

УДК 321.896+06

Математическая модель прогнозирования влияния электромагнитного поля на устойчивость функционирования радиального подшипника, работающего на электропроводящей газовой смазке

К. С. Ахвердиев, Е. О. Лагунова, К. А. Ванев

(Ростовский государственный университет путей сообщения)

Представлен метод гидродинамического расчёта газодинамического радиального подшипника скольжения, работающего на электропроводящей газовой смазке. Решается вопрос аналитического прогнозирования устойчивости работы подшипника скольжения. Дана оценка влияния числа Гартмана, параметра сжимаемости газа и параметра, характеризующего напряжённость электрического поля, на основные рабочие характеристики подшипника.

Ключевые слова: газовая смазка, радиальный подшипник, автомобильное решение, сила трения, расход, гидродинамическое давление, несущая способность, устойчивость.

Введение. Как известно, подшипники с газовой смазкой в настоящее время широко используются в машинах вращательного движения. Анализ существующих работ показывает, что в этой области есть ряд нерешённых проблем. Это, прежде всего, проблема, связанная с аналитическим прогнозированием устойчивости функционирования радиальных подшипников, работающих на электропроводящей газовой смазке при наличии магнитного поля.

Цель настоящей работы — разработать аналитический метод расчёта радиального газодинамического подшипника, работающего на электропроводящей газовой смазке. Дать оценку влияния электромагнитного поля на основные рабочие характеристики подшипника и на устойчивость его функционирования.

Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение электропроводящей газовой смазки в зазоре радиального подшипника при наличии электромагнитного поля. Предполагаем, что подшипник неподвижен, а шип вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Будем исходить из уравнений «тонкого слоя» для вязкой несжимаемой жидкости при наличии электромагнитного поля.

Основные уравнения и граничные условия. Запишем для нашей задачи уравнение движения газовой смазки, уравнение неразрывности и уравнение состояния [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r'} = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r'^2} = \frac{1}{r'} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \sigma \bar{B} (\bar{E} - u_\theta \bar{B}), \\ P = \rho' RT, \quad \frac{\partial}{\partial r'} (\rho' u_{r'}) + \frac{\rho' u_{r'}}{r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho' u_\theta) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_{r'}, u_\theta$ — компоненты вектора скорости; P — гидродинамическое давление в смазочном слое;

$\bar{E} = \{0, 0, \bar{E}\}$ — вектор напряжённости электрического поля; $\bar{B} = \{\bar{B}, 0, 0\}$ — вектор магнитной индукции; σ — электропроводимость газа; ρ' — плотность; R — удельная газовая постоянная; μ — динамический коэффициент вязкости; r', θ — полярные координаты.

Функции $\bar{E}(r', \theta)$ и $\bar{B}(r', \theta)$ считаем заданными, удовлетворяющими уравнениям Максвелла [2, 3]:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0. \quad (2)$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$\bar{E} = const, \bar{B} = \frac{\Phi'(\theta)}{r'}, \quad (3)$$

где $\Phi'(\theta)$ — заданная радиальная функция.

В полярной системе координат с полюсом в центре шипа уравнения контура и подшипника приближённо можно записать в виде

$$r' = r_0, \quad r' = r_1 + e \cos \theta, \quad (4)$$

где r_0 — радиус шипа; r_1 — радиус подшипника; e — эксцентриситет.

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u_{r'} = 0, \quad u_\theta = 0 \text{ при } r' = r_1 + e \cos \theta; \\ u_{r'} = 0, \quad u_\theta = -\omega r_0 \text{ при } r' = r_0; \quad P(0) = P(2\pi) = \frac{P_a}{\rho_a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Перейдём к безразмерным переменным по формулам:

