

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 512.64+517.5

Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц**С. А. Золотых, В. А. Стукопин**

(Донской государственный технический университет)

Решается задача описания предельного множества последовательностей собственных значений ленточных тёплицевых матриц растущих размеров (предельного спектра) с заданным символом. Предельный спектр ленточных тёплицевых матриц описан как полуалгебраическое множество, то есть как множество решений некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств. При решении задачи использована техника вычисления результатов многочленов нескольких переменных. Сформулирован в частном случае алгоритм нахождения предельного спектра. Рассмотрен пример вычисления предельного спектра для конкретного символа. Данные результаты уточняют классические результаты Ф. Спитцера и П. Шмидта об описании предельного спектра ленточных несамосопряжённых тёплицевых матриц. Следует отметить, что эти классические результаты в значительной степени являлись теоремами существования и вопрос об эффективном нахождении предельного спектра Ф. Спитцером и П. Шмидтом не рассматривался.

Ключевые слова: ленточные тёплицевы матрицы, предельный спектр, результат, символ тёплицевой матрицы.

Введение. Тёплицевы (и связанные с ними ганкелевы) матрицы — это один из наиболее важных для приложений класс матриц, появляющийся в задачах фундаментальной математики, теоретической физики, механики, а также в многочисленных инженерных приложениях [1].

В данной работе рассматривается задача описания предельного множества последовательностей собственных значений ленточных тёплицевых матриц растущих размеров (предельного спектра) с заданным символом, как множества решений некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств. Основной результат работы состоит в построении алгоритма, строящего такую систему алгебраических уравнений и неравенств. Отметим, что этот алгоритм рассматривается лишь в частном случае, с целью более выпукло представить основные идеи авторов.

Задача описания предельного спектра является важной и трудной задачей спектральной теории тёплицевых операторов, имеющей многочисленные применения в математической физике. Впервые такая задача была исследована Ф. Спитцером и П. Шмидтом в работе [2] (см. также работы [5], [6], посвящённые исследованию этой же задачи). Ф. Спитцер и П. Шмидт показали, что предельный спектр является аналитическим одномерным множеством, точнее, он либо состоит из одной точки, либо является объединением конечного множества аналитических дуг.

Позднее Дж. Ульман доказал связность предельного спектра [3]. Несмотря на столь почтенную историю вопроса описания предельного спектра, до сих пор нет алгоритмически эффективных способов его точного нахождения. В данной работе несколько усиливается результат, описанный в [2], и доказывается, что предельный спектр является полуалгебраическим множеством.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт номер П1116), а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них».

Постановка задачи. Пусть f — комплекснозначная функция, аналитическая в окрестности окружности единичного радиуса $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k. \quad (1)$$

Будем обозначать через $T_n(f)$ тёплицеву матрицу размера $n \times n$, то есть матрицу $T_n(f) = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, матричные элементы которой задаются формулой $a_{i,j} = a_{i-j}$, где a_k находится из уравнения (1). Отметим, что у тёплицевой матрицы на каждой из диагоналей, параллельных главной, стоят одинаковые элементы. Если для $k < -r$ и для $k > h$ $a_k = 0$, то есть аналитическая функция $f(z)$ превращается в лорановский полином $f(z) = \sum_{k=-r}^h a_k z^k$, то соответствующая такой функции тёплицева матрица называется ленточной.

Упорядочим собственные значения $\{\lambda_{n,i}\}_{i=-n+1}^{n-1}$ матрицы $T_n(f)$ так, что $|\lambda_{n,i}| \leq |\lambda_{n,j}|$ при $i < j$. Множество предельных точек последовательностей $\{\lambda_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть предельным спектром последовательности тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначать через $\sigma_l(f)$.

Цель настоящей работы — установить связь между предельным спектром и функцией $f(z)$ (которую также называют символом каждой из матриц последовательности $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$). Отметим, что последовательность $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ является последовательностью коэффициентов Фурье-Лорана функции $f(z)$.

