

УДК 539.32

О задаче Коши для уравнения в частных производных первого порядка и её приложениях в теории обратных задач

А. О. Ватульян, Л. С. Гукасян

(Донской государственный технический университет)

Исследуется обратная коэффициентная задача для оператора второго порядка в односвязной области с кусочно-гладкой границей, возникающая в теории колебаний деформируемых систем. Предложен метод решения обратной коэффициентной задачи на основе исследования задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Решены прямая и обратная задачи на основе метода разностных аппроксимаций. Приведены результаты реконструкции переменного модуля сдвига различных типов, полученные как при точных, так и при зашумленных входных данных.

Ключевые слова: задача Коши, обратная коэффициентная задача, разностные схемы.

Введение. Коэффициентные задачи в естествознании, в математической физике, в механике деформируемого твёрдого тела — интенсивно развивающийся раздел вычислительной и экспериментальной механики, требующий основательной теоретической базы, составляет один из важнейших классов обратных задач. Для этого класса задач можно выделить модели, в которых идентифицируемые дифференциальные операторы имеют постоянные коэффициенты и модели, в которых требуется идентифицировать неоднородные свойства [1, 2].

Заметим, что можно рассматривать две кардинально различные постановки задачи идентификации неоднородностей в зависимости от способа измерения полей. В первой постановке реконструкция искоемых характеристик осуществляется по измерению внутренних полей, а во второй — по измерению граничных полей в некотором частотном диапазоне. В первом случае обратная задача линейна, во втором — существенно нелинейна. Переменность коэффициентов дифференциальных операторов не позволяет построить в явном виде общие представления решений для соответствующих операторов, как для операторов с постоянными коэффициентами. Если коэффициенты дифференциальных операторов меняются произвольным образом, то методы решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержней и пластин) [3] и численную процедуру обращения соответствующих конечномерных операторов, либо на прямое использование конечноэлементных технологий. В то же время анализ первой линейной постановки позволяет глубже разобраться с причинами сильной некорректности, возникающей при анализе коэффициентных обратных задач [4]. С математической точки зрения эта задача сводится к решению некоторой задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [5]. В данном случае известны различные способы анализа. Для обыкновенных дифференциальных операторов такие постановки рассмотрены ранее — в [6, 7] проанализированы подобные обратные задачи для уравнений первого и второго порядков.

В приложениях часто встречается уравнение в частных производных второго порядка при постоянных характеристиках. В настоящей работе рассмотрена задача Коши для такого уравнения, известного как уравнение Гельмгольца.

1. Постановка прямой задачи. Рассмотрим установившиеся крутильные колебания стержня с переменным модулем сдвига с поперечным сечением S . Уравнение установившихся колебаний с частотой ω имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}(\mu u_{,k})_{,k} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ u_{,k} &= \frac{\partial u}{\partial x_k},\end{aligned}\tag{1}$$

где μ — переменный модуль сдвига, ρ — плотность.

Будем считать, что поперечное сечение стержня S есть односвязная область с кусочно-гладкой границей $I = I_1 \cup I_2$. Часть границы I_1 закреплена, на I_2 действует нагрузка. В этом случае краевые условия имеют вид:

$$u|_{I_1} = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n}|_{I_2} = p.\tag{2}$$

Приведём краевую задачу (1), (2) к безразмерному виду, введя безразмерные параметры, функции и обозначая $\mu_0 = \max \mu$, $\rho_0 = \max \rho$, $x \in S$,

$$g = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho_0 \omega^2 a^2}{\mu_0}, \quad a = \text{diam} S = \max_{A, B \in S} \rho(A, B),\tag{3}$$

$$(gu_{,k})_{,k} + \kappa^2 u = 0.\tag{4}$$

$$u|_{I_1} = 0, \quad g \frac{\partial u}{\partial n}|_{I_2} = p_0.\tag{5}$$

Задача (4)—(5) при известной положительной функции $g(x_1, x_2)$ представляет собой краевую задачу об отыскании $u(x_1, x_2)$, для которой несложно установить существование обобщённого решения при минимальных требованиях относительно гладкости $g(x_1, x_2)$. К сожалению, решение такой задачи даже в простой области типа прямоугольника может быть построено лишь численно, на основе либо конечноэлементного подхода, либо разностных аппроксимаций.

