

УДК 539.376

Модели теории ползучести бетона и их конечноэлементная реализация**П. П. Гайджуров**

(Донской государственный технический университет),

Э. Р. Исхакова

(Южно-Российский государственный технический университет)

Разработан конечноэлементный метод решения плоской задачи теории ползучести бетона с учётом старения. В качестве наследственных функций второго рода использованы выражения, базирующиеся на формулах для меры ползучести, предложенных Н. Х. Арутюняном и С. В. Александровским. С помощью символьного процессора получены выражения для ядер релаксации бетона, удобные для программирования. Разработаны устойчивый шаговый алгоритм и соответствующая программа, позволяющие выполнять расчёты при переменном нагружении с учётом быстро набегающей ползучести в начальный момент нагружения и частичной обратимости деформаций ползучести при разгрузке. На основе имеющихся экспериментальных данных по ползучести центрально сжатых призматических бетонных стержней и изгибаемых железобетонных балок осуществлена верификация разработанного математического и программного обеспечения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, плоская задача, наследственная теория старения, численное интегрирование.

Введение. В настоящее время накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал по ползучести бетона [1, 2, 3]. Вместе с тем известные подходы к расчёту бетонных и железобетонных конструкций с учётом ползучести ориентированы главным образом на решение задач с относительно простой геометрией изделия [1, 3, 4]. В работе [5] приведён конечноэлементный алгоритм решения задачи теории упругой наследственности. Однако данная теория постулирует полную обратимость деформаций ползучести, что ограничивает её применение рамками только «старого» бетона. Поэтому актуальной является проблема разработки более общего конечноэлементного алгоритма, реализующего модель теории наследственного старения, позволяющую моделировать процесс непрерывного бетонирования, а также рассчитывать потерю предварительного натяжения арматуры, обусловленную ползучестью стареющего бетона.

Наследственные функции второго рода для бетона. Физические соотношения для плоской задачи наследственной теории старения запишем в матрично-операторной форме:

$$\{\sigma\} = [E(t)](1 - R)\{\varepsilon\},$$

где векторы-столбцы напряжений и деформаций $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}\}^T$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12}\}^T$ (T —

символ транспонирования); $[E(t)]$ — матрица упругости материала; $R\varepsilon_{ij} = \int_t^T R(t, \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau$,

$R(t, \tau)$ — ядро релаксации (наследственная функция II рода). Здесь введены обозначения: τ — «возраст» материала в момент приложения нагрузки; t — временная координата, отсчитываемая от τ до некоторого текущего момента времени наблюдения. Параметры t и τ измеряются в сутках.

Вид функции $R(t, \tau)$ базируется на принятой механико-математической модели ползучести бетона и применяемой функции меры ползучести $\tilde{N}(t, \tau)$. В рамках теории старения выражение для ядра релаксации $R(t, \tau)$ имеет вид [1, 4]:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[E(t) e^{-\int_{\tau}^t E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, \tau_1) d\tau} \right], \quad (1)$$

где функция меры ползучести, предложенная Н. Х. Арутюняном [2],

$$\tilde{N}(t, \tau) = \left(C_1 + \frac{A_1}{\tau} \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right];$$

модуль упругости материала $E(t) = E_0 (1 - e^{-\beta t})$; C_1 , A_1 , γ , E_0 , β — константы, определяемые из опытов на ползучесть при одноосной деформации. В формуле (1) величину τ_1 можно считать равной моменту времени распалубки. Достоинством представления наследственной функции в форме (1) является то, что после обработки этого выражения в среде символьного процессора компьютерной математики Maple получаем следующую легко программируемую формулу:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \Big\{ & E'(\tau) e^{X_1 X_2 [u_1(t)(\beta + \gamma) - \omega_1(t, \tau)\gamma - u_1(\tau)(\beta + \gamma) + \omega_2(t, \tau)\gamma] \omega_3(t, \tau)} - \\ & - E(\tau) [X_3 X_2 \omega_3(t, \tau) [\omega_1(t, \tau)\beta\gamma - u_1(\tau)\gamma(\beta + \gamma) + \omega_2(t, \tau)\gamma^2] + \\ & + X_2 X_3 \omega_3(t, \tau) [u_1(t)(\beta + \gamma) - \omega_1(t, \tau)\gamma - u_1(\tau)(\beta + \gamma) + \omega_2(t, \tau)\gamma]] \times \\ & \times X_1 X_2 \omega_3(t, \tau) [u_1(t)(\beta + \gamma) - \omega_1(t, \tau)\gamma - u_1(\tau)(\beta + \gamma) + \omega_2(t, \tau)\gamma] \Big\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} E'(\tau) &= E_0 \beta e^{-\beta \tau}; \quad X_1 = e^{-\frac{1}{\tau_1(\beta + \gamma)}}; \quad X_2 = E_0 (\tau_1 C_1 + A_1); \quad X_3 = \frac{1}{\tau_1 (\beta + \gamma)}; \\ u_1(x) &= e^{\gamma(x + \tau_1)}; \quad \omega_1(t, \tau) = e^{\gamma(t + \tau_1) - \beta \tau}; \quad \omega_2(t, \tau) = e^{\gamma(\tau + \tau_1) - \beta t}; \quad \omega_3(t, \tau) = e^{-\gamma(\tau + t)}. \end{aligned}$$