Классическая теорема Сегё, которую также называют слабой теоремой Сегё [1, 4], утверждает, что в случае, когда символ является вещественнозначной функцией, а матрицы $T_n(f)$ являются самосопряжёнными, предельный спектр последовательности тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ с образом символа функции $f(z)$:

$$\sigma_l(f) = R(f) = \{f(z) : z \in S^1\}. \quad (2)$$

В общем случае связь между предельным спектром $\sigma_l(f)$ и символом $f(z)$ является гораздо более сложной, и при рассмотрении большого числа примеров кажется случайной. Тем не менее, как показано ниже, эта связь существует, так, что по символу в результате некоторой алгоритмической процедуры вычисления можно найти предельный спектр. Этот результат является уточнением классических результатов Ф. Спитцера и П. Шмидта, являющихся в значительной степени теоремами существования.

Классические результаты. Приведём классические результаты Ф. Спитцера и П. Шмидта об описании предельного спектра $\sigma_l(f)$ последовательности ленточных тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}$. Свяжем с символом ленточной тёплицевой матрицы $f(z) = \sum_{k=-r}^h a_k z^k$ многочлен $Q(z, \lambda) = z^r (f(z) - \lambda) = a_{-r} + a_{-r+1}z + \dots + (a_0 - \lambda)z^r + \dots + a_h z^{r+h}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. (Ф. Спитцер, П. Шмидт, [2]). Пусть $z_1(\lambda), z_2(\lambda), \dots, z_{r+h}(\lambda)$ — комплексные корни многочлена $Q(z, \lambda)$, с учётом их кратности, упорядоченные по возрастанию их модулей, $\alpha_i(\lambda) = |z_i(\lambda)|$. Тогда предельный спектр описывается следующим условием:

$$\sigma_r(f) = \{\lambda \in C \mid a_r(\lambda) = a_{r+1}(\lambda)\}. \quad (3)$$

Основные результаты. В данном разделе описан предельный спектр как множество решений системы полиномиальных уравнений и неравенств. Рассматривается также алгоритм нахождения этой определяющей предельный спектр системы алгебраических уравнений и неравенств.

Прежде всего, напомним важное в дальнейшем понятие результата многочленов нескольких переменных [5]. Эта конструкция не является так же хорошо известной как результат двух многочленов от одной переменной. Идея определения результата в общем случае состоит в следующем. Пусть имеется система алгебраических уравнений, левую часть которой составляют многочлены $f_1, \dots, f_n$, множество решений которой $x_1, \dots, x_N$ — конечно, и полином g . Произведение значений многочлена g в точках, являющихся общими корнями многочленов системы, называют результатом:

$$\text{Res}(f_1, \dots, f_n; g) = \prod_{k=1}^N g(x_k).$$

Следует ещё раз отметить, что многочлены $f_1, \dots, f_n \in k[t_1, \dots, t_n]$ являются многочленами от многих переменных. Поле k удобно считать алгебраически замкнутым, в нашем случае можно ограничиться случаем $k = C$. В этом случае по теореме Безу (в случае общего положения) множество общих решений состоит из $N = r_1 \cdot \dots \cdot r_n$ решений, где $r_k = \deg(f_k)$, $k = 1, \dots, n$. Возможны модификации этого определения. Например, $g = g(t_1, \dots, t_n)$, и результат равен значению многочлена g в общих корнях системы уравнений $f_1(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$. При этом система может состоять и из одного многочлена. Способы вычисления результата могут быть разнообразными, но, по существу, в конечном итоге сводятся к использованию методов коммутативной алгебры и выбору специальных базисов. Удобно использовать, так называемые базисы Грёбнера, связанные со специальными упорядочениями множества мономов [6]. Ниже используется одно из таких упорядочений.

