

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 532.593

Длинные волны в прямоугольном стенде, вызванные пластиной

В. В. Трепачёв

(Донской государственный технический университет)

Проведено исследование формы поверхности тяжёлой жидкости в прямоугольном волновом стенде, покрытой длинными волнами над ровным дном. Волны вызваны горизонтальными гармоническими колебаниями волнопродуктора щитового типа. Получено точное решение краевой задачи с учётом диссипации энергии в жидкости. Результаты применимы для расчёта и лабораторного моделирования поверхностных и акустических волн.

Ключевые слова: тяжёлая несжимаемая жидкость, волнопродуктор, гармонические волны, длинные поверхностные волны, волновой стенд, диссипация энергии.

Введение. При рассмотрении теории длинных волн на поверхности тяжёлой жидкости можно в первом приближении пренебречь вертикальным ускорением частиц жидкости, это приводит к тому, что давление в жидкости практически равно статическому давлению, а скорость движения её частиц является функцией, которая не зависит от вертикальной координаты [1], [2]. Постановка задачи о волнах гармонического вида на мелкой воде в прямоугольном бассейне здесь сводится к рассмотрению краевой задачи в прямоугольнике для уравнения Гельмгольца [3], используемого в акустике. Траектории колебательного движения частиц жидкости представляют собой фактически отрезки прямых линий, параллельных дну бассейна. Наличие дна в таких условиях движения частиц вызывает дополнительное рассеяние энергии, учитываемое нами в рамках теории Рэлея [1]—[5]. Данная работа дополняет результаты [1]—[5] и других исследований, т. к. в ней учитываются не только эффекты конечности всех размеров волнового стенда, но также эффекты диссипации энергии волн, наблюдаемые в ряде натурных экспериментов для волновых полей в океане [2].

Постановка задачи. Рассмотрим гармонические волновые колебания несжимаемой, тяжёлой жидкости под ровным дном в прямоугольном бассейне, имеющем длину l , ширину $2b$ и глубину h . Опустим множитель $e^{i\omega t}$, где ω — частота, t — время, i — мнимая единица. Постановка краевой задачи в линейном приближении теории длинных волн имеет вид

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 + k^2 \phi = 0; \quad k = \sqrt{(\omega^2 - i\mu\omega) / gh}; \quad \mu > 0; \quad (1)$$

$$\partial \phi / \partial z = 0, \quad z = \pm b, \quad 0 \leq x \leq l; \quad \operatorname{Re} k > 0; \quad \operatorname{Im} k < 0; \quad (2)$$

$$\partial \phi / \partial x = 0, \quad |z| \leq b, \quad x = l; \quad l > 0, \quad b > 0; \quad (3)$$

$$\partial \phi / \partial x = u(z), \quad |z| \leq b, \quad x = 0; \quad c = \sqrt{gh}, \quad (4)$$

где $\phi(x, z)$ — потенциал скорости, k — волновое число, μ — коэффициент трения о дно, g — ускорение свободного падения, c — скорость длинных волн, x — продольная координата, z — поперечная координата, $u(z)$ — амплитуда колебаний пластины волнопродуктора на плоскости передней стенки $x = 0$.

Построение решения. Решение краевой задачи (1)–(4) отыскиваем в виде функционального ряда с неизвестными коэффициентами A_m , но который удовлетворяет краевым условиям (2), (3) и имеет вид

$$\phi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (e^{-2\chi_m l} \cdot e^{i\chi_m x} + e^{-i\chi_m x}) \cos[\gamma_m(z - b)], \quad (5)$$

где $\gamma_m = m\pi/2b$, а волновые числа χ_m продольных волн в (5) равны

$$\chi_m = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} = \sqrt{(\omega^2/c^2 - m^2\pi^2/(2b)^2) - i\mu\omega/c^2}, \quad c = \sqrt{gh}. \quad (6)$$

Подкоренное выражение в (6) имеет разрез на отрицательной части действительной оси.

