УДК 519.248.6

# ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

**М.В. ЧУВЕЙКО**
(Донской государственный технический университет)

*Рассмотрено применение кватернионной кинематики для построения математической модели роторной системы, осуществляющей пространственное движение.*
***Ключевые слова:*** *динамика роторных систем, кватернионы, параметры Родрига–Гамильтона.*

**Введение.** При построении систем динамической диагностики узлов трения в роторных системах типичной задачей является выяснение взаимосвязи изменяющейся геометрии контактирующих поверхностей с наблюдаемыми координатами. Для этого, прежде всего, необходимо создать математическую модель динамики диагностируемого объекта. Рассмотрим методику построения модели роторной системы.

В большинстве случаев роторные системы представляют собой тела (валы), имеющие две различные точки закрепления в подшипниках. Для математического описания роторной системы, совершающей пространственное движение, необходимо задать две системы дифференциальных уравнений: систему, определяющую динамику движения центра масс, а также динамику сферического движения.

**Уравнение Эйлера в параметрах Родрига–Гамильтона.** Обозначим неподвижную прямоугольную систему координат как $X=\left[\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \vec{x}_3\right]$, где $\vec{x}_i$ – орты соответствующих осей (рис. 1). Кроме того, свяжем с валом подвижную прямоугольную систему координат $Y=\left[\vec{y}_1 \quad \vec{y}_2 \quad \vec{y}_3\right]$, где $\vec{y}_i$ – орты соответствующих осей. Причем, выберем $Y$ так, чтобы начало системы координат совпадало с центром масс вала $\mathbf{c}$, а оси совпадали с главными осями инерции вала в точке $\mathbf{c}$. Тогда, в соответствии с теоремой о движении центра масс [1], первая система уравнений примет вид:

$$m\ddot{c}_i^X = F_i^X, \quad i=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где $c_i^X$ – координаты точки $\mathbf{c}$ (центра масс) в $X$; $F_i^X$ – проекции главного вектора внешних сил $\vec{F}$ на оси в $X$; $m$ – масса вала.

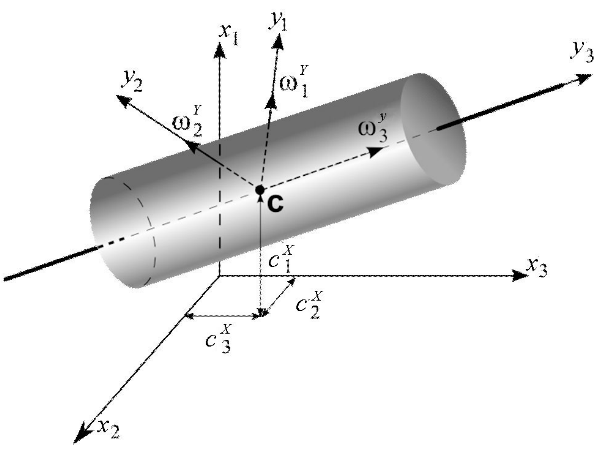



Рис. 1. Обобщенная роторная система

Вторая система дифференциальных уравнений, определяющая сферическое движение твердого тела, как известно, описывается уравнениями Эйлера [1]:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1^Y + \omega_3^Y\omega_2^Y\left(J_3 - J_2\right) = M_1^Y, \\ J_2\dot{\omega}_2^Y + \omega_1^Y\omega_3^Y\left(J_1 - J_3\right) = M_2^Y, \\ J_3\dot{\omega}_3^Y + \omega_2^Y\omega_1^Y\left(J_2 - J_1\right) = M_3^Y, \end{cases} \tag{2}$$

где $M_i^Y, \omega_i^Y$ – проекции соответственно главного вектора внешних моментов $\vec{M}$ и угловой частоты на оси $Y$; $J_i$ – моменты инерции.