$$\begin{aligned} u_{r'} = \omega \delta u, \quad u_\theta = -\omega r_0 u, \quad r' = r_0 + \delta r, \quad \delta = r_1 - r_0, \quad p(0) = p(2\pi), \\ P = \rho_a p, \quad \rho' = \rho^* \rho, \quad \rho = \rho, \quad \Phi' = \Phi^* \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1), с учётом (3) и (5) будем иметь с точностью до членов $O\left(\frac{\delta A}{r_0}\right)$, $O\left(\frac{\delta N}{r_0}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r'^2} = \frac{1}{\Lambda} \frac{dp}{d\theta} - A\Phi - M\Phi^2, \quad \frac{\partial}{\partial r'}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u) = 0, \\ u = 0, \quad u = 0 \text{ при } 1 + \eta \cos \theta; \quad u = 0, \quad u = -\rho \text{ при } r = 0; \quad \eta = \frac{e}{\delta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Lambda = \frac{\mu \omega r_0^2}{\rho_a \delta^2}$ — параметр сжимаемости газа; $A = \frac{\sigma \delta^2 \bar{E} \Phi^*}{r_0^2 \mu \omega}$ — параметр, характеризующий напря-

жённость электрического поля; $N = \frac{\sigma \delta^2 \Phi^{*2}}{\mu r_0^2}$ — число Гартмана.

Точное автомодельное решение задачи. Точное автомодельное решение задачи (1)–(7) будем искать в виде:

$$\rho u = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + U(r, \theta), \quad \rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + V(r, \theta), \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{1 + \eta \cos \theta}, \quad h(\theta) = 1 + \eta \cos \theta. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} + M\Phi^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial V^2}{\partial r^2} + M\Phi^2 V = \frac{\rho}{\Lambda} \frac{dp}{d\theta} - \frac{\rho A \Phi_0}{h(\theta)} \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения системы уравнений (9) воспользуемся следующими условиями:

$$U = \tilde{u}(\xi) \eta \sin \theta; \quad V = \tilde{u}(\xi); \quad \xi = \frac{r}{h(\theta)}; \quad \Psi = \tilde{\Psi}(\xi), \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), придём к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\rho}{\Lambda} \frac{dp}{d\theta} = \frac{\tilde{C}_1}{h^2} + \frac{\tilde{C}_2}{h^3} + \frac{\rho A \Phi_0}{h}, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + \frac{d\tilde{\Psi}}{d\xi} \xi = 0,$$

$$\begin{cases} \frac{d^3 \tilde{\Psi}}{d\xi^3} + N\varphi_0^2 \frac{d\tilde{\Psi}}{d\xi} = \tilde{C}_2, \\ \frac{d^2 \tilde{U}}{d\xi^2} + N\varphi_0^2 \tilde{U} = \tilde{C}_1. \end{cases} \quad (11)$$

Граничные условия для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) будут следующими:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}'(0) = 0, \quad \tilde{\Psi}'(1) = 0, \quad \tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}(1) = 0, \quad \tilde{u}(0) = -p, \quad \tilde{u}(1) = 0, \\ \int_0^1 \tilde{u} d\xi = 0, \quad p(0) = p(2\pi) = \frac{P_a}{\rho_a}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая линейные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью (11), с учётом граничных условий (12) найдём выражения для $\tilde{\Psi}'$ и \tilde{u} :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}' &= \tilde{C}_2 \frac{\sin(\varphi_0 \sqrt{N\xi})(\cos(\varphi_0 \sqrt{N}) - 1)}{\sin(\varphi_0 \sqrt{N}) N\varphi_0^2} - \tilde{C}_2 \frac{\cos(\varphi_0 \sqrt{N\xi})}{N\varphi_0^2} + \frac{\tilde{C}_2}{N\varphi_0^2} \\ \tilde{u} &= \frac{\sin(\varphi_0 \sqrt{N\xi})(\cos(\varphi_0 \sqrt{N}) p\varphi_0^2 N + \cos(\varphi_0 \sqrt{N}) \tilde{C}_1 - \tilde{C}_1)}{\sin(\varphi_0 \sqrt{N}) N\varphi_0^2} - \frac{\cos(\varphi_0 \sqrt{N\xi})(pN\varphi_0^2 + \tilde{C}_1)}{N\varphi_0^2} + \frac{\tilde{C}_1}{N\varphi_0^2}. \end{aligned}$$

