

УДК 519.63(075.8)

Математическое моделирование переходного процесса в выходной цепи управляемого электрохимического сопротивления

Ю. Я. Герасименко, Т. П. Скакунова, Е. Ю. Герасименко

(Донской государственный технический университет)

Рассматривается и решается задача получения аналитической зависимости выходной величины управляемого электрохимического сопротивления (УЭХС) от тока управления, а также выполнено математическое моделирование переходного процесса в выходной цепи УЭХС, содержащей линейную индуктивность или линейную электрическую ёмкость.

Ключевые слова: плотность электрического тока, электрохимическое осаждение металла, электрическое сопротивление, проводимость, переходной процесс, индуктивность, дифференциальное уравнение.

Введение. УЭХС представляет собой цилиндрический проводник длиной ℓ прямоугольного сечения (подложка) $a \times r$, изготовленный из стеклографита. Если на боковую поверхность УЭХС наносить электрохимическим способом тонкий слой металла, то сечение слоёного проводника будет увеличиваться, а его сопротивление уменьшаться. Ставится задача получить зависимость выходной величины УЭХС от тока (плотности тока) в цепи управления (рис. 1).

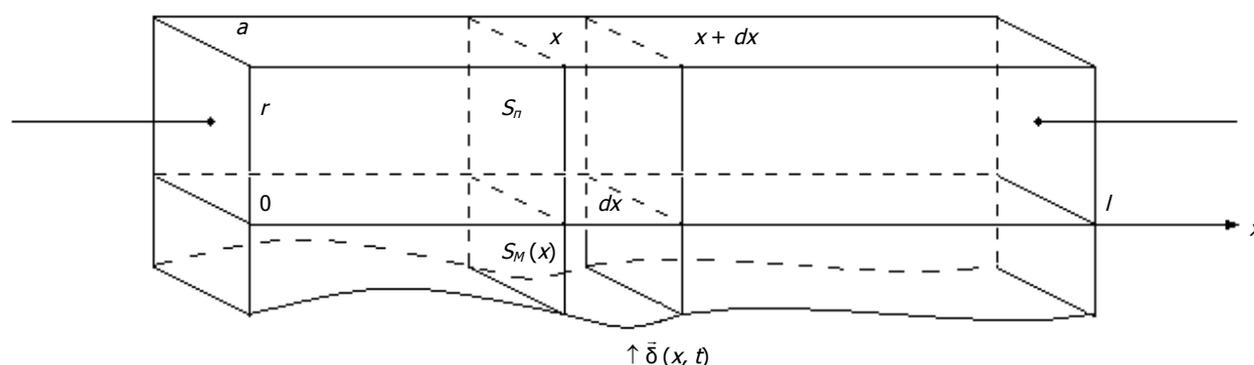


Рис. 1. Схематическое устройство УЭХС

Вывод зависимости $R(t)$ от тока управления. Пусть ρ_n и ρ_m — удельные электрические сопротивления материалов подложки и наносимого осадка металла, S_n и $S_M(x)$ — поперечные сечения подложки и осадённого металла, dR_n — элемент электрохимического сопротивления подложки длиной dx , dR_m — элемент электрического сопротивления осадённого металла длиной dx . Тогда

$$dR_n = \frac{\rho_n dx}{S_n}, \quad (1)$$

$$dR_m = \frac{\rho_m dx}{S_M(x)}. \quad (2)$$

Параллельное включение этих элементов приводит к такому эквиваленту

$$dR = \frac{dR_n \cdot dR_m}{dR_n + dR_m}. \quad (3)$$

Подставим (1) и (2) в (3)

$$dR = \frac{\frac{\rho_n dx}{S_n} \cdot \frac{\rho_M dx}{S_M(x)}}{\frac{\rho_n dx}{S_n} + \frac{\rho_M dx}{S_M(x)}} = \frac{\frac{\rho_n}{S_n} \cdot \frac{\rho_M}{S_M(x)}}{\frac{\rho_n}{S_n} + \frac{\rho_M}{S_M(x)}} dx = \frac{\rho_n \rho_M}{\rho_n S_M(x) + \rho_M S_n} dx. \quad (4)$$

Как видно из полученной формулы, дальнейшее исследование сводится к получению зависимости $S_M(x)$.

Пусть $\delta(x;t)$ — известное пространственно-временное распределение плотности электрического тока на управляющем электроде. Тогда $\delta(x;t) \cdot a \cdot dx$ — ток управления в момент t через площадку $a \cdot dx$. $\int_0^t \delta(x;t) a \cdot dx \cdot dt$ — заряд, прошедший через площадку $a \cdot dx$ за отрезок времени $[0;t]$.

