УДК 539.3

Трёхмерная контактная задача о взаимодействии упругого клина с двумя штампами при учёте трения

Д. А. Пожарский, А. С. Поляков
(Донской государственный технический университет)

В квазистатической постановке изучена пространственная контактная задача для упругого клина, в одну грань которого симметрично вдавливаются два одинаковых эллиптических в плане жёстких штампа с учётом трения. Другая грань клина свободна от напряжений. Область контакта считается неизвестной. Рассмотрены случаи движения штампов перпендикулярно ребру клина. При этом штампы могут приближаться к ребру или удаляться от него. При использовании известной функции Грина для трёхмерного клина контактная задача сведена к интегральному уравнению (ИУ) относительно контактного давления. Для решения ИУ применяется метод Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и давление в этой области. Сделаны расчёты при разных коэффициентах трения, углах раствора клина и расстояниях между штампами.
Ключевые слова: *теория упругости, контактная задача, клин, трение, метод Галанова.*

Введение. Исследована задача о квазистатическом контакте с трением двух симметрично расположенных штампов на грани трёхмерного упругого клина. Другая грань клина свободна от напряжений. Штампы начинают медленно двигаться перпендикулярно ребру клина. Симметричные области контакта неизвестны. Для решения использован метод нелинейных граничных ИУ [1, 2]. Ранее исследовались аналогичные задачи для одного штампа без учёта трения [1] и с учётом трения [3]. Изучалось взаимодействие двух штампов без учёта трения [4, 5].

Постановка задачи. Рассмотрим в квазистатической постановке трёхмерную контактную задачу для упругого клина $\{r \in [0, \infty];\ \varphi \in [-\alpha, \alpha];\ z \in (-\infty, \infty)\}$ с учётом сил трения, действующих перпендикулярно ребру клина, когда грань клина $\varphi = -\alpha$ свободна от напряжений. Пусть два симметричных жёстких штампа, первоначально внедрённых в грань $\varphi = \alpha$, начинают достаточно медленно двигаться по этой грани (без перекоса) перпендикулярно ребру клина. Упругие параметры материала клина — G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Силы трения коллинеарны направлению движения (и направлены против движения). Штампы имеют форму эллиптических параболоидов, их подошвы описываются функциями

$$f_{\pm}(r,z) = \frac{(r-a)^2}{2R_1} + \frac{(z \pm h)^2}{2R_2}, \quad R_1 \ge R_2. \tag{1}$$

Задача симметрична относительно полуоси r. На штампы действуют нормальные вдавливающие силы P, имеющие плечи H_r (относительно полуоси r) и H_z (относительно ребра клина), и касательные силы T, направленные перпендикулярно ребру клина. В соответствии с законом Кулона выполняется соотношение $T = \mu P$, где μ — коэффициент трения Кулона. Условие контакта штампов и клина имеет вид:

$$u_{\varphi}(r,\alpha,z) = -\left[\delta - f_{\pm}(r,z)\right], \quad (r,z) \in \Omega_{\pm}, \tag{2}$$

где $u_{\varphi}(r, \alpha, z)$ — нормальное перемещение упругого материала клина с одной свободной от напряжений гранью при действии на другой грани нормальных и касательных напряжений, м; δ — осадка штампов, м; $\Omega_{\pm}$ — неизвестные области контакта, м^2. Смена знака μ эквивалентна изменению направления движения штампа на противоположное. Трением вдоль ребра клина пренебрегаем.

При известных величинах α, μ, G, ν, δ и заданных функциях $f_\pm(r, z)$ требуется определить нормальное контактное давление $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega_\pm$, найти области контакта $\Omega_\pm$, а также значения P, H_r и H_z.

Решение задачи. При помощи условия контакта (2) выводится ИУ относительно функции $q(r, z)$ в неизвестной области $\Omega_\pm$. Решив это уравнение и определив $q(r, z)$ и $\Omega_\pm$, можем найти величины P, H_r и H_z из условий равновесия штампа. Для вывода ИУ рассмотрим две вспомогательные краевые задачи. Граничные условия первой имеют вид:

$$\varphi = \alpha: \quad \sigma_\varphi = -Q_1\delta(r-x)\delta(z-y), \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0\ ; \tag{3}$$

$$\varphi = -\alpha: \quad \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Решение задачи (3), (4) известно [1]. Используя его, найдём

$$u_\varphi(r,\alpha,z) = -\frac{2Q_1}{\pi^3\theta}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{sh}\pi u\left[W(u)K_{iu}(\beta x) + \frac{W_1(u)\Psi_1(u) - W_2(u)\Psi_2(u)}{2\mathrm{ch}(\pi u/2)}\right]K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\,du\,d\beta, \tag{5}$$

$$\theta = G/(1-\nu),$$

$$W(u) = \frac{\mathrm{sh}4\alpha u + u\sin 4\alpha}{\mathrm{ch}4\alpha u - 2u^2\sin^2 2\alpha - 1}, \quad W_{1,2}(u) = \pm\frac{\mathrm{ch}2\alpha u \mp \cos 2\alpha}{\mathrm{sh}2\alpha u \pm u\sin 2\alpha}, \tag{6}$$