Очевидным недостатком уравнений (2) является то, что они представлены в подвижной системе координат. Кроме того, из них явным образом не следуют динамика положения вала, так как $\omega_i^Y$ задает лишь его «скорость изменения». Для устранения последнего недостатка необходимо задать способ представления вала в пространстве, т. е. такую систему переменных, которая бы однозначным образом определяла ориентацию вала, и выразить $\omega_i^Y$ через данную совокупность переменных. Существуют различные способы решения данной проблемы. В качестве таких переменных нами использованы так называемые параметры Родрига–Гамильтона.

В соответствии с теоремой Эйлера–Даламбера, абсолютно твердое тело из произвольного начального положения может быть переведено в любое другое положение (при сферическом движении) посредством лишь одного конечного поворота вокруг некоторой оси $O\xi$ на угол $\varphi$. Это свойство положено в основу кватернионной кинематики сферического движения твердого тела [2]. Исходя из нее любое положение твердого тела (относительно некоторого начального) может быть описано посредством кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{3}\mathbf{i}_i\lambda_i$, где $\lambda_i$ – параметры Родрига–Гамильтона, $\mathbf{i}_i$ – кватернионные единицы. Кватернионные единицы могут быть ассоциированы с ортами $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, т. е. будет иметь место $\vec{x}_i = \mathbf{i}_i$. При этом говорят, что кватернион представлен в базисе $X$. В дальнейшем рассмотрены лишь кватернионы в $X$. В кватернионной кинематике на параметры Родрига–Гамильтона налагают условие нормировки:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{3}$$

Для любого вектора $\vec{V}$, представленного координатами $V_X$ в неподвижном базисе $X$, можно найти его координатное представление в базисе $Y$ по формуле:

$$V_Y = PV_X, \tag{4}$$

где $P$ – матрица направляющих косинусов, определенная как

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3\right) & 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_3\right) \\ 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right) \\ 2\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right) & 2\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Установим связь между проекциями вектора угловой частоты $\vec{\omega}$ на подвижные оси $Y$ и параметрами Родрига–Гамильтона. Для этого используем кинематическое уравнение Пуассона:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \vec{\omega}, \tag{5}$$

где символ «$\circ$» обозначает операцию кватернионного умножения.

Используя матричное представление кватернионов [2], можно получить координатную запись данного выражения:

$$\begin{cases} \omega_1^Y = 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 - \lambda_2\dot{\lambda}_3 + \lambda_3\dot{\lambda}_2\right), \\ \omega_2^Y = 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1\right), \\ \omega_3^Y = 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_1\dot{\lambda}_2 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_3\dot{\lambda}_0\right). \end{cases} \tag{6}$$

Подставив уравнения (6) в уравнения динамики сферического движения (2), получим систему уравнений динамики сферического движения в параметрах Родрига–Гамильтона. Причем условие нормировки (3) необходимо рассматривать в качестве одного из первых интегралов движения. Однако полученная система имеет неудобную форму для проведения численного моделирования. Получим более компактную форму. Из формулы (6), а также из условия нормировки, несложно видеть, что имеет место:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1^Y \\ \omega_2^Y \\ \omega_3^Y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \\ \dot\lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3^Y\omega_2^Y \\ \omega_1^Y\omega_3^Y \\ \omega_2^Y\omega_1^Y \end{bmatrix} = 4\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \\ \dot\lambda_3 \end{bmatrix}\right)\bullet$$
$$\bullet\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \\ \dot\lambda_3 \end{bmatrix}\right), \tag{8}$$

где под символом «$\bullet$» подразумевается операция поэлементного умножения.