2. Постановка обратной задачи. Рассмотрим задачу, обратную по отношению к сформулированной выше (4)—(5). Поставим задачу об определении функции $g(x_1, x_2)$ в области S по известной (измеренной) функции $u(x_1, x_2)$. Тогда в предположениях о некоторой гладкости (которые будут описаны ниже) имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}g_{,1}u_{,1} + g_{,2}u_{,2} + g\Delta u + \kappa^2 u &= 0 \\ g \frac{\partial u}{\partial n}|_{I_2} &= p_0.\end{aligned}\tag{6}$$

Далее будем требовать выполнения следующих условий:

$$1) \frac{\partial u}{\partial n}|_{I_2} \neq 0,\tag{7}$$

2) $u_{,1}, u_{,2}, \Delta u$ — непрерывно дифференцируемы в S ,

3) функции $u_{,1}, u_{,2}$ — коэффициенты при производных искомой функции в (6) — одновременно в ноль не обращаются, т. е. $u_{,1}^2 + u_{,2}^2 \neq 0$.

Пусть уравнение кривой I_2 имеет следующую параметризацию: $x_1 = \varphi_1(s)$, $x_2 = \varphi_2(s)$, $s \in [s_1, s_2]$. Тогда перепишем граничное условие для задачи Коши (6), которое приобретает вид

$$g(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) \frac{\partial u}{\partial n}|_k = p_0(s).\tag{8}$$

Введём понятие характеристик системы [9]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u_{,1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} = u_{,2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{cases}. \quad (9)$$

Пусть $x_1(t), x_2(t)$ — её решение, которое называется характеристическим.

Очевидно, что вдоль характеристик выполняется соотношение

$$g_{,1}u_{,1} + g_{,2}u_{,2} = \frac{dg}{dt} \quad (10)$$

Действительно, если $g = g(x_1, x_2)$, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dg}{dt} = g_{,1} \frac{dx_1}{dt} + g_{,2} \frac{dx_2}{dt} = g_{,1}u_{,1} + g_{,2}u_{,2}. \quad (11)$$

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть кривая I_2 не касается характеристик. Тогда задача Коши (6) однозначно разрешима в некоторой окрестности I_2 .

Проведём из $\forall$ точки $M_0 \in I_2$ характеристику, т. е. решим семейство задач Коши для системы (9):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_{,1} & x_1|_{t=0} &= r_1(s) \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_{,2} & x_2|_{t=0} &= r_2(s), \quad s \in [s_1, s_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $x_1(t, s), x_2(t, s)$ — решение задачи Коши (12). В силу (11) исходная задача (6) преобразуется к виду.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} + g\Delta u + \kappa^2 u &= 0 \\ g \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{t=0} &= p_0(s). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом получим, что (13) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Нетрудно доказать, что $g = \psi(t, s)$ — непрерывно дифференцируема. Также можно выразить (t, s) через x_1, x_2 в предположении, что якобиан отличен от нуля:

$$\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{vmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{vmatrix} r_1' & r_2' \\ u_{,1} & u_{,2} \end{vmatrix} \Big|_{(x_1, x_2) \in I_2} \neq 0,$$

что выполняется, поскольку I_2 не является характеристикой.

Утверждение 2. Решение задачи (6) единственно.

Доказательство осуществляется аналогично [9]. В предположении наличия двух решений g_1, g_2 составим задачу Коши относительно их разности $\hat{g} = g_1 - g_2$

$$\frac{d\hat{g}}{dt} + \hat{g}\Delta u = 0, \quad \hat{g}|_{t=0} = 0,$$

которая в рамках условий (7) имеет только нулевое решение.

3. Построение решения на основе разностной трактовки. В настоящем пункте рассмотрим далее примеры конкретных расчётов для различных областей. Основное внимание уделим задачам для прямоугольника и круга, причём основные цели исследования таковы:

1) разработка метода построения функции $u(x_1, x_2)$ при различных значениях параметра κ при произвольных законах изменения $g(x_1, x_2)$ (монотонных, немонотонных, кусочно-непрерывных);

2) разработка метода построения решения обратной задачи, которая состоит в нахождении функции $g(x_1, x_2)$ по информации об узловых значениях функции $u(x_1, x_2)$ при некотором значении κ_0 ;

3) проведение серии вычислительных экспериментов, позволяющих оценить эффективность предлагаемых методов.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу решения дифференциального уравнения (6) с переменными коэффициентами в области $S = [0, 1] \times [-c, c]$ со следующими граничными условиями:

$$g \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=1} = p_0(x_2), \quad g \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\pm c} = 0, \quad u|_{x_1=0} = 0. \quad (14)$$

Эта задача представляет собой классическую краевую смешанную задачу для неоднородного эллиптического оператора типа Гельмгольца с переменными коэффициентами, и её решение в общей ситуации (при произвольных законах неоднородности) возможно построить лишь численно.