Если k — электрохимический эквивалент осаждаемого металла, то [1] $dm = k \int_0^t \delta(x;t) a \cdot dx \cdot dt$ — масса осаждённого металла на площадке $a \cdot dx$, за отрезок времени $[0;t]$.

Если γ_M — объёмная плотность осаждённого металла, то $dV_M = \frac{dm}{\gamma_M} = \frac{k \int_0^t \delta(x;t) a \cdot dx \cdot dt}{\gamma_M}$ — объём осаждённого металла на площадке $a \cdot dx$ за отрезок времени $[0;t]$.

Считая форму осаждённого металла на поверхности бесконечно малой площади $a \cdot dx$ в виде параллелепипеда, можно найти площадь поперечного сечения $S_M(x)$ в точке x :

$$S_M(x) = \frac{dV_M}{dx}, \text{ или } S_M(x) = \frac{ka \int_0^t \delta(x;t) dt}{\gamma_M}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4)

$$dR = \frac{\rho_n \rho_M}{\frac{\rho_n}{\gamma_M} \int_0^t \delta(x;t) dt + \rho_M \cdot S_n} dx. \quad (6)$$

Выходная величина УЭХС легко может быть рассчитана с помощью интегрирования выражения (6) по x :

$$R(t) = \int_0^{\ell} \frac{\rho_n \rho_M}{\frac{\rho_n}{\gamma_M} \int_0^t \delta(x;t) dt + \rho_M \cdot S_n} dx. \quad (7)$$

Полученная формула (7) может быть использована при произвольном распределении плотности тока $\delta(x;t)$ в цепи управляющего электрода, в том числе и при равномерном, когда

$$\delta(x;t) = \frac{I_y(t)}{\ell \cdot a}, \quad (8)$$

где $I_y(t)$ — ток управления.

Подставляя (8) в (7) получаем

$$R(t) = \frac{\rho_n \rho_M \ell}{\rho_n \frac{k \int_0^t I_y(t) dt}{\gamma_M \cdot \ell} + \rho_M S_n} \quad (9)$$

При постоянном токе управления $I_y(t) = I_0 = \text{const}$ формула (9) ещё более упрощается:

$$R(t) = \frac{\rho_n \rho_M \ell}{\rho_n \frac{k I_0 t}{\gamma_M \ell} + \rho_M S_n} \quad (10)$$

Зависимость $R(t)$ в соответствии с формулой (10) принимает гиперболический характер (рис. 2).

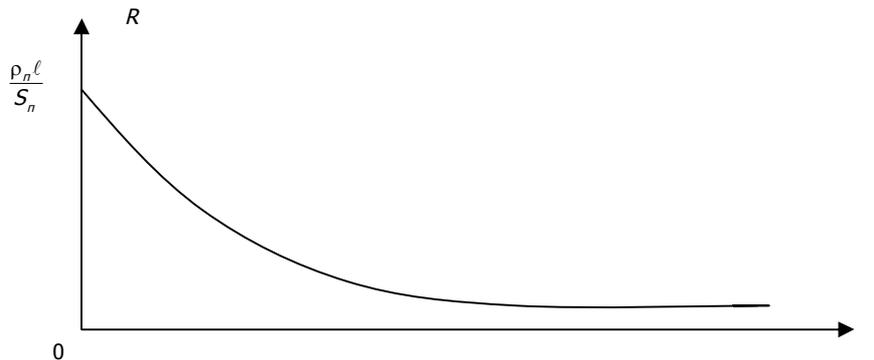


Рис. 2. Зависимость $R(t)$ от времени при $I_y(t) = I_0 = \text{const}$

Далее при расчётах переходных процессов в схемах, содержащих УЭХС, будем считать, что распределение плотности тока в цепи управляющего электрода является равномерным, т. е. будет использоваться формула (9).

Математическое моделирование переходных процессов. Второй закон Кирхгофа для приведённой на рис. 3 схемы имеет вид

$$i(t)R(t) + i(t)R_0 + L_0 \frac{di(t)}{dt} = E_0 \quad (11)$$

Разрешая уравнение (11) относительно производной, получаем

$$\frac{di}{dt} = \frac{E_0 - i(t)(R(t) + R_0)}{L_0} \quad (12)$$

По первому закону коммутации для данной цепи [2] $i(0-0) = i(0+0) = 0$, т. е.

$$i(0) = 0 \quad (13)$$

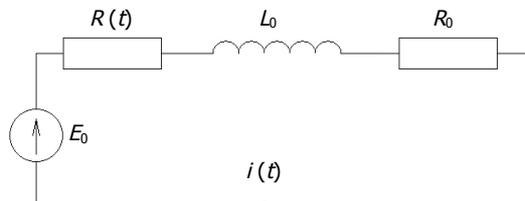


Рис. 3. Включение $R(t)$ с активно-индуктивной нагрузкой

Задача коши (12), (13) легко может быть решена численно одним из известных методов, например, методом Эйлера.