Из условия $\int_0^1 \tilde{u} d\xi = 0$ найдём \tilde{C}_1 :

$$\tilde{C}_1 = A_1 \cdot p,$$

$$\text{где } A_1 = - \frac{N^2 \varphi_0^2 (\cos(\varphi_0 \sqrt{N})^2 - \cos(\varphi_0 \sqrt{N}) + \sin(\varphi_0 \sqrt{N})^2)}{-2N \cos(\varphi_0 \sqrt{N}) + N + N \cos(\varphi_0 \sqrt{N})^2 - \sin(\varphi_0 \sqrt{N}) N^{3/2} \varphi_0 + \sin(\varphi_0 \sqrt{N})^2 N}.$$

Для нахождения безразмерного гидродинамического давления приходим к следующему уравнению:

$$\frac{p}{\Lambda} \frac{dp}{d\theta} = \frac{\tilde{C}_1}{h^2} + \frac{\tilde{C}_2}{h^3} + \frac{pA\varphi_0}{h}. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (13) от 0 до θ , будем иметь

$$p = \sqrt{\frac{P_a}{\rho_a}} \sqrt{1 + \frac{2\Lambda\rho_a}{P_a} \int_0^\theta \left(\frac{\tilde{C}_1}{h^2} + \frac{\tilde{C}_2}{h^3} + \frac{A\varphi_0 p}{h} \right) d\theta}. \quad (14)$$

Решение интегрального уравнения (14) будем искать методом последовательных приближений, полагая в качестве первого приближения $p_0 = 1$. С точностью до $O(\Lambda^2)$ для p_1 получим следующее выражение:

$$p_1 = \sqrt{\frac{P_a}{\rho_a}} \left[1 + \frac{\Lambda\rho_a}{P_a} \int_0^\theta \left(\frac{A_1}{h^2} + \frac{\tilde{C}_2}{h^3} + \frac{A\varphi_0}{h} \right) d\theta \right].$$

Из условия $p(0) = p(2\pi)$ с точностью до $O(\eta^2)$ найдём \tilde{C}_2 :

$$\tilde{C}_2 = -A\varphi_0 - A_1.$$

Тогда выражение для гидродинамического давления p_1 с точностью до $O(\eta^2)$ примет вид:

$$p_1 = \sqrt{\frac{P_a}{\rho_a}} \frac{1}{P_a} [P_a + \rho_a \Lambda A_1 \eta \sin \theta + \rho_a 2\Lambda A\varphi_0 \eta \sin \theta].$$

Проекция главного вектора вещества смазок $W = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ на шип определяется формулами:

$$R_x = -r_0 \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta; \quad R_y = -r_0 \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta$$

Заметим, что в силу периодичности давления P и чётности $\cos \theta$ второй интеграл соответственно равен нулю. Первый интеграл проще вычислить по частям:

$$R_x = -r_0 \int_0^{2\pi} P d(-\cos \theta) = r_0 P \cos \theta \Big|_0^{2\pi} - r_0 \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\theta} \cos \theta d\theta = -r_0 \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\theta} \cos \theta d\theta. \quad (15)$$

Подставляя выражение для гидродинамического давления в выражение (15), найдём выражение для несущей способности подшипника:

$$W = R_x = \frac{\sqrt{P_a}}{\sqrt{p_a}} \frac{r_0 p_a \pi \Lambda}{P_a} (A_1 \eta + 2A\varphi_0 + 3A\varphi_0 \eta). \quad (16)$$

Найдём силу трения по формуле:

$$L = \mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} \Big|_{\xi=0} d\theta = \frac{\mu \omega r_0}{\delta} \int_0^{2\pi} \tilde{u}'(0) d\theta = \frac{2\mu \omega r_0 \pi}{\delta} \left(\frac{(A_1 + A\varphi_0^2) \sin(\varphi_0 \sqrt{N})}{\varphi_0 \sqrt{N} (\cos(\varphi_0 \sqrt{N}) + 1)} - 1 + \sqrt{\frac{P_a}{p_a}} \right). \quad (17)$$