3.1.1. Исследование прямой задачи. Прямая задача состоит в нахождении функции $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющей краевым условиям (14) при заданном законе изменения $g(x_1, x_2)$ в некотором диапазоне изменения κ .

Один из методов решения основан на методе разностных аппроксимаций. В методе разностных аппроксимаций применён пятиточечный шаблон для вторых производных и двухточечный — для первых производных (левая разностная производная) [10]. Введём прямоугольную сетку с шагами h_1, h_2 по координатным осям x_1, x_2 соответственно.

Введём обозначение для узловых переменных $u_{i,j} = u(ih_1, -c + jh_2)$ и $g_{i,j} = g(ih_1, -c + jh_2)$. Положим шаг аппроксимации по обеим осям одинаковым $h_1 = h_2 = h$:

$$(g_{i+h,j} - g_{i,j})(u_{i+h,j} - u_{i,j}) + g_{i,j}(u_{i+h,j} - 4u_{i,j} + u_{i-h,j} + u_{i,j+h} + u_{i,j-h}) + (g_{i,j+h} - g_{i,j})(u_{i,j+h} - u_{i,j}) + h^2 \kappa^2 u_{i,j} = 0.$$

После использования разностных аппроксимаций получим следующие граничные условия:

$$u_{N,j} = p_{0,j} h / g_{i,j} + u_{N-h,j} \quad (15)$$

$$u_{i,-c} = u_{i,-c+h}, \quad u_{i,M} = u_{i,M-h}, \quad u_{0,j} = 0$$

Далее составим систему линейных алгебраических уравнений. Учитывая граничные условия (15), которые позволяют исключить граничные узловые точки, получим

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} g_{i+h,j} (u_{i+h,j} - u_{i,j}) + g_{i,j} (u_{i-h,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j+h} + u_{i,j-h}) + g_{i,j+h} (u_{i,j+h} - u_{i,j}) + h^2 \kappa^2 u_{i,j} = 0. \quad (16)$$

Система (16) имеет решение, причём единственное. Решая систему (16), находим узловые значения функции $u_{i,j}$.

Проверим точность предложенной схемы на примере, когда задача имеет точное решение. Например, пусть нагрузка имеет вид $p_0(x_2) = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi x_2}{c}\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{c}\right)$, $g = 1$. Точное решение задачи строится методом разделения переменных и имеет следующий вид

$$u_T(x_1, x_2) = \frac{\sin(\kappa x_1)}{\kappa \cos(\kappa)} + 0,068 \operatorname{sh}(2,978 x_1) \cos\left(\frac{\pi x_2}{c}\right) + 0,002 \operatorname{sh}(6,203 x_1) \cos\left(\frac{2\pi x_2}{c}\right).$$

Проведена серия вычислительных экспериментов, которые свидетельствуют об эффективности предложенной разностной схемы.

Для иллюстрации на рисунке 1 представлены результаты решения прямой задачи, причём сплошной линией обозначено точное решение, а символом «звёздочка» решение, полученное методом разностных аппроксимаций, где $c = 1$, $h = 0,025$, $N = 40$, $M = 80$, $\kappa = 1$.