Введём в рассмотрение функцию

$$f(R(t); i(t)) \equiv \frac{E_0 - i(t)(R(t) + R_0)}{L_0}. \quad (14)$$

Пусть t_{\max} — время переходного процесса, n — количество дискретных временных точек переходного процесса. Тогда временной шаг определяется соотношением

$$h = \frac{t_{\max}}{n}. \quad (15)$$

Итерационная формула Эйлера для массива тока $\{i_j; j = \overline{0, n}\}$ имеет вид

$$i_{j+1} = i_j + hf(R_j; i_j), \quad (16)$$

где $R_j = R(t_j), i_j = i(t_j)$.

Алгоритм расчёта переходного процесса в схеме, изображённой на рис. 3, можно представить следующей блок-схемой (рис. 4).

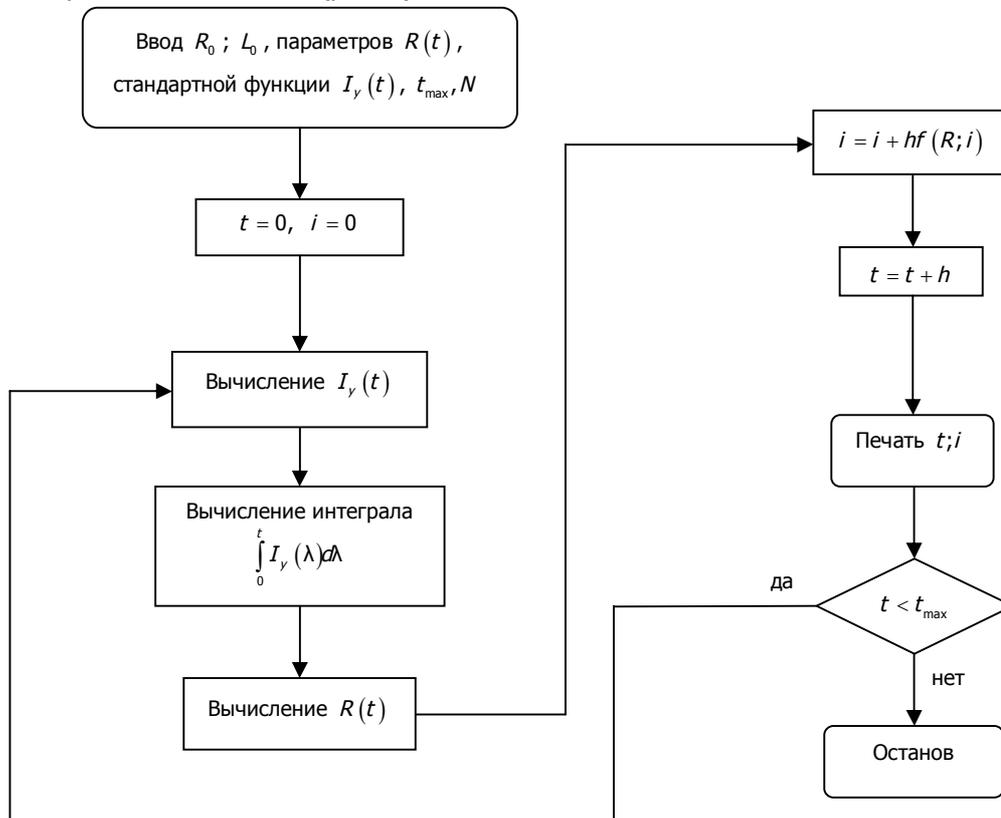


Рис. 4. Алгоритм расчёта переходного процесса в цепи $R(t) - R_0 - L_0$

При исходных данных $E_0 = 2B; \rho_n = 8 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}; S_n = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; \rho_m = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}; \kappa = 0,6588 \cdot 10^{-6} \text{ кг} / \text{Кл}; \ell = 0,10 \text{ м}; I_0 = 0,1 \text{ А}; \gamma_m = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3; R_0 = 50 \text{ Ом}; L_0 = 0,1 \text{ Гн}$ была рассчитана зависимость $i(t)$, представленная на рис. 5.

