

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Аналитическое решение контактной задачи о внедрении сферического индентора в мягкий упругий слой*

С. С. Волков

(Донской государственный технический университет)

Приводится эффективный метод построения приближённого аналитического решения контактной задачи о внедрении сферического индентора в мягкий упругий слой, лежащий на жёстком упругом основании. Метод позволяет получить решение задачи, эффективное для всего диапазона значений характерных геометрических и физических параметров задачи. Рассмотрены случаи отличия модулей Юнга слоя и подложки более, чем в 100 раз. Полученные контактные напряжения для различной степени жёсткости основания сравниваются с ранее известными результатами для случая недеформируемого основания; показано, что при отличии свойств слоя и подложки в 100 раз, максимальная разница между результатами составляет менее 3 %. Определена связь между вдавливающей силой и радиусом сферы. Задача поставлена в связи с проблемой контроля упругих свойств тонких упругих покрытий.

Ключевые слова: контактная задача, сферический индентор, эффективное решение, мягкий упругий слой, упругое основание, модуль Юнга, контроль упругих свойств.

Введение. Контактные задачи для упругого слоя на протяжении длительного периода времени привлекают внимание исследователей. Решения этих задач имеют многочисленные приложения, в частности, они эффективно используются при исследовании свойств износостойких и защитных покрытий. Одним из важных практических приложений является возможность интерпретировать результаты индентирования и наноиндентирования [1]. Результаты работы могут быть использованы при изучении упругих свойств мягких материалов (мягкие полимеры, биологические ткани), когда следует учитывать влияние жёсткости подложки на образец.

Решению контактных задач для упругого слоя посвящено большое количество работ, так, например, в [2] постановка классической задачи Герца обобщается, и рассматривается случай, когда сферический индентор вдавлируется в слой, лежащий на недеформируемом основании или на однородном полупространстве (однородное полупространство имеет упругие свойства, отличные от упругих свойств слоя). Задача сводится к решению интегрального уравнения. Приближённое решение интегрального уравнения строится двумя методами: сингулярным методом, который эффективен для очень тонких слоёв, лежащих на недеформируемом основании, когда толщина слоя H меньше радиуса контакта a ($\lambda = H/a < 0,5$), и регулярным методом, который применим в случае, когда толщина слоя такова, что $\lambda > 1$ [3].

В данной работе для решения контактной задачи о внедрении сферического индентора в мягкий однородный слой на жёстком упругом полупространстве используется двусторонне-асимптотический метод [4, 5]. Под мягкостью слоя следует понимать то, что модуль Юнга рассматриваемого слоя в несколько раз меньше модуля Юнга подстилающего полупространства. За это отличие упругих модулей основания и слоя отвечает параметр относительной жёсткости ос-

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (11-08-91168-ГФЕН_а, 12-07-00639_а) и Министерства образования и науки РФ (ГК № 11.519.11.3028, соглашения № 14.В37.21.1131, 14.132.21.1693).

нования η (относительной мягкости слоя), равный отношению соответствующих упругих модулей. Ниже рассмотрены случаи, когда параметр $\eta = 2,5; 10; 100; 1000$ и показано, что при увеличении значения этого параметра результаты, полученные двусторонне-асимптотическим методом, сходятся к известным решениям, полученным ранее [6] для недеформируемого основания. Используемый метод позволяет получить эффективное решение задачи во всём диапазоне значений характерного геометрического параметра задачи λ .

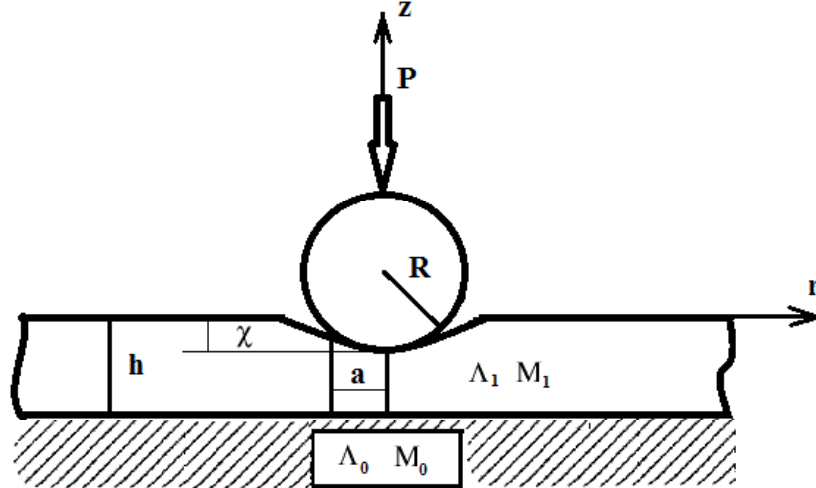


Рис. 1. Постановка задачи

Постановка задачи. Пусть сферический индентор вдавливаются в поверхность мягкого упругого однородного слоя, сцепленного с упругим жёстким полупространством, силой P (рис 1). С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, ϕ, z) . Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта форма сферического индентора аппроксимируется параболой