Графики функции $R(t, \tau)$ для бетона, построенные с помощью формулы (2), для различных значений параметра τ приведены на рис. 1. На этом рисунке линиям 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствует «возраст» бетона (в сутках) 2, 8, 14, 20, 30, 40. Значения констант принимались равными [1]: $\tilde{N}_1 = 9,9388 \cdot 10^{-11} \text{ (Н/м}^2\text{)}^{-1}$; $A_1 = 4,7095 \cdot 10^{-10} \text{ сут./ (Н/м}^2\text{)}$; $E_0 = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\gamma = 0,03 \text{ сут.}^{-1}$; $\beta = 0,206 \text{ сут.}^{-1}$

Всесторонний анализ недостатков теории старения, главным из которых является полное отрицание обратимости деформаций ползучести, представлен в работе [1]. Следующим шагом развития теории ползучести бетона является модель упруго-ползучего тела, или теория наследственного старения. Суть теории наследственного старения состоит в предположении о частичной обратимости деформаций ползучести при условии выполнения принципа наложения воздействий. Наиболее точно экспериментальные данные о ползучести бетона описываются с помощью выражения для меры ползучести, предложенного С. В. Александровским [1]:

$$C(t, \tau) = \psi(\tau) - \psi(t) \left(\frac{e^{\gamma \tau} - A_2}{e^{\gamma t} - A_2} \right) + \Delta(\tau) [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}]. \quad (3)$$

Здесь обозначено: $\psi(\tau) = C_3 + \frac{A_3}{\tau}$; $\Delta(\tau) = C_1 - C_3 + \frac{A_1 - A_3}{\tau}$. Величины A_1 , A_2 , A_3 , C_1 , C_3 , γ , α — опытные константы.

Выражение для наследственной функции $R(t, \tau)$, полученное на основе формулы (3), имеет вид [1]:

$$R(t, \tau) = -\frac{1}{E(t)} \left\{ K^2(\tau) F'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) - K'(\tau) - \left[K(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) e^{-\eta(\tau)} \right]' \times \right. \\ \left. \times \int_{\tau}^t K(\tau) F'(\tau) e^{\eta(\tau)} d\tau + B_3(t) e^{-\mu(t)(t-\tau)} \right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } F(\tau) = \frac{\Psi(\tau)}{e^{\gamma\tau} - A_2}; \quad K(\tau) = \frac{E(\tau)}{1 + \Delta(\tau)E(\tau)}; \quad \eta(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau) F'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) d\tau;$$

$$B_3(t) = F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) [E^2(t) - K^2(t)] - \alpha E^2(t) + K'(t) - E'(t);$$

$$\mu(t) = \frac{1}{B_3(t)} \left\{ B_3'(t) + \gamma e^{\gamma t} F'(t) [E^2(t) - K^2(t)] - F'^2(t) (e^{\gamma t} - A_2)^2 [E^3(t) - K^3(t)] - \right. \\ \left. - \alpha E(t) [E(t) \Delta(t)]' - \alpha^2 E^3(t) \frac{\Delta(t)}{K(t)} + \frac{1}{2} F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) [E^2(t) - K^2(t)]' + \right. \\ \left. + 2\alpha E^3(t) \Delta(t) F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \right\}.$$