Найдём расход смазки по формуле:

$$Q = \rho^* \omega r_0 \delta \int_0^1 \Psi(\xi) d\xi = \rho^* \omega r_0 \delta \frac{\tilde{C}_2 \left(-2 \cos(\varphi_0 \sqrt{N}) N + N + \cos^2(\varphi_0 \sqrt{N}) N \right)}{N^{5/2} \sin(\varphi_0 \sqrt{N}) \varphi_0^3} - \rho^* \omega r_0 \delta \frac{\tilde{C}_2 \left(N^{3/2} \varphi_0 \sin(\varphi_0 \sqrt{N}) + \sin^2(\varphi_0 \sqrt{N}) N \right)}{N^{5/2} \sin(\varphi_0 \sqrt{N}) \varphi_0^3}. \quad (18)$$

Решение задачи об устойчивости. Решение этой задачи приводится на основе следующего безразмерного уравнения движения шипа:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dT^2} = -\frac{R_x}{\omega^2 M r_0} + \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 \cos \Phi + \varepsilon \left(\frac{d\Phi}{dT} \right)^2, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dT^2} = \frac{R_y}{\varepsilon \omega^2 M r_0} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 \sin \Phi - \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right) \left(\frac{d\Phi}{dT} \right).$$

Здесь $\varepsilon = \frac{e}{r_1 - r_0}$ — относительный эксцентриситет; $T = \omega t$; t — время; ω — угловая скорость вращения шипа; e — эксцентриситет; r_0 — радиус шипа; M — масса шипа; $\bar{\omega} = \left(\frac{g}{\delta} \right)^{1/r}$; δ — радиальный зазор; g — ускорение силы тяжести; R_x и R_y — компоненты вектора поддерживающей силы; Φ — угол наложения.

Явные выражения для R_x и R_y , приведённые выше, показывают, что R_x и R_y существенно зависят от следующих безразмерных параметров: параметра сжимаемости газа Λ , параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля, и параметра N , характеризующего число Гартмана. Используя выражения для R_x и R_y , можно получить численное решение системы (19).

Компоненты ускорения шипа $\frac{d^2 \varepsilon}{dT^2}$ и $\frac{d^2 \Phi}{dT^2}$ представляют собой явные функции параметров

ε , Φ , $\frac{d\varepsilon}{dT}$, $\frac{d\Phi}{dT}$, Λ , A , N . Уравнения (19) записываются в стандартной форме первого порядка и

решаются с помощью многозначного метода, разработанного Гиром [4]. После получения решения уравнений движения для заданных значений ε , Φ , $\frac{d\varepsilon}{dT}$, $\frac{d\Phi}{dt}$, Λ , A , N устойчивость рассматриваемого движения определяется визуально по графику. Некоторые модели движения шипа приведены на рисунках 3 и 4. На рис. 3 представлено устойчивое движения шипа при следующих условиях $\eta = 0,01$; $\varepsilon_0 = 0,5$; $\frac{\omega}{\bar{\omega}} = 2,4$; $\Phi = 0,001$; $\Lambda = 0,25$; $A = 0,6$; $N = 0,4$. На рис. 4 представлено неустойчивое движение шипа ($\varepsilon_0 = 0,8$; $\frac{\omega}{\bar{\omega}} = 2,5$; $\Phi = 0,001$; $\Lambda = 0,25$; $A = 0,25$; $A = 0,1$; $N = 0,2$).

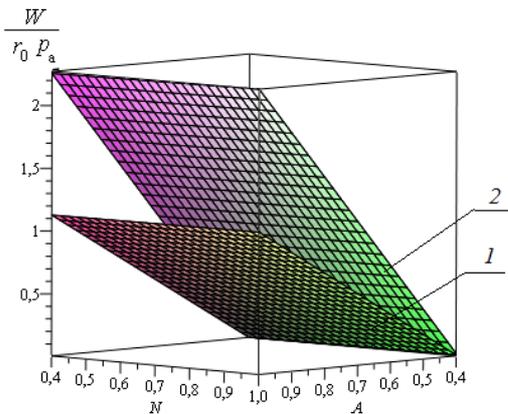


Рис. 1. Зависимость безразмерной несущей способности $\frac{W}{r_0 P_a}$ от числа Гартмана, параметра сжимаемости газа и параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля. 1 — $\Lambda = 0,25$; 2 — $\Lambda = 0,5$