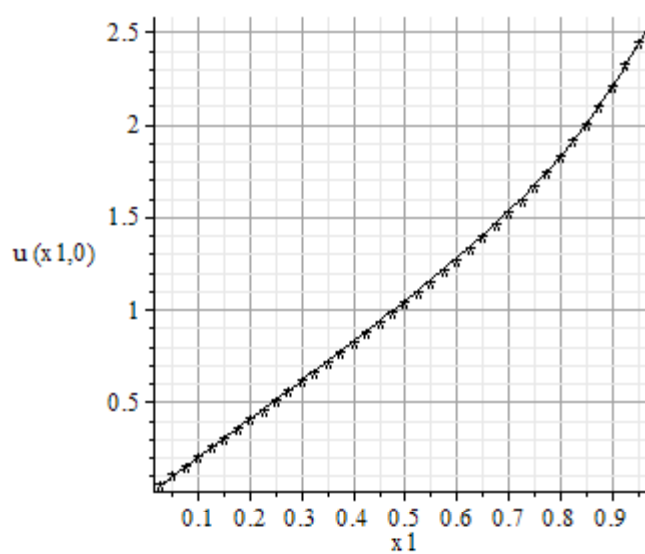


Рис. 1. Результаты решения прямой задачи

3.1.2. Исследование обратной задачи. Целью обратной задачи является восстановление неизвестной функции $g(x_1, x_2)$ по известным узловым значениям функции $u(x_1, x_2)$, полученным в результате решения прямой задачи методом разностных аппроксимаций, описанным в 3.1.1. Основной проблемой на этом пути является некорректная задача вычисления производной от функции, заданной таблично.

Для оценки точности разностного подхода введём в рассмотрение относительную погрешность:

$$v = \max_{\substack{i \in [1, N-1] \\ j \in [1, M-1]}} \left| \frac{g_{Ti,j} - g_{Pi,j}}{g_{Ti,j}} \right| \cdot 100\%,$$

где $g_{Ti,j}$ — точное решение, $g_{Pi,j}$ — полученное.

Рассмотрим случай, когда $u = x_1$, $p_0 = 2 + x_2^2$. Точное решение при $\kappa = 1$ имеет следующий вид:

$$g(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{5}{2} + x_2^2.$$

На рисунке 2 представлены результаты вычислительных экспериментов полученных при восстановлении различных функций $g(x_1, x_2)$. Здесь и далее прерывистой линией будет обозначена

восстанавливаемая функция, а точками — узловые значения, полученные при решении обратной задачи, $h_1 = h_2 = 0,04$, $c = 1$, $\kappa = 1$, $N = 25$, $M = 50$.

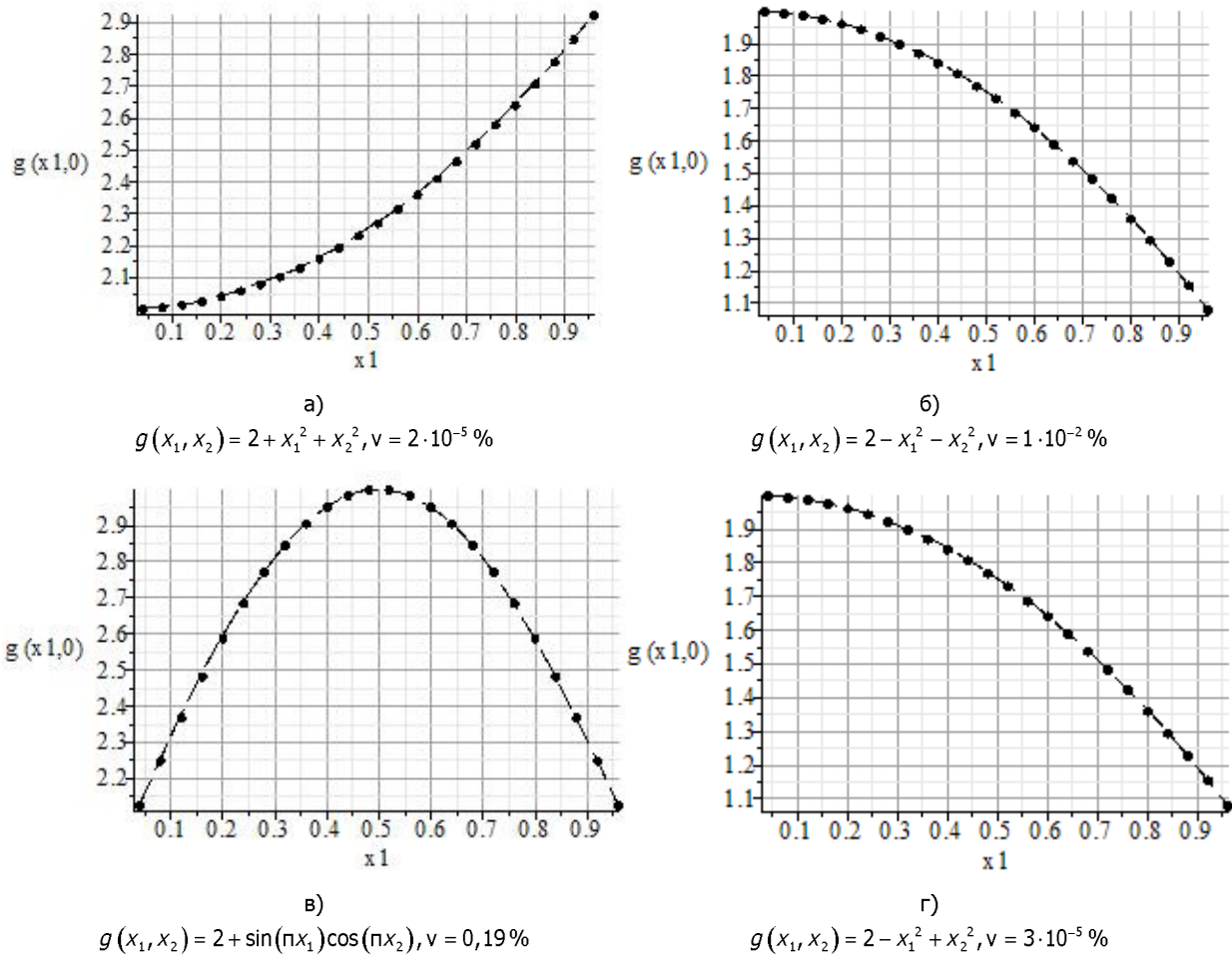
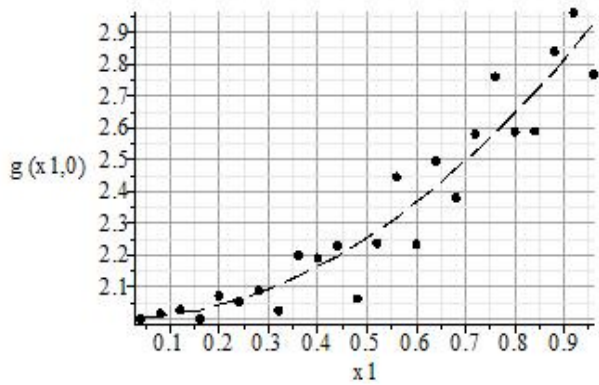