После обработки выражения (4) символьным процессором системы Maple и группировки членов получим следующую формулу для наследственной функции $R(t, \tau)$:

$$R(t, \tau) = -\frac{1}{E(t)} \left\{ K(\tau)^2 F'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) - K'(\tau) - \left[\frac{E'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) e^{-\eta}}{1 + \Delta(\tau)E(\tau)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[E(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) e^{-\eta(\tau)} \left[\Delta(\tau) E'(\tau) - \frac{(A_1 - A_3) E(\tau)}{\tau^2} \right] \right] (1 + \Delta(\tau)E(\tau))^{-2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{E(\tau) \gamma e^{\gamma\tau} e^{-\eta}}{1 + \Delta(\tau)E(\tau)} \right] u(\tau) B_3(t) e^{-\mu(t)(t-\tau)} \right\}, \quad (5)$$

$$\text{где } u(\tau) = \int_{\tau}^t K(\tau) F'(\tau) e^{\eta(\tau)} d\tau;$$

$$\mu(t) = B_3(t)^{-1} \left\{ \left[\frac{2A_3}{t^3 (e^{\gamma t} - A_2)} + \frac{2A_3 \gamma e^{\gamma t}}{t^2 (e^{\gamma t} - A_2)^2} - \frac{\vartheta_3(t) \gamma^2 e^{\gamma t}}{(e^{\gamma t} - A_2)^2} + \frac{2\vartheta_3(t) \gamma^2 e^{2\gamma t}}{(e^{\gamma t} - A_2)^3} \right] (e^{\gamma t} - A_2) \times \right. \\ \times \left[E^2(t) - \frac{E^2(t)}{\vartheta_1(t)} \right] + F'(t) \gamma e^{\gamma t} \left[E^2(t) - \frac{E^2(t)}{\vartheta_1(t)} \right] + F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \left[2E(t) E'(t) - 2E(t) \frac{E'(t)}{\vartheta_1^2(t)} + \right. \\ \left. + 2E^2(t) \frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1^3(t)} \right] - 2\alpha \Delta(t) E(t) E'(t) + \alpha E^2(t) \frac{(A_1 - A_3)}{t^2} - E_0 \beta^2 \frac{e^{-\beta t}}{\vartheta_1(t)} - 2E'(t) \frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1^2(t)} - \\ - \frac{E(t)}{\vartheta_1^2(t)} \left[2(A_1 - A_3) \frac{E(t)}{t^2} - 2(A_1 - A_3) \frac{E'(t)}{t^2} - \Delta(t) \beta^2 e^{-\beta t} \right] + 2E(t) \frac{\vartheta_2^2(t)}{\vartheta_1^3(t)} + E_0 \beta^2 e^{-\beta t} + \\ + \gamma e^{\gamma t} F'(t) [E^2(t) - K^2(t)] - F'^2(t) (e^{\gamma t} - A_2)^2 [E^3(t) - K^3(t)] - \\ - \alpha E(t) \left[\Delta(t) E(t) - (A_1 - A_3) \frac{E(t)}{t^2} \right] - \alpha^2 E^3(t) \frac{\Delta(t)}{K(t)} + \frac{1}{2} F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \times \\ \times 2 \left[E(t) E'(t) - E(t) \frac{E'(t)}{\vartheta_1^2(t)} + E^2(t) \frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1^3(t)} \right] + 2\alpha E^3(t) \Delta(t) F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \left. \right\};$$

$$\vartheta_1(\tau) = 1 + \Delta(\tau)E(\tau); \quad \vartheta_2(\tau) = \Delta(\tau)E'(\tau) - \frac{(A_1 - A_3)E(\tau)}{\tau^2}; \quad \vartheta_3(\tau) = C_3 + \frac{A_3}{\tau}.$$

Интегралы $\eta(\tau)$ и $u(\tau)$, входящие в выражение (5), вычисляем численно с помощью формулы трапеций.