$$z = \psi(r) = \beta r^2 \quad (1)$$

Аппроксимация обоснована для однородных тел [7] для малых радиусов контакта $a < 0,1R$. Это условие выполняется практически для всех случаев упругого сферического внедрения. Вне индентора поверхность полупространства не загружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z . Коэффициенты Ламе изменяются с глубиной по следующему закону:

- 1) $\Lambda = \Lambda_1, M = M_1, -H \leq z \leq 0$;
- 2) $\Lambda = \Lambda_0, M = M_0, -\infty < z < -H$.

При сделанных предположениях граничные условия будут иметь вид:

$$z = 0, \tau_{zr} = \tau_{z\phi} = 0, \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a \\ w = -\delta(r) = -(\chi - \psi(r)), & r \leq a \end{cases} \text{ и } z = -H, \begin{cases} \tau_{zr}^{(1)} = \tau_{zr}^{(2)}, \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} \\ w^{(1)} = w^{(2)}, u^{(1)} = u^{(2)} \end{cases} \quad (2)$$

При $(r; -z) \rightarrow \infty$ напряжения в полупространстве исчезают. Требуется определить перемещение штампа и распределение контактных нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0} = -q(r), \quad r \leq a. \quad (3)$$

Построение решения задачи. Используя метод интегральных преобразований, задача сводится к решению следующего интегрального уравнения [4]:

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0(u\rho\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \lambda \Theta_0(0) f(r), \quad r \leq 1 \quad (4)$$

Здесь трансформанта $L(u)$ строится численно методом моделирующих функций [8].

В [4, 5] описан метод аппроксимации трансформанты ядра уравнения выражениями вида

$$L(u) = L_{\Pi}^N(u) + L_{\Sigma}^M(u), \quad \text{где } L_{\Pi}^N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad \text{а } L_{\Sigma}^M(u) = \sum_{k=1}^M \frac{C_k |u|}{u^2 + D_k^2}, \quad (5)$$

где $A_i, B_i, D_k \in \mathbb{C}$; $C_k \in \mathbb{R}$ — некоторые константы.

Для трансформанты ядра $L(u) \in L_{\Pi}^N$ в работе [4] получено аналитическое выражение, которое служит для приближённого определения контактных напряжений и вдавливающей силы:

$$\tau(r) \approx \frac{2a\Theta(0)}{\pi R} \left[2L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} + \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\text{sh}(A_i t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right], \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (6)$$

$$P \approx \frac{4a^3\Theta(0)}{R} \left[\frac{2}{3} L_N^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i (\text{ch}(A_i \lambda) - A_i^{-1} \lambda \text{ch}(A_i \lambda)) \right]. \quad (7)$$

Неизвестные C_i определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений [4].

При рассмотрении контактной задачи о взаимодействии штампа с упругим слоем, лежащим на упругой подложке, в случае существенного отличия свойств слоя и подложки, использовалось предположение, что слой лежит на недеформируемом основании [3, 6]. Для этой модели основания трансформанта ядра $L(0) = 0$.

Одним из условий использования двусторонне-асимптотического метода является то, что трансформанта ядра является всюду строго положительной, и более того, нигде не обращается в ноль. Предположение, что подложка под покрытием остаётся упругой, хотя её свойства отличаются от свойств покрытия в 100, 1000, и более раз, позволяет удовлетворить этому условию.

Ниже считаем, что основание, на котором лежит слой, остаётся упругим, хотя его упругие свойства значительно отличаются от упругих свойств покрытия.

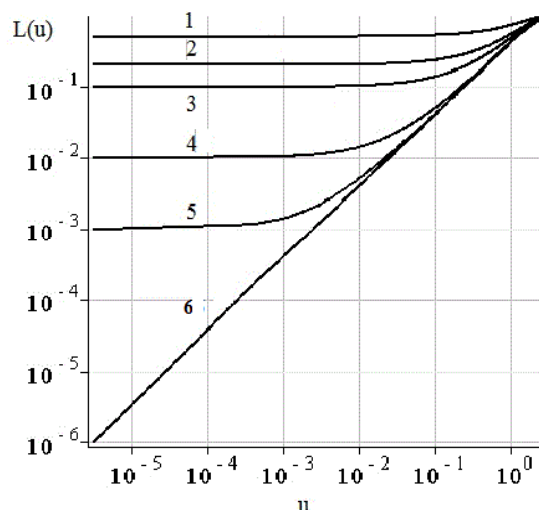


Рис. 2. Трансформанты ядер интегрального уравнения. Кривые 1—5 соответствуют отличию модулей Юнга слоя и основания в 2,5; 10; 100; 1000 раз соответственно. Кривая 6 соответствует трансформанте ядра для недеформируемого основания