Операция поэлементного умножения определяется следующим образом: если $A = \left[a_{ij}\right]$ и $B = \left[b_{ij}\right]$, то матрица, определенная как $C = A \bullet B$, будет состоять из элементов $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Продифференцировав (7), с учетом (3) получим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot\omega_1^Y \\ \dot\omega_2^Y \\ \dot\omega_3^Y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot\lambda_0 \\ \ddot\lambda_1 \\ \ddot\lambda_2 \\ \ddot\lambda_3 \end{bmatrix} - M_0, \tag{9}$$

где $M_0$ – вспомогательное обозначение, определяемое следующим образом:

$$M_0 = \left[-2\left(\dot\lambda_0^2 + \dot\lambda_1^2 + \dot\lambda_2^2 + \dot\lambda_3^2\right) \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix},\ G = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 - J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 - J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 - J_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда, с учетом вышесказанного, уравнение Эйлера (2) в параметрах Родрига–Гамильтона будет иметь вид:

$$J\Lambda\ddot{\lambda} + G\left[\left(T\Lambda\dot{\lambda}\right)\bullet\left(T^T\Lambda\dot{\lambda}\right)\right] = \hat{M}^0 + KM^Y, \qquad (10)$$

или в неподвижной системе координат $X$:

$$\ddot{\lambda} = \Lambda^T J^{-1}\left(KPM^X + M^0 - G\left[\left(T\Lambda\dot{\lambda}\right)\bullet\left(T^T\Lambda\dot{\lambda}\right)\right]\right). \qquad (11)$$

**Уравнения движения обобщенной роторной системы.** Обозначим точки закрепления вала в подшипниках как $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3}\vec{x}_i a_i$ и $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3}\vec{x}_i b_i$ (рис. 2). Кроме того, будем полагать, что $a_3$ и $b_3$ остаются неизменными независимо от вращения основного вала. Обозначим вектор силы, порождаемый динамической связью (силовой функцией), в точках $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно $\vec{F}^a$ и $\vec{F}^b$, а суммарный момент трения – $\vec{M}^{ab}$. Принимая $l$ за длину вала и используя матрицу $P$, несложно получить значения координат $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + \dfrac{l\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\ a_2 = c_2 + \dfrac{l\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\ a_3 = c_3 + l/2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b_1 = c_1 - \dfrac{l\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\ b_2 = c_2 - \dfrac{l\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\ b_3 = c_3 - l/2. \end{cases} \qquad (12)$$

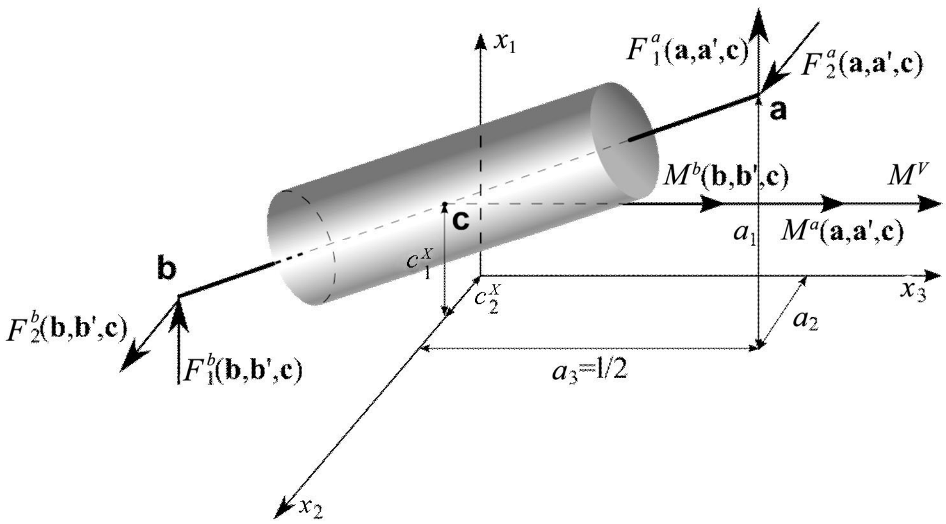



Рис. 2. Обобщенная роторная система

Будем считать, что на основной вал действует суммарный, внешний по отношению к роторной системе, момент $\vec{M}^V$ и сила $\vec{F}^V$. Тогда, учитывая, что суммарный момент, действующий на основной вал, можно определить по формуле:

$$\vec{M} = \vec{M}^V + \vec{M}^{ab} + \mathbf{a}\times\vec{F}^a + \mathbf{b}\times\vec{F}^b, \qquad (13)$$