Графики функции $R(t, \tau)$ для бетона различного «возраста», построенные на базе формулы (5), показаны на рис. 2. Здесь номера линий соответствуют значениям параметра τ (в сутках): 1 — $\tau = 2$; 2 — $\tau = 4$; 3 — $\tau = 6$; 4 — $\tau = 10$; 5 — $\tau = 20$; 6 — $\tau = 30$. Значения констант принимались равными [1]: $\tilde{N}_1 = 9,9388 \cdot 10^{-11} \text{ (Н/м}^2\text{)}^{-1}$; $\tilde{N}_3 = 7,7064 \cdot 10^{-11} \text{ (Н/м}^2\text{)}^{-1}$; $A_1 = 4,7095 \cdot 10^{-10} \text{ сут./ (Н/м}^2\text{)}$; $A_2 = 1$; $A_3 = 3,4822 \cdot 10^{-10} \text{ сут./ (Н/м}^2\text{)}$; $E_0 = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\alpha = 6 \text{ сут.}^{-1}$; $\gamma = 0,03 \text{ сут.}^{-1}$; $\beta = 0,206 \text{ сут.}^{-1}$

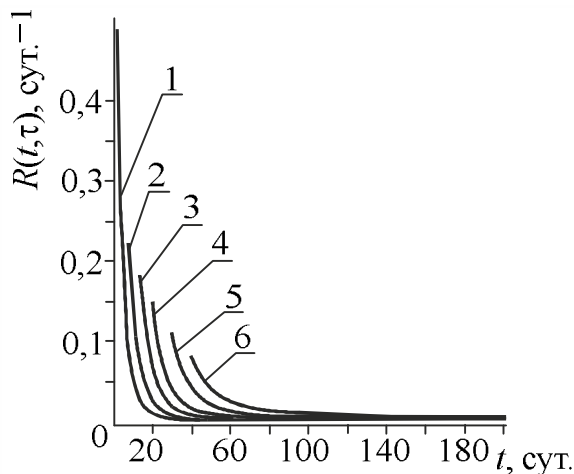


Рис. 1. Графики функции $R(t, \tau)$ в теории старения

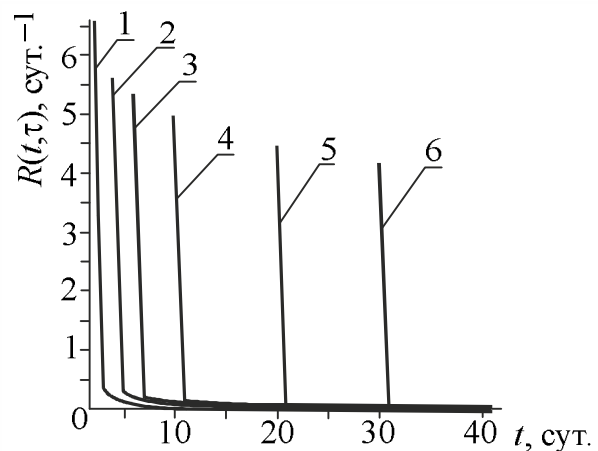


Рис. 2. Графики функции $R(t, \tau)$ в теории наследственного старения

Отличительная особенность графиков рис. 2 от графиков рис. 1 — резкое убывание функции $R(t, \tau)$ в момент времени $t = \tau$, что с физической точки зрения отражает наблюдаемое на практике явление «мгновенной» ползучести, условно причисляемое к упруго-мгновенной деформации в момент загрузки.

Для описания ползучести «старого» бетона можно использовать теорию упругой наследственности с ядром релаксации типа [1]:

$$R(t, \tau) = A_1 e^{-\rho_1(t-\tau)} + A_2 e^{-\rho_2(t-\tau)},$$

где $A_1 = \frac{E_0}{\rho_1 - \rho_2} \{ (\gamma \psi_0 + \alpha \Delta_0) [E_0 (\gamma \psi + \alpha \Delta_0) - \rho_2] + \alpha^2 \Delta_0 + \gamma^2 \psi_0 \}$; $A_2 = E_0 (\gamma \psi_0 + \alpha \Delta_0) - A_1$;

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \alpha + \gamma + E_0 (\gamma \psi_0 + \alpha \Delta_0) \pm \sqrt{E_0^2 (\gamma \psi_0 + \alpha \Delta_0)^2 + (\alpha - \gamma)^2 - 2E_0 (\gamma \psi_0 + \alpha \Delta_0) (\alpha - \gamma)} \right\};$$

$$\psi_0 = \tilde{N}_3; \quad \Delta_0 = C_1 - C_3.$$

Конечноэлементная реализация плоской задачи теории ползучести. Линейно-упругие перемещения в глобальной Декартовой системе осей $\{Z_1, Z_2\}$ в произвольной точке конечного элемента (КЭ) задаём с помощью вектора-столбца перемещений $\{u\} = \{u_1, u_2\}^T$. Введём векторы-