На рис. 2 изображены графики функций $L(u)$ — трансформант ядра интегрального уравнения (4), построенные методом моделирующих функций [8]. Графики изображены в логарифмической шкале по обеим осям. Кривые с номерами 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют трансформантам ядра для материалов, у которых упругие свойства покрытия и подложки отличаются в 2, 5, 10, 100, 1000 раз соответственно. Номером 6 обозначен график трансформанты ядра, для случая недеформируемого основания, при построении которого была взята функция из [3], следующего вида:

$$L(u) = \frac{2\chi \operatorname{sh}(2u) - 4u}{2\chi \operatorname{ch}(2u) + 1 + \chi^2 + 4u^2}, \quad \text{где } \chi = 3 - 4\nu.$$

Анализируя рис. 2 можно увидеть, что по мере того, как увеличивается жёсткость основания, графики функций трансформант приближаются к своему предельному графику 6, для недеформируемого основания. Покажем, что значения контактных напряжений с увеличением жёсткости подложки приближаются к контактным напряжениям, соответствующим недеформируемой подложке.

Численные примеры. Рассмотрим внедрение параболического индентора в однородный слой, лежащий на жёстком упругом основании. Параметр η , характеризующий относительную жёсткость, принимает значения 2,5; 10; 100; 1000 ($\eta = E_0 (E_1(h))^{-1}$). Коэффициент Пуассона, не нарушая общности, полагаем равным 0,3.

Введём функцию $\Delta_L(u)$, характеризующую погрешность аппроксимации трансформанты ядра:

$$\Delta_L(u) = \left| (L_N^N(u) - L(u)) / L(u) \right| \cdot 100 \%. \quad (8)$$

Формула (8) введена для оценки погрешности аппроксимации трансформанты ядра выражениями вида $L_N^N(u)$.

В таблице 1 приведены значения величины $\tau^* = 2R\tau(0) / \Theta_0(0)a$, характеризующей контактные напряжения под штампом в точке $r = 0$.

Таблица 1

Контактные напряжения

$\max \Delta_L(u), u \in [0, \infty)$	1,4 %	2,8 %	3,3 %	3 %	3,2 %	—
N	8	8	10	10	20	—
η	2	5	10	100	1000	—
$\lambda = 0,25$	4,098	6,375	7,991	10,075	10,326	10,342*
$\lambda = 1$	2,866	3,144	3,252	3,342	3,389	3,305†
$\lambda = 4$	2,562	2,555	2,560	2,556	2,542	2,568†

В таблице 2 приведены значения величины $P^* = 2RP / \Theta_0(0)a^3$, определяющей связь между вдавливающей силой и радиусом сферы.

Таблица 2

Связь вдавливающей силы и осадки

η	2	5	10	100	1000	—
$\lambda = 0,25$	7,938	11,557	13,973	17,048	17,447	17,66†
$\lambda = 1$	5,895	6,365	6,553	6,709	6,771	6,82†
$\lambda = 4$	5,363	5,355	5,365	5,360	5,336	5,38†

* Результаты из работы [6] для недеформируемого основания.

В таблице 1 и 2 значения крайнего правого столбца взяты из монографии [6] и характеризуют τ^* и P^* для случая вдавливания параболического штампа в упругий слой, лежащий на недеформируемом основании.

Из анализа таблицы 1 видно, что максимальная разница между контактными напряжениями при $\eta = 1000$ и значениями для недеформируемого основания не превышает 3 % при $\lambda = 1$. Заметим, что из таблиц 1, 2 видно, что значения τ^* и P^* принимают близкие значения при $\eta = 100$ и $\eta = 1000$. Обратим внимание также на то, что упругие свойства основания не оказывают сильного влияния на распределение контактных напряжений, для значений параметра $\lambda > 1$ (если сравнивать значения напряжений при η , равном 2 и 1000, то максимальная разница не превышает 15 % для $\lambda = 1$).

Заключение. Использование двусторонне-асимптотического метода при решении осесимметричной контактной задачи о мягком упругом слое на жёстком основании позволяет учесть деформируемость подложки под мягким покрытием твёрдого основания и получить решение, эффективное для всего диапазона значений характерных геометрических и физических параметров задачи, что является важным при исследовании механических свойств биологических тканей и мягких полимеров.