где функции $\Psi_n(u)$ $(n = 1, 2)$ удовлетворяют ИУ Фредгольма второго рода:

$$\Psi_n(\tau) = (1-2\nu)\int_0^\infty L_n(\tau,u)\left[\Psi_n(u) + \mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}K_{iu}(\beta x)\right]du \quad (0 \le \tau < \infty), \tag{7}$$

$$L_n(\tau,u) = 2\mathrm{ch}\frac{\pi\tau}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi u}{2}W_n(u)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\pi t\; g_n(t)\,dt}{(\mathrm{ch}\pi t + \mathrm{ch}\pi\tau)(\mathrm{ch}\pi t + \mathrm{ch}\pi u)}, \tag{8}$$

$$g_1(t) = \frac{\mathrm{cth}\,\alpha t \quad \sin^2 2\alpha}{\mathrm{ch}\,2\alpha t - \cos 4\alpha}, \quad g_2(t) = \frac{\mathrm{th}\alpha t \quad \sin^2 2\alpha}{\mathrm{ch}\,2\alpha t + \cos 4\alpha}\ . \tag{9}$$

С использованием известного интеграла [1] выделим в формуле (5) главную часть, соответствующую упругому полупространству:

$$u_\varphi(r,\alpha,z) = -\frac{Q_1}{2\pi\theta R} - \frac{2Q_1}{\pi^3\theta}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{sh}\pi u\; K_{iu}(\beta r)\Big[\big(W(u) - \mathrm{cth}\pi u\big)K_{iu}(\beta x) + \frac{W_1(u)\Psi_1(u) - W_2(u)\Psi_2(u)}{2\mathrm{ch}(\pi u/2)}\Big]\cos\beta(z-y)\,du\,d\beta, \tag{10}$$

$$R = \left[(r-x)^2 + (z-y)^2\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Граничные условия второй вспомогательной краевой задачи имеют вид:

$$\varphi = \alpha: \quad \sigma_\varphi = \tau_{\varphi z} = 0, \quad \tau_{r\varphi} = Q_2\delta(r-x)\delta(z-y); \tag{12}$$

$$\varphi = -\alpha: \quad \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0. \tag{13}$$

Решение задачи (12), (13) также известно [3]. Используя его, найдём

$$u_\varphi(r,\alpha,z) = \frac{2Q_2}{\pi^3\theta}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\beta(z-y)\,\mathrm{sh}\pi u K_{iu}(\beta r)\left[K_{iu}(\beta x)f_0(u) + \frac{W_1(u)\Psi_1^*(u) - W_2(u)\Psi_2^*(u)}{2\mathrm{ch}(\pi u/2)}\right]du\,d\beta + \frac{Q_2}{\pi^3\theta 2(1-\nu)}\int_0^\infty \cos\beta(z-y)\,d\beta\int_0^\infty\int_0^\infty\left[W_1(u)h_1(t) - W_2(u)h_2(t)\right]\mathrm{sh}\pi u\,\mathrm{sh}\pi t\,\frac{K_{iu}(\beta r)K_{it}(\beta x)}{\mathrm{ch}\pi t - \mathrm{ch}\pi u},dt\,du \tag{14}$$

$$f_0(u) = \frac{2u\sin^2 2\alpha}{\mathrm{ch}4\alpha u - 2u^2\sin^2 2\alpha - 1}, \quad h_{1,2}(u) = \frac{(1-2\nu)\mathrm{sh}2\alpha u \mp u\sin 2\alpha}{\mathrm{ch}2\alpha u \mp \cos 2\alpha}. \tag{15}$$