и используя (12), получаем:

$$M^X = L\left(F^b - F^a\right) + M^V + M^{ab} \ , \tag{14}$$

где $M^V$, $M^{ab}$, $F^b$, $F^a$ – вектор-столбцы с координатами соответствующих векторов в $X$; $L$ – матрица длин, определяемая как

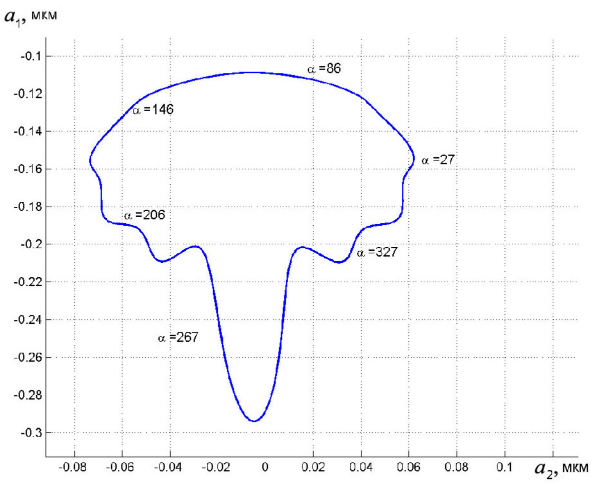
$$L = \begin{bmatrix} 0 & l & -\dfrac{2l(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \\ -l & 0 & \dfrac{2l(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \\ -\dfrac{2l(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & -\dfrac{2l(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Исходя из вышесказанного получим систему уравнений, определяющих динамику роторной системы:

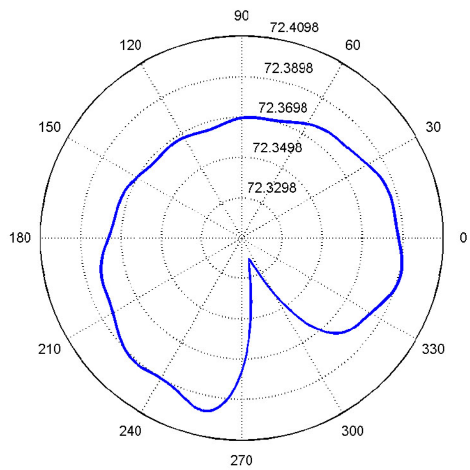
$$\begin{cases} \ddot{\lambda} = \Lambda^T J^{-1}\left(KP\left[L\left(F^b - F^a\right) + M^{ab} + M^V\right] + M^0 - G\left[\left(T\Lambda\dot{\lambda}\right)\bullet\left(T^T\Lambda\dot{\lambda}\right)\right]\right), \\ \ddot{c} = \dfrac{1}{m}\left(F^b + F^a + F^V\right). \end{cases} \tag{15}$$

Для окончательного построения модели роторной системы, как видно из (15), необходимо задать $F^b$, $F^a$, $M^{ab}$, $M^V$, $F^V$. И если последние два параметра являются произвольными функциями, определяющими некоторое внешнее воздействие на систему, то первые три параметра определяются динамической связью, входящей в состав роторной системы. Очевидно, что они являются функциями состояния роторной системы $\lambda_i$ и $c_i$. Задание этих функций определит окончательный вид математической модели роторной системы. В частности, $F^b$, $F^a$, $M^{ab}$ можно определить, основываясь на рассмотрении подшипниковых креплений ротора как трибосистем, по аналогии с тем, как это сделано в исследовании [3].