Решение в виде (5) удовлетворяет также и волновому уравнению (1). Коэффициенты A_m находятся из краевого условия (4), которые представим соотношением

$$u(z) = i \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m A_m (e^{-2\chi_m l} - 1) \cos[\gamma_m(z - b)], \quad \gamma_m = m\pi/2b. \quad (7)$$

Система тригонометрических функций $\cos[\gamma_m(z - b)]$ попарно ортогональна на отрезке $|z| \leq b$, поэтому коэффициенты A_m в случае $m \geq 1$ равны выражениям

$$A_m = (i/(1 - e^{-2\chi_m l}) \chi_m b) \int_{-b}^b u(z) \cos \gamma_m(z - b) dz, \quad \text{Re}(\chi_m) > 0, \quad \text{Im}(\chi_m) < 0. \quad (8)$$

Подставим (8) в (5), получим точное решение краевой задачи о длинных волнах в прямоугольном бассейне (1)–(4).

Форма свободной поверхности $\eta(x, z)$ выражается через потенциал скорости

$$\eta(x, z) = ((-i\omega + \mu)/g) \phi(x, z). \quad (9)$$

Коэффициенты A_m имеют смысл амплитудных множителей поверхностных волн. Коэффициент A_0 описывает амплитудный множитель «поршневой» волны. «Поршневая» волна имеет постоянное значение амплитуды вдоль направления оси z

$$A_0 = (i/(1 - e^{-2ikl}) 2kb) \int_{-b}^b u(z) dz. \quad (10)$$

Если $u(-z) = -u(z)$, т. е. в случае нечётной по z амплитуды колебаний вибратора, то всегда амплитуда колебаний «поршневой» волны (10) имеет значение ноль. Можно подобрать вид чётной функции для амплитуды колебаний $u(z)$, при которой амплитуда колебаний «поршневой» волны равна нулю. Амплитуда колебаний «поршневой» волны отлична от нуля, если мгновенный расход жидкости q , вытесняемый вибратором в горизонтальном направлении, отличен от нуля

$$q = h \int_{-b}^b u(z) dz \neq 0. \quad (11)$$

«Поршневая» волна распространяется по кратчайшему пути, соединяющему плоскость вибратора $x = 0$ и плоскость задней стенки бассейна $x = l$. Согласно (5) и ограничениям (8), построенное решение допускает предельный переход к бесконечной длине стенда l . В случае бесконечной длины стенда l в решении (5) присутствуют только волны, бегущие в одном направлении.

Бегущие волны в направлении от волнопродуктора к задней стенке стенда называют падающими. Падающая волна определяется вторым слагаемым в круглой скобке формулы (5). В случае конечной длины волнового стенда l возникает отражённая волна от задней стенки бассейна, занимающей положение $x = l$. Амплитудный коэффициент отражённой волны описывает-

ся первым слагаемым в круглой скобке формулы (5). Он содержит параметр l . Предельный переход к бесконечной длине стенда $l \rightarrow \infty$ возможен при коэффициенте трения о дно $\mu > 0$.

Анализ волнового поля в стенде. Процесс возбуждения бегущих волн в волновом стенде возможен благодаря диссипации энергии. Рэлей предложил способ избавиться от паразитных свободных волн введением диссипативных сил, которые пропорциональны скоростям частиц жидкости [1]. В ряде работ, выполненных Вапняр Д. У., Михайловым Э. Н., Шапиро Н. Б., горизонтальный обмен количеством движения учитывается путём введения диссипативной массовой силы, которая пропорциональна горизонтальной скорости течения. Коэффициент трения μ позволяет [2] рассчитывать горизонтальный турбулентный обмен течений и внутренних волн в экваториальной зоне океана.

В монографии [2] приведены натурные оценки коэффициента трения μ в пределах от 10^{-7} сек^{-1} до 10^{-5} сек^{-1} . Известно, что в мелководных районах моря отмечена связь коэффициента трения и угловой частоты колебаний. В лабораторных испытаниях волнопродукторов поверхностных и внутренних волн, проводимых с участием автора данной статьи, отмечена высокая эффективность применения такой модели с использованием частотной зависимости коэффициента трения от масштаба волн. Отражённая волна имеет больший пробег, чем падающая волна, поэтому в волновом стенде достаточно большой длины создаются условия её подавления.

Пусть скорость движения пластины вибратора $u(z)$ чётная функция следующего вида

$$u(z) = u_0 \cos \gamma_1 z, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2b}, \quad (12)$$

где $u(\pm b) = 0$.