Здесь функции $\Psi_n^*(u)$ $(n=1,2)$ удовлетворяют ИУ Фредгольма второго рода

$$\Psi_n^*(\tau)=(1-2\nu)\int_0^\infty L_n(\tau,u)\left[\Psi_n^*(u)+\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\theta_n(u)\right]du \quad (0\le\tau<\infty), \tag{16}$$

$$\theta_n(u)=-\frac{f_n(u)K_{iu}(\beta x)}{2(1-\nu)(1-2\nu)}+\frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{h_n(t)K_{it}(\beta x)}{\operatorname{ch}\pi t-\operatorname{ch}\pi u}\operatorname{sh}\pi t\,dt\ , \tag{17}$$

$$f_{1,2}(u)=\frac{\pm u}{W_{1,2}(u)}\pm\frac{2(1-\nu)(1-2\nu)\sin 2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha u\mp\cos 2\alpha}\ . \tag{18}$$

Используя значение интеграла

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\cos\beta(z-y)d\beta\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\pi t\operatorname{ch}\pi u-1}{\operatorname{ch}\pi t-\operatorname{ch}\pi u}K_{iu}(\beta r)K_{it}(\beta x)dtdu=-\frac{r-x}{R^2}, \tag{19}$$

выделим в (14) главную часть, соответствующую упругому полупространству:

$$\begin{aligned}u_\varphi(r,\alpha,z)=&-\frac{Q_2(1-2\nu)}{4(1-\nu)\pi\theta}\cdot\frac{r-x}{R^2}+\frac{2Q_2}{\pi^3\theta}\int_0^\infty\int_0^\infty\cos\beta(z-y)\operatorname{sh}\pi u\ K_{iu}(\beta r)\times\\&\times\left[K_{iu}(\beta x)f_0(u)+\frac{W_1(u)\Psi_1^*(u)-W_2(u)\Psi_2^*(u)}{2\operatorname{ch}(\pi u/2)}\right]dud\beta+\\&+\frac{Q_2}{\pi^3\theta 2(1-\nu)}\int_0^\infty\cos\beta(z-y)d\beta\int_0^\infty\int_0^\infty\Big\{\big[W_1(u)h_1(t)-W_2(u)h_2(t)\big]\operatorname{sh}\pi u\operatorname{sh}\pi t-\\&-2(1-2\nu)(\operatorname{ch}\pi u\operatorname{ch}\pi t-1)\Big\}\frac{K_{iu}(\beta r)K_{it}(\beta x)}{\operatorname{ch}\pi t-\operatorname{ch}\pi u}dtdu.\end{aligned} \tag{20}$$

В соответствии с принципом суперпозиции заменим в (5) силу Q_1 на искомое давление $q(x, y)$, а силу Q_2 в (20) — на распределённые силы трения $\tau(x, y) = \mu q(x, y)$. Проинтегрировав далее правые части полученных соотношений по области контакта $\Omega_+\cup\Omega_-$ по переменным x, y и сложив их, получим при помощи условия контакта следующее ИУ:

$$\iint_{\Omega_+\cup\Omega_-}q(x,y)L_-(x,y,r,z)dxdy=d_\pm(r,z),\qquad (r,z)\in\Omega_+\cup\Omega_-, \tag{21}$$

где

$$L_\pm(x,y,r,z)=L_1^\pm(x,y,r,z)+\mu L_2^\pm(x,y,r,z),\ \ d_\pm(r,z)=2\pi\theta\left[\delta-f_\pm(r,z)\right], \tag{22}$$

$$\begin{aligned}L_1^\pm(x,y,r,z)=&\frac{1}{R}+\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\operatorname{sh}\pi u K_{iu}(\beta r)\Big[\big(W(u)-\operatorname{cth}\pi u\big)K_{iu}(\beta x)+\\&+\frac{W_1(u)\Psi_1(u)-W_2(u)\Psi_2(u)}{2\operatorname{ch}(\pi u/2)}\Big]\cos\beta(z\pm y)dud\beta,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}L_2^\pm(x,y,r,z)=&\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{r-x}{R^2}-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\cos\beta(z\pm y)\operatorname{sh}\pi u K_{iu}(\beta r)\times\\&\times\left[K_{iu}(\beta x)f_0(u)+\frac{W_1(u)\Psi_1^*(u)-W_2(u)\Psi_2^*(u)}{2\operatorname{ch}(\pi u/2)}\right]dud\beta-\\&-\frac{1}{\pi^2(1-\nu)}\int_0^\infty\cos\beta(z\pm y)d\beta\int_0^\infty\int_0^\infty\Big\{\big[W_1(u)h_1(t)-W_2(u)h_2(t)\big]\operatorname{sh}\pi u\operatorname{sh}\pi t-\\&-2(1-2\nu)(\operatorname{ch}\pi u\operatorname{ch}\pi t-1)\Big\}\frac{K_{iu}(\beta r)K_{it}(\beta x)}{\operatorname{ch}\pi t-\operatorname{ch}\pi u}dtdu.\end{aligned} \tag{24}$$