Напомним определение результата в случае двух переменных (и трёх многочленов). Пусть $f_1, f_2 \in k[x_1, x_2]$ — многочлены двух переменных с коэффициентами из поля k , $X = (x_1, x_2)$. Далее ограничимся случаем, когда $k = C$ совпадает с полем комплексных чисел. Пусть $\deg(f_i) = n_i$, $i = 1, 2$, $N = n_1 \cdot n_2$. Рассмотрим также многочлен $g \in k[X]$. Мы хотим определить результат $\text{Res}(f_1, f_2; g)$, как выражение пропорциональное произведению значений многочлена g в общих нулях многочленов f_1, f_2 . Выберем упорядоченный базис:

$$M = \{\mu_k = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \mid 0 \leq p_1 \leq n_1, 0 \leq p_2 \leq n_2; k = 1, \dots, N\}. \quad (4)$$

Будем называть элементы из этого множества M степенными произведениями. Многочлен $h(x) \in k[x_1, x_2]$ называется приведённым относительно M , если он представляется в виде линейной комбинации степенных произведений из M . Можно показать, что для многочленов общего положения $f_1, f_2 \in k[x_1, x_2]$ можно редуцировать произвольный многочлен $h(x) \in k[x_1, x_2]$ по модулю многочленов f_1, f_2 , то есть найти такие многочлены $a_1, a_2 \in k[x_1, x_2]$, что многочлен

$$h_{\text{red}}(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) - a_1(x_1, x_2)f_1(x_1, x_2) - a_2(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2)$$

является приведённым относительно M . Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — множество общих нулей многочленов f_1, f_2 . Тогда, очевидно, что $h_{\text{red}}(\lambda_j) = h(\lambda_j)$, $1 \leq j \leq N$.

Приведём многочлены $\mu_k(X) \cdot g(X)$, $X = (x_1, x_2)$, по модулю M и обозначим получившиеся многочлены через g_k :

$$\mu_k(X)g(X) = a_{k1}(X)f_1(X) + a_{k2}(X)f_2(X) + g_k(X),$$

$$g_k(X) = b_{k1}\mu_1(X) + \dots + b_{kN}\mu_N(X).$$

Подставляя $X = \lambda_j$ в приведённые выше равенства, мы получим

$$b_{k1}\mu_1(\lambda_j) + \dots + b_{kN}\mu_N(\lambda_j) = \mu_k(\lambda_j)g(\lambda_j).$$

Эти равенства легко записываются в виде следующих матричных тождеств:

$$BV = V \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g(\lambda_N) \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda_1) & \mu_1(\lambda_2) & \dots & \mu_1(\lambda_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_N(\lambda_1) & \mu_N(\lambda_2) & \dots & \mu_N(\lambda_N) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель от левой и правой частей, получаем, что

$$\det(B) = \text{Res}(f_1, f_2; g). \quad (5)$$

Сформулируем теперь теорему, грубо описывающую предельный спектр как подмножество некоторого одномерного полуалгебраического множества.

Теорема 2. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=-r}^h a_k z^k,$$

$$Q(z, \lambda) = z^k(a(z) - \lambda), Q_1(x, y, \lambda) = \text{Re}(Q(x + iy, \lambda)), Q_2(x, y, \lambda) = \text{Im}(Q(x + iy, \lambda)),$$

$$A(z_1, z_2, u, \lambda) = \text{Res}(Q_1(x, y, \lambda), Q_2(x, y, \lambda); g = u - z_1^2 - z_2^2).$$

Тогда предельный спектр содержится в следующем полуалгебраическом множестве решений следующей системы уравнений и неравенств:

$$\text{Res}(A(z_1, z_2, u, \lambda); A'(z_1, z_2, u, \lambda)) = 0, \text{Im}(z_1) = 0, \text{Im}(z_2) = 0, \text{Im}(u) = 0, \text{Re}(u) \geq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Подробное доказательство теоремы достаточно громоздко. Ограничимся лишь схемой доказательства. Заметим, что надо всего лишь проверить, что если для точки λ комплексной плоскости выполняются условия теоремы 1, то для неё обязательно выполняется и условие (6). Этот факт проверяется просто с использованием приведённого выше определения результата. На самом деле можно немного усилить доказываемый результат и показать, что условие (6) описывает одномерное вещественное полуалгебраическое множество.