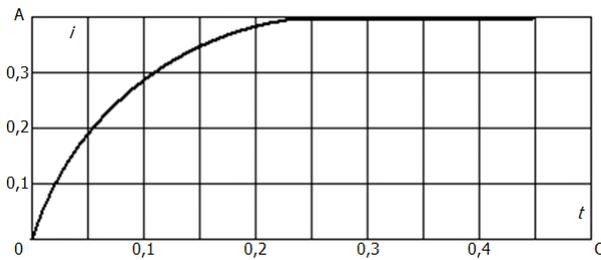


Рис. 5. Зависимость $i(t)$ для схемы включения $R(t) - R_0 - C_0$

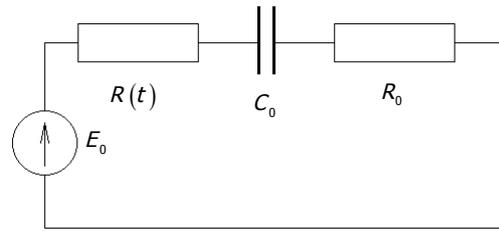


Рис. 6. Включение $R(t)$ с активно-ёмкостной нагрузкой

Второй закон Кирхгофа для приведённой на рис. 6 схемы имеет вид

$$i(t)R(t) + i(t)R_0 + \frac{1}{C_0} \int_0^t i(t) dt = E_0. \quad (17)$$

Для получения дифференциального уравнения относительно $i(t)$ продифференцируем (17) по t .

$$\frac{di}{dt} R(t) + i(t) \frac{dR(t)}{dt} + R_0 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_0} i(t),$$

откуда

$$\frac{di}{dt} = -i(t) \frac{\frac{1}{C_0} + \frac{dR(t)}{dt}}{R(t) + R_0}, \quad (18)$$

где $\frac{dR(t)}{dt}$ определяется при дифференцировании (9).

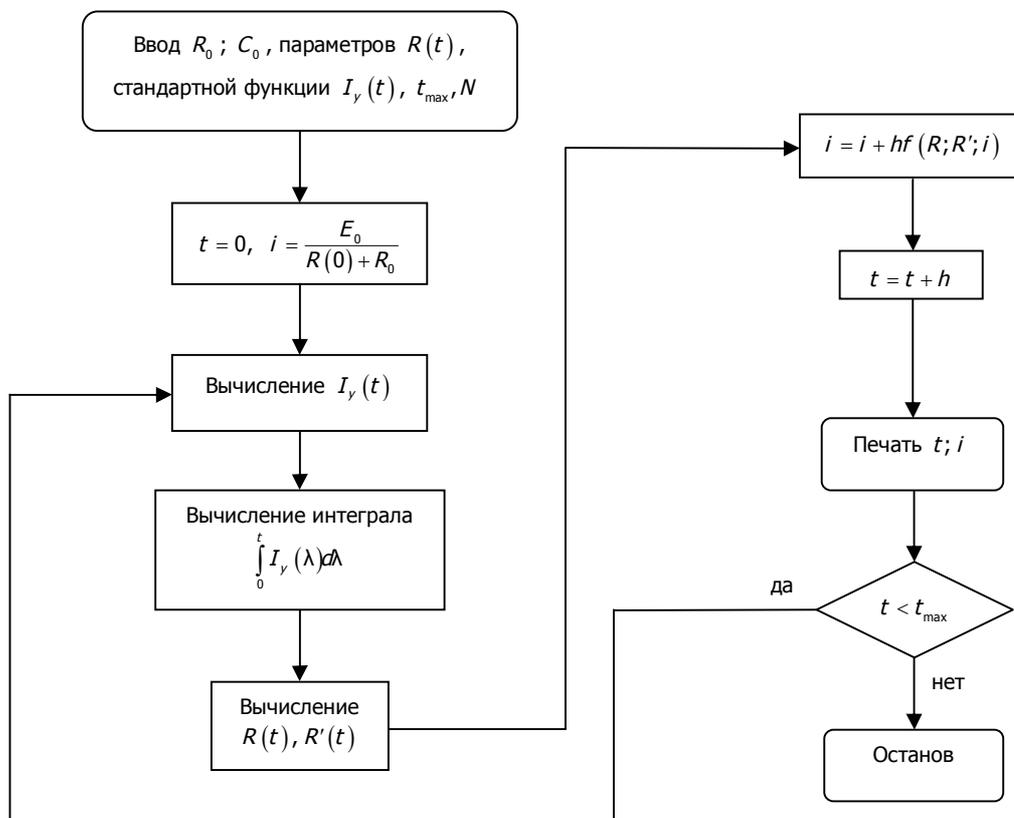


Рис. 7. Алгоритм расчёта переходного процесса в цепи $R(t) - R_0 - C_0$

$$\frac{dR}{dt} = - \frac{\frac{\rho_n^2 \rho_m k}{\gamma_m} I_y(t)}{\left(\frac{\rho_n k}{\gamma_m I} \int_0^t I_y(t) dt + \rho_m S_n \right)^2}. \quad (19)$$

