В плоскости W возьмем отрезок длиной $\pi-2\pi\varepsilon,\ \varepsilon>0,$ и окружим его аналитическим контуром L длиной 2π. Функция $W=\Psi(z)$ осуществляет конформное однолистное отображение D на $\operatorname{int}L$, причем такое, при котором точки α и β переходят в противоположные концы диамера области, ограниченной L. Ясно, что $\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|=1$ и

$$\|l\|\ge\left|l(\Psi')\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma\Psi'(\tau)d\tau\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\Psi(\alpha)-\Psi(\beta)\right|\ge\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

Последнее, в силу произвольности ε, указывает, что $\|l\|=\frac{1}{2}$, а $\inf v.m.\left|\overline{\omega}-a\right|$ достигается при $a(\tau)=\frac{1}{2}$. Но тогда из теоремы II вытекает равенство $\frac{1}{2}|f|\left|d\tau\right|=\pm\frac{1}{2}f(\tau)d\tau$; это означает, что $f(\tau)d\tau$ вещественна на T, т. е. $f(\tau)\equiv 0$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Доказательство окончено.

Выводы. 1. Пространство H_1' строго нормировано.

2. Общий вид непрерывного линейного функционала в пространстве H_p' следующий:

$$\varphi(f)=\lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D f(Rz)g(R\overline{z})d\sigma(z).$$

Библиографический список

1. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М., 1962. – 895 с.
2. Хавинсон С.Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений / С.Я. Хавинсон. – М.: Изд-во МИСИ, 1981. – 92 с.
3. Пожарский Д.А. Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним / Д.А. Пожарский, В.Г. Рябых, Г.Ю. Рябых. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2011. – 183 с.
4. Бурчаев Х.Х. Общий вид линейного функционала в метрическом пространстве H_p', $0<p\le 1$ / Х.Х. Бурчаев, В.Г. Рябых // Сиб. мат. журн. – 1975. – Деп. в ВИНИТИ 17.03.75, 730–75.
5. Рябых В.Г. Линейные ограниченные отображения в A_p / В.Г. Рябых // Известия СКНЦ ВШ. – 1982. – № 3. – С. 37–41.
6. Рябых В.Г. Некоторые экстремальные задачи в пространстве H_p' / В.Г. Рябых // Научные сообщения за 1964 г. (Серия точных и естественных наук). – Изд-во Рост. ун-та, 1964. – С. 74–78.
7. Hardy G.H. Theorems concerning mean values of analitic or armonos functions / G.H. Hardy, G.E. Littlwood // Quart. J. Math. (Oxford Ser.). – 1942. – Vol. 12. – P. 221–256.

8. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М., 1966. – 628 с.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – Т. 1. – М., 1965. – 615 с.

Материал поступил в редакцию 18.07.2011.

References

1. Danford N. Linejny`e operatory`. Obshhaya teoriya / N. Danford, Dzh. T. Shvarcz. – M., 1962. – 895 s. – In Russian.
2. Xavinson S.Ya. Osnovy` teorii e`kstremal`ny`x zadach dlya ogranichenny`x analiticheskix funkcij i ix razlichny`x obobshhenij / S.Ya. Xavinson. – M.: Izd-vo MISI, 1981. – 92 s. – In Russian.
3. Pozharskij D.A. Integral`ny`e operatory` v prostranstvax analiticheskix funkcij i blizkix k nim / D.A. Pozharskij, V.G. Ryaby`x, G.Yu. Ryaby`x. – Rostov n/D: Izdatel`skij centr DGTU, 2011. – 183 s. – In Russian.
4. Burchaev X.X. Obshhij vid linejnogo funkcionala v metricheskom prostranstve H'_p, $0 < p \le 1$ / X.X. Burchaev, V.G. Ryaby`x // Sib. mat. zhurn. – 1975. – Dep. v VINITI 17.03.75, 730–75. – In Russian.
5. Ryaby`x V.G. Linejny`e ogranichenny`e otobrazheniya v $A_p$ / V.G. Ryaby`x // Izvestiya SKNCz VSh. – 1982. – # 3. – S. 37–41. – In Russian.
6. Ryaby`x V.G. Nekotory`e e`kstremal`ny`e zadachi v prostranstve $H'_p$ / V.G. Ryaby`x // Nauchny`e soobshheniya za 1964 g. (Seriya tochny`x i estestvenny`x nauk). – Izd-vo Rost. un-ta, 1964. – S. 74–78. – In Russian.
7. Hardy G.H. Theorems concerning mean values of analitic or armonos functions / G.H. Hardy, G.E. Littlwood // Quart. J. Math. (Oxford Ser.). – 1942. – Vol. 12. – P. 221–256.
8. Goluzin G.M. Geometricheskaya teoriya funkcij kompleksnogo peremennogo / G.M. Goluzin. – M., 1966. – 628 s. – In Russian.
9. Zigmund A. Trigonometricheskie ryady` / A. Zigmund. – T. 1. – M., 1965. – 615 s. – In Russian.

BERGMANN AND HARDY SPACES AND CONJUGATE OF THEM

V.G. RYABYKH
(Southern Federal University),
G.Y. RYABYKH
(Don State Technical University)

It is proved that H'_1 space is strongly notmed, and H_1 is neither strongly notmed, nor uniformly convex. A standard form of the linear functionals over H'_1 space and over metric spaces of H'_p, $0 < p \le 1$, is determined.

Keywords: *Hardy space, Bergmann space, extremal function, linear functional.*