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи

Для аналогии с реальными экспериментами функция $u(x_1, x_2)$, используемая как входная информация для восстановления $g(x_1, x_2)$, была зашумлена. Вместо узловых значений $u(x_1, x_2)$ вводились узловые значения $u_\delta(x_1, x_2)$, такие, что $\max |u(x_1, x_2) - u_\delta(x_1, x_2)| \leq \delta$. Зашумление $u(x_1, x_2)$ моделировалось с помощью генератора случайных чисел путём добавления к исходным узловым значениям малой случайной функции с равномерным законом распределения.

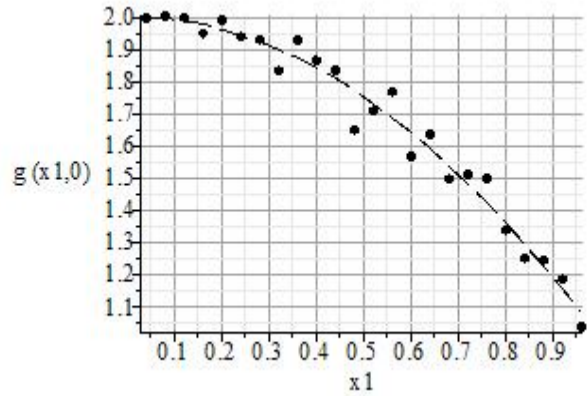
На рисунке 3 представлены результаты восстановления функции $g(x_1, x_2)$ с зашумленными входными данными $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\kappa = 1$.

При увеличении величины δ наблюдается сильный рост погрешности определяемой функции, что связано с некорректностью изучаемой задачи. Для улучшения качества реконструкции необходимо использовать регуляризующие процедуры, например сплайн-аппроксимации при вычислении производных [11]. На основе описанного метода проведены эксперименты по реконструкции различных видов неоднородностей: гладкой монотонно возрастающей функции, гладкой монотонно убывающей функции, гладкой немонотонной функции.