Автор благодарит С. М. Айзиковича за постановку задачи и советы при реализации решения.

Библиографический список

1. Tsui, Y. T. Substrate effects on nanoindentation mechanical property measurement of soft films on hard substrates / T. Y. Tsui, G. M. Pharr // *Journal of Materials Research*. — 1999. — Vol. 14. — No. 1. — Pp. 292—301.
2. El-Sherbiny, M. G. D. The Hertzian Contact of Surfaces Covered with Metallic Films / M. G. D. El-Sherbiny, J. Halling // *Wear*. — 1996. — Vol. 40. — No. 3. — Pp. 325—337.
3. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. А. Александров, В. А. Бабешко. — Москва: Наука, 1974. — 456 с.
4. Aizikovich, S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S. Aizikovich, V. Alexandrov, J. Kalker, L. Krenev // *International Journal of Solids and Structures* 39. — 2002. — Pp. 2745—2772.
5. Aizikovich, S. Evaluation of the elastic properties of a functionally-graded coating from the indentation measurements / S. Aizikovich, L. Krenev, I. Sevostianov, I. Trubchik // *ZAMM*. — 2011. — Pp. 1—23.
6. Александров, В. М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. — Москва: Факториал, 1998. — 288 с.
7. Suresh, S. A new method for estimating residual stresses by instrumented sharp indentation / S. Suresh, A. E. Giannakopoulos // *Acta mater.* — Vol. 46. — No. 16. — 1998. — Pp. 5755—5767.
8. Бабешко, В. А. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1987. — Т. 27. — № 1. — С. 93—101.

Материал поступил в редакцию 09.08.2012.

References

1. Tsui, Y.T., Pharr, G.M. Substrate effects on nanoindentation mechanical property measurement of soft films on hard substrates. *Journal of Materials Research*, 1999, vol. 14, no. 1, pp. 292–301.

2. El-Sherbiny, M.G.D., Halling, J. The Hertzian Contact of Surfaces Covered with Metallic Films. *Wear*, 1996, vol. 40, no. 3, pp. 325–337.
3. Vorovich, I.I., Alexandrov, V.A., Babeshko, V.A. *Neklassicheskiye smeshannyye zadachi teorii uprugosti*. [Nonclassical mixed problems of elasticity theory.] Moscow: Nauka, 1974, 456 p. (in Russian).
4. Aizikovich, S., Alexandrov, V., Kalker, J., Krenev, L. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39, pp. 2745–2772.
5. Aizikovich, S., Krenev, L., Sevostianov, I., Trubchik, I. Evaluation of the elastic properties of a functionally-graded coating from the indentation measurements. *ZAMM*, 2011, pp. 1–23.
6. Alexandrov, V.M., Pozharskiy, D.A. *Neklassicheskiye prostranstvennyye zadachi mekhaniki kontaktnykh vzaimodeystviy uprugikh tel*. [Nonclassical spatial problems of mechanics of elastic bodies contact interaction.] Moscow: Faktorial, 1998, 288 p. (in Russian).
7. Suresh, S., Giannakopoulos, A.E. A new method for estimating residual stresses by instrumented sharp indentation. *Acta mater*, 1998, vol. 46, no. 16, pp. 5755–5767.
8. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Glushkova, N.V. *Metody postroyeniya matrits Grina dlya stratifitsirovannogo uprugogo poluprostranstva*. [Green matrices design methods for elastic stratifiable half-space.] *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 93–101 (in Russian).

ANALYTICAL SOLUTION TO CONTACT PROBLEM ON SPHERICAL INDENTER PENETRATION INTO SOFT ELASTIC LAYER*

S. S. Volkov

(Don State Technical University)

An efficient method for constructing an approximate analytical solution to the contact problem of the penetration of a spherical indenter into the soft elastic layer lying on a rigid elastic foundation is proposed. The method permits to obtain the problem solution effective for the full range of the problem characteristic geometrical and physical parameter values. Some cases when Young's moduli of the layer and the substrate differ more than a hundredfold are analyzed. The obtained contact stresses for different values of the foundation stiffness are compared with the formerly known results for the nondeformable foundation case. It is shown that when the elastic properties of the layer and the substrate differ a hundredfold, maximum difference between these results is less than 3%. The relationship between the pressing force and the radius of the sphere is determined. The question is put owing to the control problem of the thin coatings elastic properties.

Keywords: *contact problem, spherical indenter, effective solution, soft elastic layer, elastic foundation, Young's modulus, control of elastic properties.*

* The research is done with the partial financial support from RFFI (11-08-91168-GFEN_a, 12-07-00639_a) and from The Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State Contract No. 11.519.11.3028, Agreements Nos. 14.B37.21.1131, 14.132.21.1693).