В силу симметрии ИУ (21) сводится к уравнению

$$\iint_{\Omega_-} q(x,y)\left[L_-(x,y,r,z)+L_+(x,y,r,z)\right]dxdy = d_\pm(r,z), \quad (r,z)\in\Omega_-. \tag{25}$$

Введём новые обозначения:

$$z_* = z-h, \quad y_* = y-h, \quad q_*(r,z_*) = q(r,z), \quad \Omega \leftrightarrow \Omega_-. \tag{26}$$

Перепишем уравнение (25) в форме

$$\iint_{\Omega} q_*(x,y_*)K(x,y_*,r,z_*)dxdy_* = d(r,z_*), \quad (r,z_*)\in\Omega\ , \tag{27}$$

$$d(r,z) = 2\pi\theta\left(\delta - \frac{(r-a)^2}{2R_1} - \frac{z^2}{2R_2}\right), \tag{28}$$

$$K(x,y,r,z) = L_-(x,y,r,z) + L_+(x,y+h,r,z+h). \tag{29}$$

Звёздочки далее опускаем. Для решения ИУ (27) при условии $q(r,z) = 0$, $(r,z) \in \Omega$ используем метод нелинейных граничных ИУ типа Гаммерштейна [1, 2], позволяющий одновременно определить область контакта, контактное давление и нормальное перемещение упругого материала вне области контакта.

Введём обозначения $M=(r,z)$, $N=(x,y)$ и предположим, что область контакта целиком содержится в прямоугольнике $S=\{|r-a|\le b,\ \ |z|\le c\}$, $a>b\ge c$, который не выходит на ребро клина.

Уравнение (27) дополним условием неотрицательности контактного давления в области контакта, а также условиями отсутствия контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S\setminus\Omega$, записав их все в виде системы:

$$\begin{cases} \int_S K(N,M)q(N)dN = d(M), & q(M)\ge 0, \quad M\in\Omega, \\ \int_S K(N,M)q(N)dN > d(M), & q(M) = 0, \quad M\in S\setminus\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Введём нелинейные операторы

$$p^+(M) = \sup\{p(M),0\}, \qquad p^-(M) = \inf\{p(M),0\}. \tag{31}$$

Идея метода заключается в представлении искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M) \tag{32}$$

с целью автоматического удовлетворения интегрального неравенства (33) в ходе решения нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M\in\Omega), \qquad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d\,, \tag{33}$$

где $p = p(M)$, $p^\pm = p^\pm(M)$, $d = d(M)$,

$$Kp^+ = \int_S K(N,M)\,p^+(N)\,dN. \tag{34}$$

Эквивалентность системы (30) и уравнения (33) устанавливается в теореме, аналогичной известным теоремам [1, 2]. При численном решении уравнения (33) применим модифицированный метод Ньютона [1].

Введём следующие безразмерные обозначения:

$$r-a = r'b, \quad x-a = x'b, \quad z = z'b, \quad y = y'b, \quad \delta = \delta' b, \tag{35}$$

$$A = b/(2R_1), \quad B = b/(2R_2), \quad \lambda = a/b, \quad \kappa = h/b, \quad \varepsilon = c/b, \tag{36}$$

$$q'(r',z') = q(r,z)/(2\pi\theta), \quad P' = P/(2\pi\theta b^2), \quad S'\to S, \quad \Omega'\to\Omega. \tag{37}$$

Штрихи далее опускаем. Параметр λ характеризует близость областей контакта к ребру клина, параметр κ характеризует удалённость штампов друг от друга. В расчётах полагали $\delta = A = B = \varepsilon = 1$, $\nu = 0{,}5$. В таблице даны значения вдавливающей силы P для разных углов клина 2α при изменяющихся значениях λ, κ и μ. При движении штампа к ребру клина ($\mu<0$) сила меньше, чем для случая удаления от ребра ($\mu>0$). С уменьшением значения λ или угла клина величина P падает. Эти факты объясняются приближением областей контакта к грани, где отсутствуют напряжения. Известно [3], что вдали от ребра клина величина $P(\delta)$ практически не зависит от коэффициента трения μ. Вблизи ребра клина это уже не так. Чем больше осадка, тем больше сила. Бóльшая вдавливающая сила требуется при удалении штампов друг от друга (параметр κ возрастает). Значение $\kappa = \infty$ соответствует случаю одного штампа. Взаимовлияние штампов существенно проявляется при уменьшении параметра κ (36).