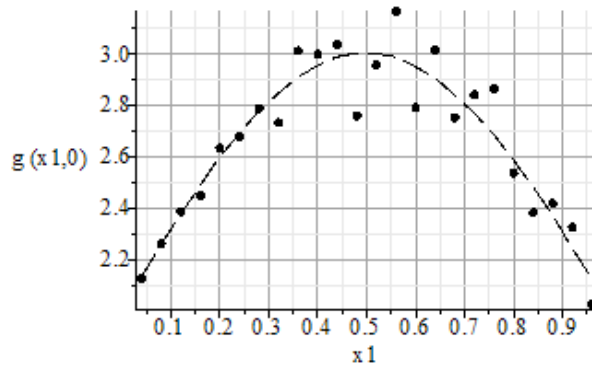
а)

$$g(x_1, x_2) = 2 + x_1^2 + x_2^2, v = 7,47\%$$



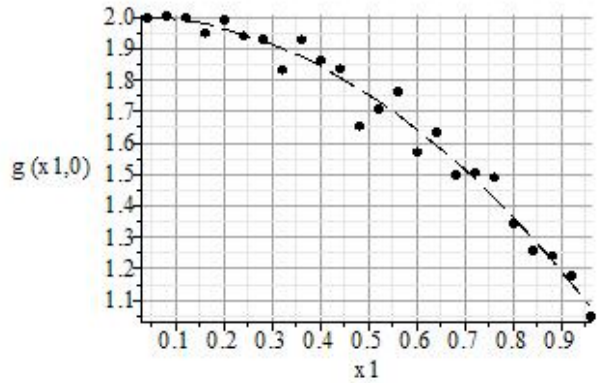
б)

$$g(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2, v = 6,72\%$$



в)

$$g(x_1, x_2) = 2 + \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2), v = 8,03\%$$



г)

$$g(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 + x_2^2, v = 6,63\%$$

Рис. 3. Результаты решения обратной задачи с зашумленными входными данными

Пример 3.2. Рассмотрим задачу решения дифференциального уравнения (6), где область S является кольцом. В полярной системе координат, считая, что $g = g(r)$, и вводя безразмерные параметры и функции

$$\kappa^2 = \frac{\rho \omega^2 b^2}{g_0}, g_0 = g(1), \tau_0 = \frac{\tau}{g_0},$$

$$r = b\xi, \xi_0 \leq \xi \leq 1, \xi_0 = \frac{a}{b}, g(\xi) = \frac{g(b\xi)}{g_0},$$

получаем уравнение

$$g'u' + g\left(u'' + \frac{1}{\xi}u'\right) + \kappa^2 u = 0, \quad (17)$$

где граничные условия принимают следующий вид:

$$u(\xi_0) = 0, \quad u'(1) = \tau_0. \quad (18)$$

3.2.1. Прямая задача. Аналогично предыдущему используем разностные аппроксимации. Применим трехточечный шаблон [10] и введём обозначения $u_i = u(\xi_0 + ih)$ и $g_i = g(\xi_0 + ih)$. Получим следующее разностное уравнение (шаг аппроксимации для простоты записи положим $h=1, \xi = \xi_0 + ih$):

$$(g_i - g_{i-1})(u_i - u_{i-1}) + g_i \left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + \frac{h}{\xi}(u_i - u_{i-1}) \right) + h^2 \kappa^2 u_i = 0,$$

граничные условия примут следующий вид:

$$u_0 = 0, \quad u_N = T_0 + u_{N-1}.$$

Составим систему разностных уравнений с учётом граничных узловых точек:

$$\sum_{j=1}^{N-1} g_j \left(u_{j+1} - u_j + \frac{h}{\xi}(u_j - u_{j-1}) \right) - g_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + h^2 \kappa^2 u_i = 0.$$

Для оценки точности предлагаемого метода сравним решение с точным. Так, положим

$$g(\xi) = 2 + 3\xi^2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае краевая задача (17) имеет точное решение, выражающееся через присоединённые функции Лежандра [12].

$$u(\xi) = 20,65 \text{LegendreP}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}, 3\xi^2 + 1\right) - 1,61 \text{LegendreQ}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}, 3\xi^2 + 1\right).$$

На рисунке 4 изображены результаты решения прямой задачи для $g = 2 + 3\xi^2$. Здесь прерывистой линией изображено точное решение, кружком — результаты, полученные методом разностных аппроксимаций (шаг аппроксимации $h = 0,001$) при $\kappa = 1$.