Используя (8), (10), находим коэффициенты разложения потенциала скорости (5):

$$A_0 = \frac{u_0 e^{ikl}}{\pi \sin(kl)k}, \quad A_{2m-1} = 0, \quad m \geq 1, \quad A_{2m} = -\frac{u_0^{ix_{2m}l}}{\sin(x_{2m}l) x_{2m} b} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_{2m}^2 - \gamma_1^2}. \quad (13)$$

В отсутствие диссипации, т. е. в случае $\mu = 0$

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} = \frac{\omega}{c}, \quad x_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{(2b)^2}}, \quad \mu = 0, \quad (14)$$

где k — действительное положительное число, называемое волновым числом «поршневой волны». «Поршневая волна» распространяется вдоль направления оси x . Появление волн, распространяющихся под острым углом к оси z , описывает условие излучения таких волн

$$k = \frac{\omega}{c} > \frac{m\pi}{2b}, \quad \mu = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (15)$$

где M — число волн, полученных под углом к оси x . Угол излучения α_m равен

$$\alpha_m = \arcsin \frac{m\pi}{2bk}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \mu = 0. \quad (16)$$

Чем больше ширина стенда $2b$, тем большее количество волн M сможет излучаться под углом к оси x . Чем больше значение номера волны m , тем больше её угол наклона α_m в (16). В случае $k = \pi/2b$ угол наклона становится наибольшим и принимает значение, равное $\pi/2$. Упругие волны, распространяющиеся в плоском слое, изучались в [3] применительно к проблеме использования слоя в качестве волновода акустических волн.

При отсутствии диссипации энергии $\mu = 0$ возможны резонансные явления, связанные с конечностью длины стенда l . Тригонометрическая функция, находящаяся в знаменателе коэффициента разложения потенциала скорости (13), обращается в ноль при выполнении условий

$$k_i = \frac{\omega_i}{c} = i\pi / l, \quad i = 1, 2, \dots, \mu = 0; \quad (17)$$

$$\sqrt{\frac{\omega_j^2}{c^2} - \frac{m^2\pi^2}{2b}} = j\pi / l, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, M, \mu = 0. \quad (18)$$

При частотах колебаний, определённых в (17) и (18), возникают резонансы с бесконечной амплитудой колебаний. В постановке задачи присутствует диссипация энергии $\mu \neq 0$, которая не допускает возникновения резонансов с бесконечной амплитудой колебаний для распространяющихся волн, что дополняет известные результаты из теории плоских волн в волновом стенде [1].

Рассмотрим условие, которое противоположно по смыслу условию (15)

$$k < \frac{\pi}{2b} \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{c} < \frac{\pi}{2b}. \quad (19)$$

При выполнении (19) волны, распространяющиеся под углом к оси x , не излучаются. Соответственно резонансы типа (18) невозможны. При выполнении (19) колебания формы поверхности жидкости состоят из одной «поршневой волны» и счётного набора нераспространяющихся волн [3]–[5]. На рисунке 1 изображена поршневая мода колебаний на оси волнового канала с учётом диссипации энергии.

Под нераспространяющейся волной понимается волна, которая и в отсутствии диссипации энергии имеет амплитуду, убывающую по экспоненциальному закону. Нераспространяющиеся волны локализуются в некоторой окрестности волнопродуктора. При этом они быстро затухают в направлении движения от волнопродуктора.