столбцы наследственных деформаций $\{\tilde{\varepsilon}\}$, перемещений $\{\tilde{u}\}$ и узловых перемещений $\{\tilde{w}\}$: $\{\tilde{\varepsilon}\} = (1 - \mathbf{R})\{\varepsilon\}$, $\{\tilde{u}\} = (1 - \mathbf{R})\{u\}$, $\{\tilde{w}\} = (1 - \mathbf{R})\{w\}$.

Векторы-столбцы $\{\tilde{\varepsilon}\}$ и $\{\tilde{u}\}$ имеют структуру, аналогичную $\{\varepsilon\}$ и $\{u\}$. Размерность вектора-столбца $\{w\}$ определяется числом узлов КЭ. Установим связь между $\{\tilde{u}\}$ и $\{w\}$ в виде

$$\{\tilde{u}\} = (1 - \mathbf{R})[F]\{w\},$$

где $[F]$ — матрица, образованная из функций формы КЭ. Отметим, что для плоского восьмиузлового КЭ матрица $[F]$ имеет размерность 2×8 .

В соответствии с принципом возможных перемещений получим операторно-матричное уравнение

$$[k](1 - \mathbf{R})\{w\} - \{r\} = 0, \quad (6)$$

где матрица жёсткости $[k]$ и вектор-столбец узловых сил $\{r\}$ КЭ

$$[k] = \int_{V_e} [D]^T [E] [D] dv, \quad \{r\} = \int_{V_e} [F]^T \{q\} dv + \int_{S_e} [F]^T \{p\} ds;$$

$\{q\} = \{q_1 q_2\}^T$, $\{p\} = \{p_1 p_2\}^T$ — векторы-столбцы объёмной и распределённой нагрузки, задаваемой в глобальном базисе; V_e — объём, занимаемый КЭ; S_e — поверхность КЭ, к которой приложена распределённая нагрузка. Матрица $[D]$ для восьмиугольного КЭ имеет размерность 3×16 . Выражение $[D]$ для плоского полилинейного КЭ получено в работе [6].

Для вычисления интеграла $\mathbf{R}\{w\} = \int_{\tau}^t \mathbf{R}(t, \tau)\{w(\tau)\} d\tau$ воспользуемся численным методом, основанным на формуле трапеций. Разобьём рассматриваемый временной интервал $[\tau, t]$ на m равноотстоящих временных шагов Δt так, чтобы $t = m\Delta t$. Тогда выражение (6) можно записать в форме

$$\mathbf{R}\{w_m\} \approx \mathbf{R}(t, t)\{w_m\}\Delta t / 2 + \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{R}(t, (m-j)\Delta t)\{w_j\}\Delta t + \mathbf{R}(t, \tau)\{w_1\}\Delta t / 2 - \{r\} = 0$$

или в компактном виде

$$[k_m]\{w_m\} = \{r\} + [k_1]\{w_1\} + [k_j]\{w_j\} \Big|_{j=1, m-1}, \quad (7)$$

где $[k_m] = [k](1 - \mathbf{R}(t, t)\Delta t / 2)$; $[k_1] = [k](1 - \mathbf{R}(t, \tau)\Delta t / 2)$; $[k_j] = [k](1 - \mathbf{R}(t, (m-j)\Delta t)\Delta t)$.

В выражении (7) вектор-столбец $\{w_1\}$ соответствует упруго-мгновенному решению задачи. Рассмотренная шаговая конечноэлементная процедура реализована на языке FORTRAN. В расчётных моделях полилинейные КЭ можно ансамблировать с плоскими стержневыми КЭ балочного типа.