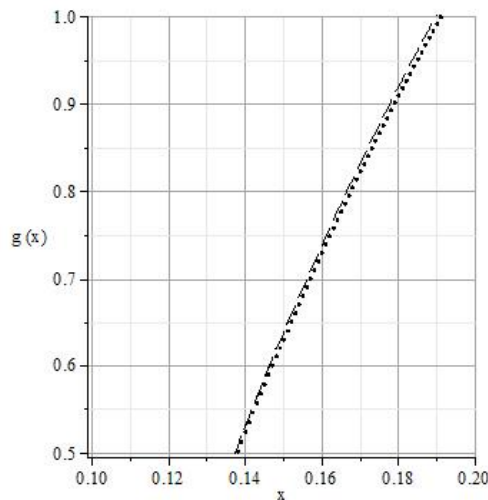


Рис. 4. Точное и полученное решение прямой задачи

3.2.2. Обратная задача. В решении обратной задачи также используем метод разностных аппроксимаций, описанный в 3.1.1, где в качестве функции u взяты узловые значения, полученные при решении прямой задачи 3.2.1.

На рисунке 5 представлен график восстановления функции $g = 2 + 3\xi^2$, а также результаты решения обратной задачи по восстановлению функции с зашумлением $\delta = 1 \cdot 10^{-5}$ (зашумление моделировалось аналогично 3.1.2), где $h = 1 \cdot 10^{-3}$. Здесь сплошной линией обозначено точное решение, кружком — результаты решения обратной задачи.

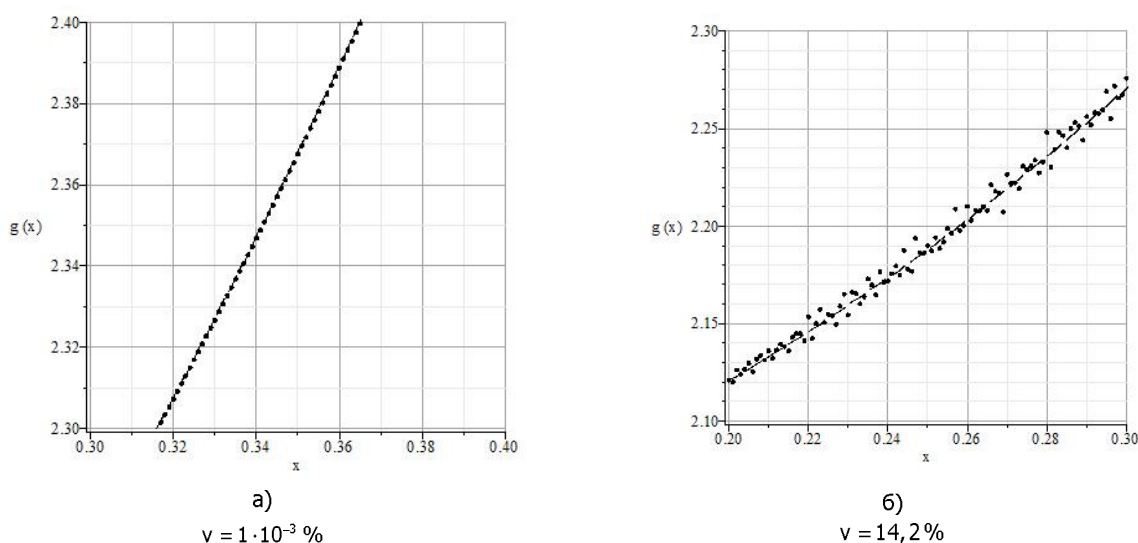


Рис. 5. Результаты обратной задачи, полученные при входных точных (а) и зашумленных (б) данных

Выводы. На основе предложенного метода проведена реконструкция переменного модуля сдвига различных типов. Полученные данные позволяют утверждать, что при точной входной информации такой подход, основанный на методе разностных аппроксимаций, эффективен. Об этом свидетельствует величина относительной погрешности вычислений. При зашумленных входных данных можно сказать следующее. Предложенная схема работает достаточно эффективно при малых степенях зашумления, но, к сожалению, при увеличении зашумления наблюдается значительный рост погрешности определяемой функции, что связано с некорректностью изучаемой задачи. Необходимо использовать регуляризующие процедуры.