Опишем теперь точно предельный спектр. Для простоты ограничимся частным случаем $r + h = 3$ и $z_1(\lambda), z_2(\lambda), z_3(\lambda)$ — корни многочлена $Q(z, \lambda)$.

Введём следующие обозначения. Пусть $U = \{\lambda : \text{Res}(A(\lambda, u), A'_u(\lambda, u)) = 0\}$, $U_1 = \{\lambda : \text{Res}(A(\lambda, u), A''_u(\lambda, u)) = 0\}$. Понятно, что $U_1 = \{\lambda : a_1(\lambda) = a_2(\lambda) = a_3(\lambda)\}$. Множество $U \setminus U_1$ распадается на два непересекающихся замкнутых подмножества $V_1 = \{\lambda : a_1(\lambda) = a_2(\lambda) < a_3(\lambda)\}$ и $V_2 = \{\lambda : a_1(\lambda) < a_2(\lambda) = a_3(\lambda)\}$. Тогда множество $U_1 \cup V_2$ и будет совпадать с искомым предельным спектром. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Предельный спектр совпадает со следующим полуалгебраическим множеством:

$$\sigma_r(f) = U_1 \cup V_2. \quad (7)$$

Замечание. Нетрудно видеть, что, по существу, условие (7) даёт алгоритм нахождения предельного спектра, поскольку каждое из множеств, входящих в (7) допускает алгоритмически эффективное описание в терминах обычных результатов, так как наличие у многочлена f корня кратности, не меньшей чем k , может быть записано в виде условия: $\text{Res}(f(x), f^{(k-1)}(x)) = 0$. То есть, каждое из множеств, входящих в условие (7) является алгебраическим и эффективно описывается как множество нулей многочлена, а разность алгебраических множеств, как известно, является полуалгебраическим множеством. Следовательно, полуалгебраическим множеством является и всё множество, описываемое условием (7). Последнее также влечёт возможность алгоритмического описания данного множества.

Пример вычисления предельного спектра.

Возьмём многочлен: $a(z) = z^{-1} + z$. В этом случае, получающиеся матрицы являются самосопряжёнными и спектр их, а следовательно и предельный спектр, будет вещественным.

Вычислим $Q(z, \lambda)$: $Q(z, \lambda) = z(a(z) - \lambda) = z(z^{-1} + z - \lambda) = 1 - \lambda z + z^2$.

Полученный результат преобразуем к виду $Q_1(x, y, \lambda) + iQ_2(x, y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, \lambda) + iQ_2(x, y, \lambda) &= 1 - \lambda(x + iy) + (x + iy)^2, \\ Q_1(x, y, \lambda) + iQ_2(x, y, \lambda) &= 1 - \lambda x - i\lambda y + x^2 + 2ixy - y^2 = 1 - \lambda x + x^2 - y^2 + i(-\lambda y + 2xy), \\ Q_1(x, y, \lambda) &= 1 - \lambda x + x^2 - y^2, \quad Q_2(x, y, \lambda) = -\lambda y + 2xy \end{aligned}$$

Обозначим многочлены $Q_1(x, y, \lambda)$, $Q_2(x, y, \lambda)$, через f_1 и f_2 , соответственно, а также рассмотрим многочлен $g(u, x, y) = u - (x^2 + y^2)$ и, таким образом, имеем три многочлена: $f_1 = 1 - \lambda x + x^2 - y^2$, $f_2 = -\lambda y + 2xy$, $g(u, x, y) = u - (x^2 + y^2)$.

Будем выполнять разложение многочленов по базису: $M = \{1, x, y, y^2\}$.