Числовые примеры. Мгновенное нагружение и последующая ступенчатая разгрузка призматического бетонного образца с размерами $6 \times 6 \times 30$ см. Характеристики материала были приведены ранее. «Возраст» бетона в момент нагружения образца — $\tau = 28$ сут., момент времени распалубки — $\tau_1 = 2$ сут. Учитывая симметрию задачи, рассмотрим $1/2$ часть образца и применим равномерную конечноэлементную разбивку 2×8 (2 КЭ по ширине и 8 КЭ по высоте). Шаг интегрирования Δt принимаем равным 1 сут. График полного перемещения нагруженного торца образца на интервале наблюдения $t = 28 \dots 200$ сут. приведён на рис. 3.

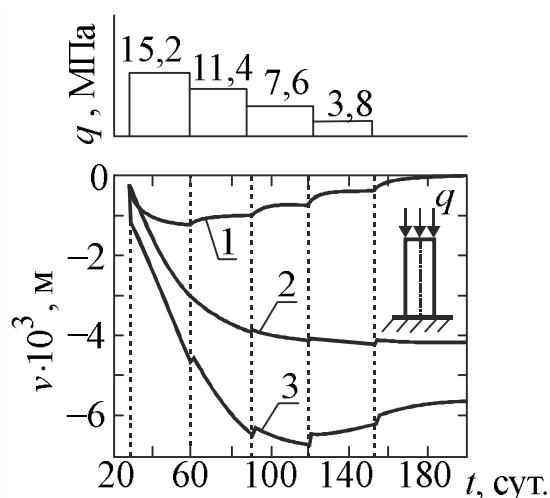


Рис. 3. Ступенчато-убывающий закон нагружения призматического образца:
1 — теория упругой наследственности; 2 — теория старения; 3 — теория наследственного старения

Как видно из представленных данных, для модели упругой наследственности (линия 1) выполняется постулат о полной обратимости деформаций ползучести. Для модели упруго-ползучего тела (линия 3) характерна частичная обратимость неупругих деформаций ползучести, что соответствует результатам аналогичного натурного эксперимента А. Д. Росса [1, 3].

Ползучесть однопролётной железобетонной балки, мгновенно нагруженной сосредоточенной силой посередине пролёта (рис. 4). Размеры балки приведены в метрах. Диаметр арматуры — 8 мм. Модуль упругости арматуры $2,1 \cdot 10^5$ МПа. Разбивку балки на плоские КЭ выполняем сеткой 6×40 КЭ (6 КЭ по высоте и 40 КЭ по длине). Арматуру моделируем стержневыми КЭ (40 КЭ). Шаг интегрирования — $\Delta t = 1$ сут.

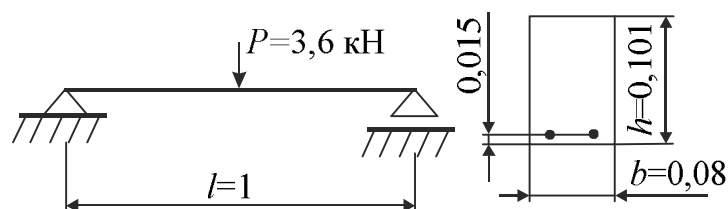


Рис. 4. Расчётная схема однопролётной железобетонной балки

Рассмотрим два варианта армирования: I — арматура расположена в нижней (растянутой) половине балки, II — симметричное армирование растянутой и сжатой частей балки. Результаты численного моделирования процесса ползучести в виде графиков зависимости прогиба f_{max} в центре пролёта от времени наблюдения t и «возраста» бетона τ представлены на рис. 5.

На рис. 5 штриховые линии относятся к варианту армирования I, сплошные линии — к варианту армирования II; номера линий 1 и 2 соответствуют значениям параметра τ , равным 14 и 28 сут. Момент времени распалубки $\tau_1 = 2$ сут. Значения упруго-мгновенного прогиба $f_{max}(\tau)$ для вариантов армирования I и II соответственно составляют $0,4890 \cdot 10^{-3}$ м и $0,4199 \cdot 10^{-3}$ м.

Как видно из представленных на рис. 5 графиков, наличие арматуры в сжатой зоне балки обуславливает снижение ползучести для всех реализованных моделей бетона. Вместе с тем только модели теории старения (рис. 5, б) и теории наследственного старения (рис. 5, в) описывают наблюдаемую на практике быстро натекающую деформацию ползучести $f_{max}(\tau + 1)$, возникающую

сразу после упруго-мгновенной деформации балки. Значения $f_{max}(t)/f_{max}(\tau)$ и $f_{max}(t)/f_{max}(\tau+1)$, где $t = 150$ сут. для теории старения и теории наследственного старения приведены в табл.