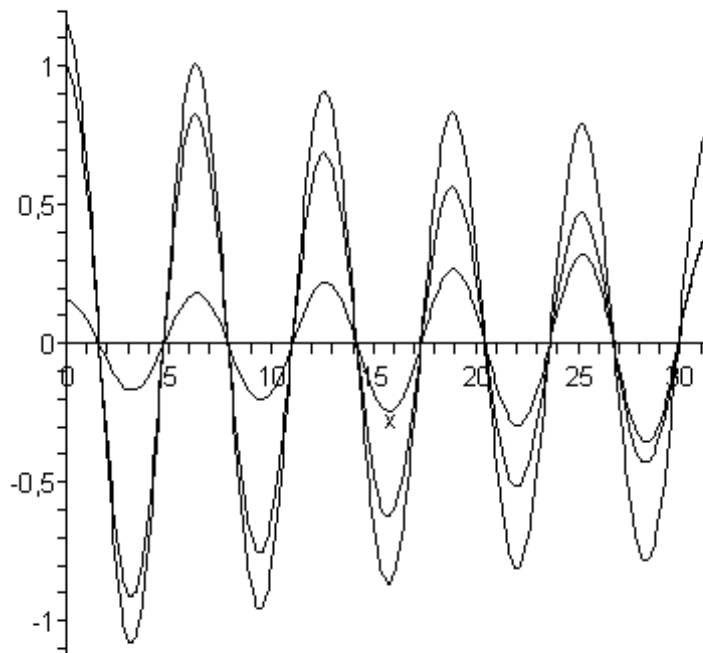


Рис. 1. Структура волнового поршневого поля на оси прямоугольного волнового стенда

Нераспространяющиеся волны могут также локализоваться и в окрестности отражающей стенки, что видно из формулы (5).

Заключение.

1. В работе показана возможность моделирования явления горизонтального турбулентного обмена для поля из падающих и отражённых поверхностных, длинных волн в прямоугольном стенде с произвольным соотношением сторон.

2. Показано, что волновое поле, состоящее практически только из бегущих волн, возникает в волновом стенде конечной длины благодаря влиянию диссипации энергии.

3. Получены новые условия отсутствия возбуждения поршневых, длинных волн горизонтальными гармоническими колебаниями щитового волнопродуктора.

Библиографический список

1. Сретенский, Л. Н. Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. — Москва: Наука, 1977. — 816 с.
2. Вапняр, Д. У. Планетарные волны и течения в экваториальной зоне океана / Д. У. Вапняр. — Киев: Наукова думка, 1976. — 222 с.
3. Лепендина, Л. Ф. Акустика / Л. Ф. Лепендина. — Москва: Высшая школа, 1978. — 448 с.
4. Трепачёв, В. В. Дифракция гармонической волны на вертикальном щите в канале / В. В. Трепачёв // Колебания и волны в жидкости и газе. — Горький: Изд-во ГПИ, 1990. — С. 89—95.
5. Трепачёв, В. В. Дифракция волн на пластине в узком канале / В. В. Трепачёв // Изв. вузов Сев.-Кавказ. региона. Естеств. науки. — 2002. — № 2. — С. 63—65.

Материал поступил в редакцию 25.05.2012.

References

1. Sretenskij, L. N. Teoriya volnovy`x dvizhenij zhidkosti / L. N. Sretenskij. — Moskva: Nauka, 1977. — 816 s. — In Russian.
2. Vapnyar, D. U. Planetarny`e volny` i techeniya v e`kvatorial`noj zone okeana / D. U. Vapnyar. — Kiev: Naukova dumka, 1976. — 222 s. — In Russian.
3. Lependina, L. F. Akustika / L. F. Lependina. — Moskva: Vy`sshaya shkola, 1978. — 448 s. — In Russian.
4. Trepachyov, V. V. Difrakciya garmonicheskoy volny` na vertikal`nom shhite v kanale / V. V. Trepachyov // Kolebaniya i volny` v zhidkosti i gaze. — Gor`kij: Izd-vo GPI, 1990. — S. 89—95. — In Russian.
5. Trepachyov, V. V. Difrakciya voln na plastine v uzkom kanale / V. V. Trepachyov // Izv. vuzov Sev.-Kavkaz. regiona. Estestv. nauki. — 2002. — № 2. — S. 63—65. — In Russian.

LONG WAVES IN RECTANGULAR TANK GENERATED BY PLANE

V. V. Trepachev

(Don State Technical University)

The surface form of heavy liquid in the rectangular wave tank covered with long waves over the flat bottom is investigated. The waves are generated by the horizontal harmonic oscillations of the screen-formed wavemaker. The accurate solution to the boundary problem with regard to the energy dissipation in liquid is obtained. The results are applicable for the calculation and laboratory simulation of the surface and acoustic waves.

Keywords: heavy incompressible liquid, wavemaker, harmonic waves, long surface waves, wave tank, energy dissipation.