Библиографический список

1. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела / А. О. Ватульян. — Москва: Физматлит, 2007. — 223 с.
2. Isakov, V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. — Berlin: Springer, 2005. — 262 p.
3. Бочарова, О. В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня / О. В. Бочарова, А. О. Ватульян // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 3. — С. 275—282.
4. Ватульян, А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела / А. О. Ватульян // Прикладная математика и механика. — 2010. — № 6. — С. 911—918.
5. Гюнтер, Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н. М. Гюнтер. — Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1934. — 359 с.
6. Ватульян, А. О. Об определении закона изменения модуля Юнга при анализе продольных колебаний стержня / А. О. Ватульян, А. Н. Боброва // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2009. — № 4. — С. 613—621.
7. Ватульян, А. О. Об идентификации переменной жёсткости при анализе поперечных колебаний балки / А. О. Ватульян, А. Ю. Бурьян, А. В. Осипов // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2010. — Т. 10, № 6. — С. 825—833.
8. Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. — Изд. 2-е, перераб. — Москва: Машиностроение, 1970. — 736 с.
9. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — Москва: Наука, 1985. — 448 с.

10. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. — Москва: Наука, 1971. — 552 с.
11. Альберг, Дж. Теория сплайнов и её приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. — Москва: Мир, 1972. — 316 с.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва: Наука, 1979. — 831 с.

Материал поступил в редакцию 20.06.2012.

References

1. Vatulyan, A.O. *Obratnyye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tverdogo tela*. [Inverse problems in deformable solid mechanics.] Moscow: Fizmatlit, 2007, 223 p. (in Russian).
2. Isakov, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2005, 262 p.
3. Bocharova, O.V., Vatulyan, A.O. *O rekonstruktsii plotnosti i modulya Yunga dlya neodnorodnogo sterzhnya*. [On density reconstruction and Young's modulus for homogeneous spindle.] *Akusticheskii zhurnal*, 2009, vol. 55, no. 3, pp. 275–282 (in Russian).
4. Vatulyan, A.O. *K teorii obratnykh koeffitsiyentnykh zadach v lineynoy mekhanike deformiruyemogo tela*. [On theory of inverse coefficient problems in linear mechanics of solids.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, no. 6, pp. 911–918 (in Russian).
5. Gyunter, N.M. *Integrirovaniye uravneniy pervogo poryadka v chastnykh proizvodnykh*. [Integration of first-order equations in partial derivatives.] Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1934, 359 p. (in Russian).
6. Vatulyan, A.O., Bobrova, A.N. *Ob opredelenii zakona izmeneniya modulya Yunga pri analize prodolnykh kolebaniy sterzhnya*. [On law definition of Young's modulus variation under analysis of longitudinal rod oscillations.] *Vestnik of Don State Tech. University*, 2009, vol. 9, no. 4, pp. 613–621 (in Russian).
7. Vatulyan, A.O., Buryan, A.Y., Osipov, A.V. *Ob identifikatsii peremennoy zhestkosti pri analize poperechnykh kolebaniy balki*. [On identification of variable rigidity under the analysis of the beam lateral oscillations.] *Vestnik of Don State Tech. University*, 2010, vol. 10, no. 6, pp. 825–833 (in Russian).
8. Filippov, A.P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem*. [Oscillations of deformable systems.] 2nd redaction. Moscow: Mashinostroyeniye, 1970, 736 p. (in Russian).
9. Fedoryuk, M.V. *Obyknoennyye differentsialnyye uravneniya*. [Ordinary differential equations.] Moscow: Nauka, 1985, 448 p. (in Russian).
10. Samarskiy, A.A. *Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem*. [Introduction to difference scheme theory.] Moscow: Nauka, 1971, 552 p. (in Russian).
11. Ahlberg, J., Nilson, E., Walsh, J. *Teoriya splaynov i yeye prilozheniya*. [The theory of splines and their applications.] Moscow: Mir, 1972, 316 p. (in Russian).
12. Abramovits, M., Stigan, I., eds. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam*. [Reference guide in special functions.] Moscow: Nauka, 1979, 831 p. (in Russian).

ON CAUCHY PROBLEM FOR FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS APPLICATIONS IN INVERSION THEORY

A. O. Vatulyan, L. S. Gukasyan
(Don State Technical University)

The inverse coefficient problem for the second-order operator in the simply connected domain with the piecewise-smooth boundary arising in the theory of the deformable system vibrations is investigated. The solution method for the inverse coefficient problem based on studying Cauchy problem for the first-order differential equation with variable coefficients is offered. Both direct and inverse problems are solved on the ground of the difference approximations method. The reconstruction of the variable shear modulus of various types, obtained at both accurate and noisy input data, is resulted.

Keywords: Cauchy problem, inverse coefficient problem, difference schemes.