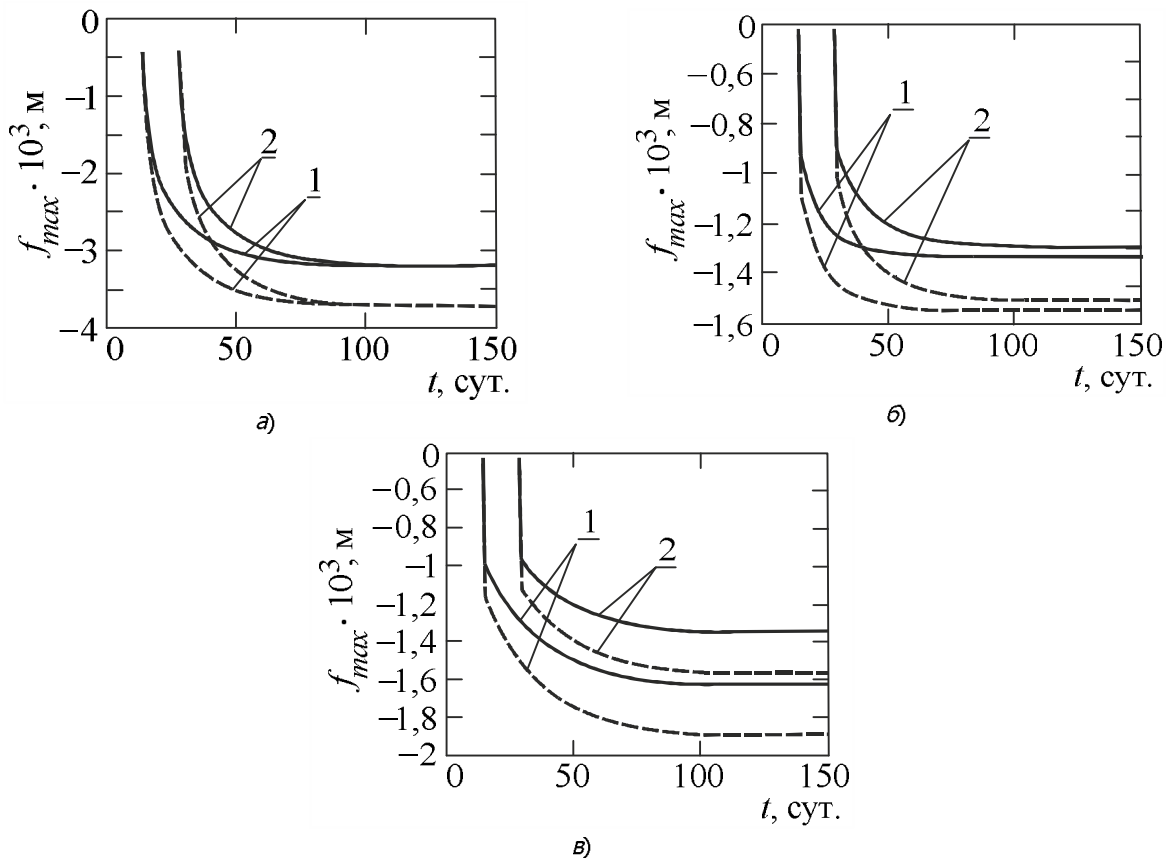


Рис. 5. Графики $f_{max}(t)$ для железобетонной балки:

а — теория упругой наследственности; б — теория старения; в — теория наследственного старения

Значения $f_{max}(t)/f_{max}(\tau)$ и $f_{max}(t)/f_{max}(\tau+1)$ для однопролётной балки

Теория	$f_{max}(t)/f_{max}(\tau)$		$f_{max}(t)/f_{max}(\tau+1)$	
	$\tau = 14$ сут.	$\tau = 28$ сут.	$\tau = 14$ сут.	$\tau = 28$ сут.
Теория старения	3,19	3,09	1,44	1,44
Теория наследственного старения	3,87	3,21	1,63	1,39

Из приведённых в табл. данных следует, что значения $f_{max}(t)/f_{max}(\tau+1)$, соответствующие теории старения, для моментов времени $\tau = 14$ сут. и $\tau = 28$ сут. совпадают. Тогда как в действительности по мере «старения» бетона это отношение должно уменьшаться. Отметим, что данный эффект адекватно описывает теория наследственного старения.