Значения вдавливающей силы *P*

κ / μ	1,2	2	3	∞	1,2	2	3	∞
	$2\alpha = 60°$; $\lambda = 1{,}2$				$2\alpha = 60°$; $\lambda = 2$			
0,2	0,071	0,079	0,083	0,102	0,092	0,098	0,105	0,134
0	0,064	0,070	0,075	0,092	0,082	0,089	0,096	0,123
−0,2	0,058	0,065	0,069	0,084	0,076	0,082	0,088	0,113
$2\alpha = 90°$; $\lambda = 1{,}2$					$2\alpha = 90°$; $\lambda = 2$			
0,2	0,172	0,185	0,195	0,221	0,193	0,206	0,215	0,244
0	0,157	0,170	0,180	0,205	0,179	0,192	0,202	0,233
−0,2	0,145	0,157	0,166	0,191	0,168	0,180	0,190	0,222

Заключение. Решена новая пространственная контактная задача с неизвестной областью контакта для упругого клина о взаимодействии двух одинаковых эллиптических в плане штампов с учётом трения при одной свободной от напряжения грани клина. При использовании метода нелинейных граничных ИУ с учётом симметрии задач определены области контакта, давления в этих областях, вдавливающие силы. Сделаны расчёты при разных значениях угла раствора клина и коэффициента трения.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00065, 12-01-00991.

Библиографический список

1. Александров, В. М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. — Москва: Факториал, 1998. — 288 с.

2. Галанов, Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б. А. Галанов // Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 5. — С. 827—835.

3. Пожарский, Д. А. О трёхмерной контактной задаче для упругого клина при учёте сил трения / Д. А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2000. — Т. 64, вып. 1.— С. 151—159.

4. Молчанов, А. А. Взаимодействие штампов на грани упругого клина / А. А. Молчанов, Д. А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, вып. 4. — С. 681—690.

5. Соболь, Б. В. Пространственная задача о контакте системы штампов с упругим слоем / Б. В. Соболь, И. М. Пешхоев // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2011. — № 1. — С. 69—76.

Материал поступил в редакцию 31.08.2012.

References

1. Alexandrov, V.M., Pozharskiy, D.A. *Neklassicheskiye prostranstvennyye zadachi mekhaniki kontaktnykh vzaimodeystviy uprugikh tel.* [Nonclassical spatial problems of elastic bodies contact interaction mechanics.] Moscow: Faktorial, 1998, 288 p. (in Russian).
2. Galanov, B.A. *Metod granichnykh uravneniy tipa Gammershteyna dlya kontaktnykh zadach teorii uprugosti v sluchaye neizvestnykh oblastey kontakta*. [Boundary equations method of Hammerstein type for elasticity theory contact problems in case of unknown contact domains.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1985, vol. 49, iss. 5, pp. 827–835 (in Russian).
3. Pozharskiy, D.A. *O trekhmernoy kontaktnoy zadache dlya uprugogo klina pri uchete sil treniya.* [On 3D contact problem for flexible wedge under friction.] *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 2000, vol. 64, iss. 1, pp. 151–159 (in Russian).
4. Molchanov, A.A., Pozharskiy, D.A. *Vzaimodeystviye shtampov na grani uprugogo klina.* [Punches interaction on the edge of flexible wedge.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, iss. 4, pp. 681–690 (in Russian).
5. Sobol, B.V., Peshkhoyev, I.M. *Prostranstvennaya zadacha o kontakte sistemy shtampov s uprugim sloyem.* [Spatial problem on contact between punch system and elastic layer.] *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES,* 2011, no. 1, pp. 69–76 (in Russian).

3D CONTACT PROBLEM ON INTERACTION BETWEEN FLEXIBLE WEDGE AND TWO PUNCHES UNDER FRICTION

D. A. Pozharskiy, A. S. Polyakov
(Don State Technical University)

The spatial contact problem for the flexible wedge is investigated in the quasi-static formulation when two identical elliptic rigid punches are symmetrically impressed into one face of the wedge under friction. The other wedge face is stress-free. The contact domain is accepted unknown. The motion of the punches perpendicular to the edge of the wedge is considered. In this case the punches can move either towards the edge or from the edge. Using the known Green function for the three-dimensional wedge, the contact problem is reduced to the integral equation with respect to the contact pressure. Galanov's method is used for solving the integral equation which permits to determine the contact domain and the contact pressure simultaneously. The numerical analysis is made for different values of the friction coefficient, wedge angle, and the distance between the punches.
Keywords: *theory of elasticity, contact problem, wedge, friction, Galanov's method.*