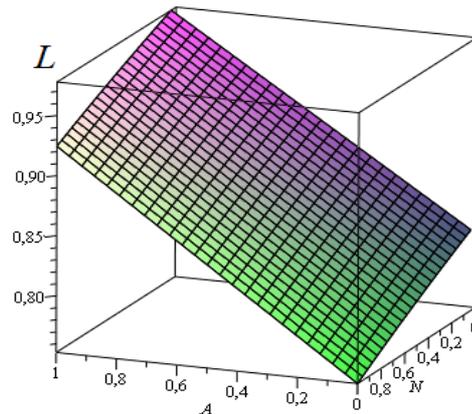


Рис. 2. Зависимость безразмерной силы трения L от числа Гартмана и параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля

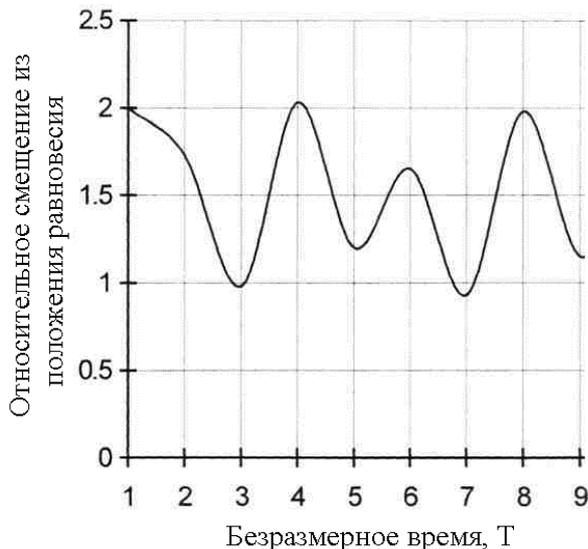


Рис. 3. Движение центра шипа при моделировании устойчивого состояния

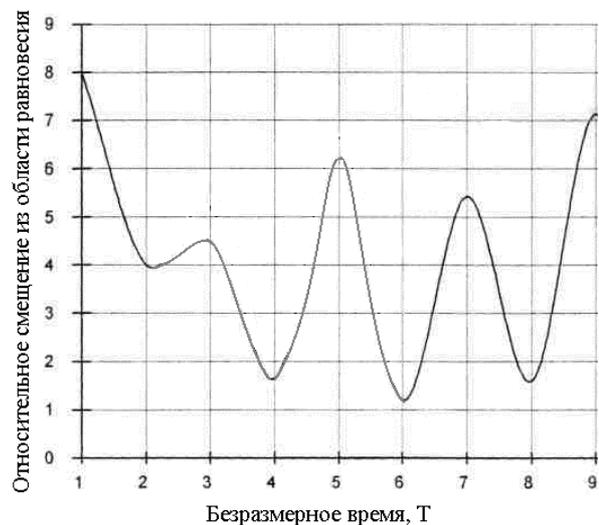
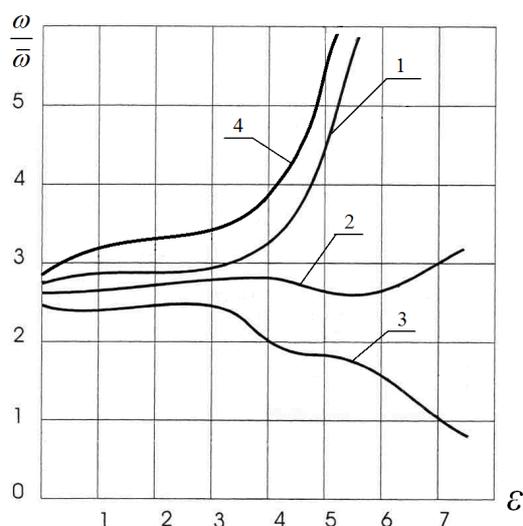