Выводы.

1. В рамках теории старения и теории наследственного старения с помощью символьного процессора компьютерной математики Maple получены выражения для ядер релаксации, удобные для программирования.

2. Разработана и программно реализована шаговая процедура метода конечных элементов, позволяющая моделировать процессы последствия в бетонных и железобетонных конструкциях с учётом старения бетона.

3. На тестовых примерах выполнена численная апробация разработанной конечноэлементной программы.

Библиографический список

1. Александровский, С. В. Расчёт бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учётом ползучести / С. В. Александровский. — Москва: Стройиздат, 1973. — 432 с.

2. Арутюнян, Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н. Х. Арутюнян. — Москва: Гостехтеоретиздат, 1952. — 323 с.

3. Улицкий, И. И. Теория и расчёт железобетонных стержневых конструкций с учётом длительных процессов / И. И. Улицкий. — Киев: Будівельник, 1976. — 347 с.

4. Прокопович, И. Е. Прикладная теория ползучести / И. Е. Прокопович, В. А. Зедгенидзе. — Москва: Стройиздат, 1980. — 240 с.

5. Гайджуров, П. П. Конечно-элементное решение задач теории ползучести / П. П. Гайджуров // Строительная механика и расчёт сооружений. — 2006. — № 1. — С. 52—58.

6. Гайджуров, П. П. Билинейный четырёхузловой конечный элемент для решения двумерных задач теории упругости / П. П. Гайджуров, Э. Р. Исхакова // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. — 2011. — № 4. — С. 7—13.

Материал поступил в редакцию 23.03.2012.

References

1. Alexandrovskiy, S.V. *Raschet betonnykh i zhelezobetonnykh konstruktsiy na izmeneniya temperatury i vlazhnosti s uchetom polzuchesti*. [Concrete and reinforced concrete creep structural analysis for temperature and moisture variations.] Moscow: Stroyizdat, 1973, 432 p. (in Russian).

2. Arutyunyan, N.K. *Nekotoryye voprosy teorii polzuchesti*. [Some issues of creep theory]. Moscow: Gostekhteorizdat, 1952, 323 p. (in Russian).

3. Ulitskiy, I.I. *Teoriya i raschet zhelezobetonnykh sterzhnevyykh konstruktsiy s uchetom dlitelnykh protsessov*. [Theory and analysis of long-term reinforced concrete framed structures.] Kiev: Budivelnik, 1976, 347 p. (in Russian).

4. Prokopovich, I.E., Zedgenidze, V.A. *Prikladnaya teoriya polzuchesti*. [Applied creep theory.] Moscow: Stroyizdat, 1980, 240 p. (in Russian).

5. Gaidzhurov, P.P. *Konechno-elementnoye resheniye zadach teorii polzuchesti*. [Finite element problem solution of creep theory.] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2006, no. 1, pp. 52–58 (in Russian).

6. Gaidzhurov, P.P., Iskhakova, E.R. *Bileynyy chetyrekhuzlovoy konechnyy element dlya resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti*. [Bilinear 4-noded finite element for creep bidimensional problem solution.] *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskiye nauki*, 2011, no. 4, pp. 7–13 (in Russian).

CONCRETE CREEP THEORY MODELS AND THEIR FINITE-ELEMENT IMPLEMENTATION

P. P. Gaydzhurov

(Don State Technical University),

E. R. Iskhakova

(South-Russian State Technical University)

The finite-element method for the plane problem solution of the concrete creep theory with regard to aging is developed. The expressions based on the formulas for creep values proposed by N. K. Arutyunyan and S. V. Alexandrovsky are used as the hereditary functions of the second kind. The friendly programming expressions for the concrete relaxation kernels are obtained by the symbolic processor. The durable step-by-step algorithm and the appropriate software for performing accounting under the variable loading with regard to the fast incident creep at the initial load and partial reversibility of the creep flow under deloading are developed. The verification of the developed software is carried out on the base of the available experimental data on the creep of the directly compressive prismatic concrete rods and bending concrete beams.

Keywords: *finite-element method, plane problem, hereditary aging theory, numerical integration.*