Приведем в качестве примера результат моделирования (рис. 3). При этом рассматривалось, что ротор закреплен в низкоскоростных подшипниках скольжения, а в качестве внешнего источника момента был использован двигатель постоянного тока. Качественный вид сечений ротора и статора в контактах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ приведен на рис. 4 (в контакте $\mathbf{a}$ наблюдается импульсный дефект ротора и статора).




а)




б)

Рис. 3. Результаты моделирования: *а* – движение ротора в плоскости $a_1a_2$ в контакте $\mathbf{a}$;

б – зависимость частоты вращения ротора от его угла поворота

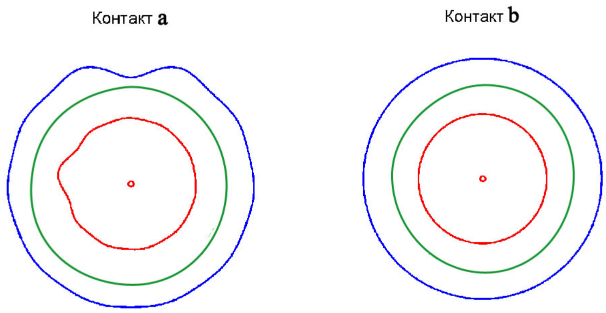



Рис. 4. Качественный вид ротора и статора в подшипниковых узлах

Из рис. 3 видно, что наличие импульсного дефекта оказывает существенное влияние не только на движение ротора в плоскости контакта $\mathbf{a}$, но и на угловую частоту вращения ротора. Кроме того, виден периодический характер влияния дефекта в зависимости от угла поворота вала $\alpha$.

**Выводы.** Предложенная формула Эйлера в параметрах Родрига–Гамильтона, позволяет осуществлять математическое моделирование пространственного движения твердых тел. При этом рассмотрение осуществляется в неподвижном базисе, что облегчает использование данной формулы. Кроме того, с точки зрения численного моделирования, ее несомненным преимуществом является отсутствие тригонометрических функций.

На основе формулы Эйлера в параметрах Родрига–Гамильтона построена модель роторной системы, позволяющая анализировать ее динамические свойства. Подобная модель может быть использована для решения различных задач, в частности задач технической диагностики.

**Библиографический список**

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: учеб. для техн. вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 8-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – 768 с.

2. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения / Ю.Н. Челноков. – М.: Физматлит, 2006. – 512 с.

3. Чувейко М.В. Применение стробоскопического отображения Пуанкаре для диагностирования дефектов узлов сопряжения роторной системы / М.В. Чувейко // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т.11, №1(52). – С. 37-42.

Материал поступил в редакцию 05.12.2011.

**References**

1. Yablonskij A.A. Kurs teoreticheskoj mexaniki: ucheb. dlya texn. vuzov / A.A. Yablonskij, V.M. Nikiforova. – 8-e izd., ster. – SPb.: Izd-vo «Lan`», 2001. – 768 s. – In Russian.

2. Chelnokov Yu.N. Kvaternionny`e i bikvaternionny`e modeli i metody` mexaniki tvyordogo tela i ix prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya / Yu.N. Chelnokov. – M.: Fizmatlit, 2006. – 512 s. – In Russian.

3. Chuvejko M.V. Primenenie stroboskopicheskogo otobrazheniya Puankare dlya diagnostirovaniya defektov uzlov sopryazheniya rotornoj sistemy` / M.V. Chuvejko // Vestn. Donsk. gos. texn. un-ta. – 2011. – T. 11, #1 (52). – S. 37–42. – In Russian.

## DYNAMICS OF ROTOR SYSTEM SPATIAL MOTION IN DYNAMIC DIAGNOSTICS

**M.V. CHUVEYKO**
(Don State Technical University)

*The application of the quaternion kinematics for building a mathematical model of the rotor system engaged in three-dimensional motion is considered.*

***Keywords:*** *dynamics of rotor systems, quaternions, Rodrigues — Hamilton parameters.*