Рис. 4. Движение центра шипа при моделировании неустойчивого состояния



1 — $\eta = 0,0001, A = 0, N = 0$; 2 — $\eta = 0,0007, A = 0, N = 0$; 3 — $\eta = 0,01, A = 0, N = 0$; 4 — $\eta = 0,0001, A = 0,5, N = 0,4$

Рис. 5. Область устойчивости движения шипа

Результаты для некоторых значений $\Phi, \varepsilon, \Lambda, A$ и N приведены на рис. 5. Все точки, которые лежат ниже кривых, соответствуют устойчивому движению, а все точки, которые лежат выше этих кривых, соответственно — неустойчивому движению шипа. Графики устойчивости определяются такими точками $(\omega/\bar{\omega})$, которые являются неграничными, т. е. соответствуют орбите шипа.

Выводы. Результаты численного анализа аналитических выражений (16)—(18) для основных рабочих характеристик радиального подшипника показывают:

— Число Гартмана не оказывает существенного влияния на несущую способность подшипника (рис. 1). С увеличением параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля, и параметра сжимаемости газа имеет место значительное увеличение несущей способности.

— С увеличением параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля, безразмерная сила трения возрастает (рис. 2), а с увеличением числа Гартмана уменьшается. Принимая во внимание решение для малого числа приближений, параметр сжимаемости газа не оказывает существенного влияния на безразмерную силу трения.

— С увеличением числа Гартмана расход смазки резко уменьшается. При малых значениях с увеличением параметра A , характеризующего напряжённость электрического поля, расход смазки незначительно возрастает. Принимая во внимание решение для малого числа приближений, параметр сжимаемости газа не оказывает существенного влияния на расход смазочного вещества.

— Из приведённых на рис. 5 зависимостей следует, что в случае электропроводящей газовой смазки область устойчивости движения шипа расширяется.

Библиографический список

1. Ахвердиев, К. С. Основы совершенствования тяжело нагруженных узлов трения транспортных систем / К. С. Ахвердиев, В. И. Колесников, В. М. Приходько. — Москва: Маршрут, 2005. — 336 с.
2. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. — Москва: Наука, 1989. — 504 с.
3. Терлецкий, Я. П. Электродинамика / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. — Москва: Высш. шк., 1990. — 353 с.
4. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва: Наука, 1989. — 432 с.

Материал поступил в редакцию 12.07.2012.

References

1. Axverdiev, K. S. Osnovy` sovershenstvovaniya tyazhelonagruzheny`x uzlov treniya transportny`x sistem / K. S. Axverdiev, V. I. Kolesnikov, V. M. Prikhod`ko. — Moskva: Marshrut, 2005. — 336 s. — In Russian.
2. Tamm, I. E. Osnovy` teorii e`lektrichestva / I. E. Tamm. — Moskva: Nauka, 1989. — 504 s. — In Russian.
3. Terleczkij, Ya. P. E`lektrodinamika / Ya. P. Terleczkij, Yu. P. Ry`bakov. — Moskva: Vy`ssh. shk., 1990. — 353 s. — In Russian.
4. Samarskij, A. A. Chislenny`e metody` / A. A. Samarskij, A. V. Gulin. — Moskva: Nauka, 1989. — 432 s. — In Russian.

MATHEMATICAL PREDICTION MODEL OF ELECTROMAGNETIC FIELD IMPACT ON OPERATION STABILITY OF RADIAL BEARING WORKING ON CONDUCTING GAS LUBRICATION

K. S. Akhverdiyev, E. O. Lagunova, K. A. Vaneyev
(Rostov State Transport University)

The technique of the hydrodynamic calculation of the gasdynamic journal bearing working on the conducting gas lubrication is presented. The analytical prediction problem on the friction bearing operation stability is solved. The assessment of the effect of Hartmann number, the gas compressibility parameter, and the electric stress parameter on the bearing basic operation factors is given.

Keywords: *gas lubrication, radial bearing, self-similar solution, frictional force, consumption, hydrodynamic pressure, bearing capacity, stability.*