По второму закону для схемы на рис. 6 можно записать

$$U_{c_0}(0-0) = U_{c_0}(0+0) = 0,$$

откуда получаем при $t = (0+0)$

$$i(0)R(0) + i(0)R_0 = E_0,$$

т. е.

$$i(0) = \frac{E_0}{R(0) + R_0}. \quad (20)$$

Таким образом, расчёт переходного процесса для $i(t)$ в схеме на рис. 6 сводится к решению задачи Коши (18), (20).

Введём в рассмотрение функцию

$$f\left(R(t); \frac{dR}{dt}; i(t)\right) = -i(t) \frac{\frac{1}{C_0} + \frac{dR(t)}{dt}}{R(t) + R_0}. \quad (21)$$

Итерационная формула Эйлера для массива тока $\{i_j; j = \overline{0, n}\}$ имеет вид

$$i_{j+1} = i_j + hf(R_j; R'_j; i_j),$$

где

$$R_j = R(t_j), i_j = i(t_j), R'_j = \frac{dR(t_j)}{dt}.$$

Алгоритм расчёта переходного процесса в схеме, изображённой на рис. 6, можно представить следующей блок-схемой (рис. 7).

При $E_0 = 2B; R_0 = 50M; C_0 = 0,005\phi$ была рассчитана зависимость тока $i(t)$ (рис. 8) в схеме, представленной на рис. 6.

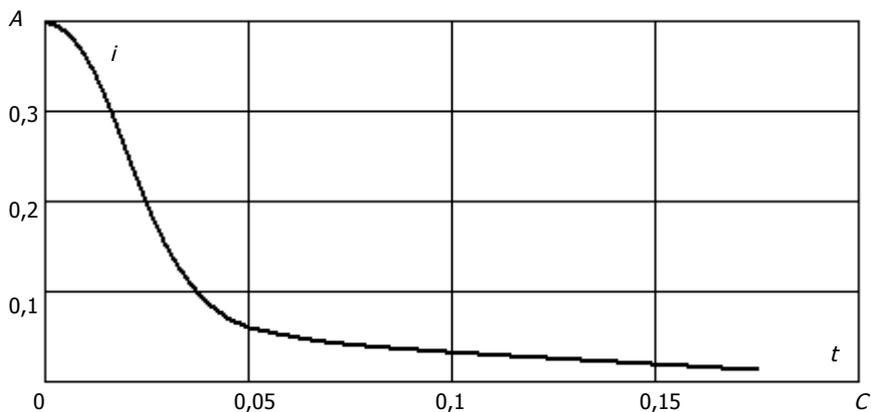


Рис. 8. Зависимость тока $i(t)$ для схемы включения $R(t) - R_0 - C_0$

Заключение. Полученная математическая модель УЭХС успешно может быть использована для расчёта переходных процессов в линейных и нелинейных схемах, содержащих этот элемент. В большинстве случаев, даже для линейных схем, эта задача решается только численно.

Библиографический список

1. Дамаскин, Б. Б. Электрохимия / Б. Б. Дамаскин, О. А. Петрий. — Москва: Высшая школа, 1987. — 296 с.
2. Нейман, Л. Р. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. — Ленинград: Энергоиздат, 1981. — 535 с.

Материал поступил в редакцию 13.01.2012.

References

1. Damaskin, B. B. E`lektrokhimiya / B. B. Damaskin, O. A. Petrij. — Moskva: Vy`sshaya shkola, 1987. — 296 s. — In Russian.
2. Nejman, L. R. Teoreticheskie osnovy` e`lektrotexniki. T. 1 / L. R. Nejman, K. S. Demirchyan. — Leningrad: E`nergoizdat, 1981. — 535 s. — In Russian.

MATHEMATICAL SIMULATION OF TRANSITION IN OUTPUT CIRCUIT OF CONTROLLABLE ELECTROCHEMICAL RESISTANCE

Y. Y. Gerasimenko, T. P. Skakunova, E. Y. Gerasimenko
(Don State Technical University)

The problem of getting the analytical dependence of the output value of the controllable electrochemical resistance (CER) on the control current is considered and solved. The mathematical simulation of the transient process in the CER output circuit involving linear inductance or linear permittance is carried out, too.

Keywords: *electric current density, electrochemical metal deposition, electrical resistance, conductivity, transient process, inductance, differential equation.*