Выразим: $x^2 = f_1 + y^2 + \lambda x - 1$, $xy = \frac{1}{2}f_2 + \frac{\lambda}{2}y$, тогда $g(u, x, y) = u - x^2 - y^2 = u - f_1 - 2y^2 - \lambda x + 1$.

Вычислим:

$$\begin{aligned} xg &= xu - xf_1 - 2xy^2 - \lambda x^2 + x = xu - xf_1 - 2y\left(\frac{1}{2}f_2 + \frac{\lambda}{2}y\right) - \lambda(f_1 + y^2 + \lambda x - 1) + x = \\ &= (-x - \lambda)f_1 - yf_2 - 2\lambda y^2 + (u - \lambda^2 + 1)x + \lambda \\ yg &= yu - yf_1 - 2y^3 - \lambda xy + y; \\ y^2g &= y^2f_1 - xyf_2 + (u - 1)y^2. \end{aligned}$$

Составим матрицу из остатков:

	g	xg	yg	y^2g
1	$(u+1)$	λ	0	0
x	$-\lambda$	$(u - \lambda^2 + 1)$	0	0
y	0	0	$(u-1)$	0
y^2	-2	-2 λ	0	$(u-1)$

Вычисляя определитель матрицы, получаем:

$$A(x, y, u, \lambda) = -2u^2 + u^4 - u\lambda^2 + 2u^2\lambda^2 - u^3\lambda^2 + 1.$$

Если вычислить $A'_u(x, y, u, \lambda)$:

$$A'_u(x, y, u, \lambda) = -4u + 4u^3 - \lambda^2 + 4u\lambda^2 - 3u^2\lambda^2.$$

Тогда, $\text{Res}(A(x, y, u, \lambda); A'_u(x, y, u, \lambda)) = 0$, поскольку у многочлена $A(x, y, u, \lambda)$ и его производной есть общий корень -1 . Следует исключить этот корень и опять использовать условие равенства нулю результата. Но проще сразу найти условие кратности корней многочлена $A(x, y, u, \lambda)$. Таким образом, исключая кратный корень $[u = 1]$, получим корни:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2}, \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2}.$$

Можно было сразу найти разложение результата, получив искомые корни, что быстро даёт решение задачи:

$$u^4 - u^3\lambda^2 + 2u^2(\lambda^2 - 1) - u\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve for } u} \left[[u = 1], [u = 1], \left[u = \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2} \right], \left[u = \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2} \right] \right].$$

Мы видим, что в силу условий (6) λ может быть любым вещественным числом. Далее необходимо использовать условия, описывающие множество U_1 (то есть, по существу, (7)), но проще использовать условие наличия лишь двух вещественных корней. Осталось заметить, что третий и четвёртый корни обязаны быть комплексными, то есть должно выполняться условие: $\lambda^2 - 4 \leq 0$.

Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что точка λ является точкой предельного спектра в том и только в том случае, когда $\lambda \in [-2; 2]$. Таким образом, предельный спектр в этом случае совпадает с отрезком $[-2; 2]$.

Данный результат можно подтвердить следующими рассуждениями. Так как $Q(z, \lambda) = z(a(z) - \lambda) = z(z^{-1} - \lambda + z) = 1 - \lambda z + z^2$, то многочлен $Q(z, \lambda)$ имеет следующие корни:

$z_{1,2}(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$. Модули корней совпадают в том и только в том случае, когда дискриминант отрицателен, то есть когда $|\lambda| \leq 2$ или $-2 \leq \lambda \leq 2$.

Заключение. Данная работа содержит промежуточные результаты. В частном случае рассматривается алгоритм, дающий описание предельного спектра. В общем случае описание такого алгоритма становится более громоздким. Наличие алгоритма, дающего точное (а не приближённое), описание предельного спектра представляет несомненный теоретический интерес. Возникают естественные вопросы о скорости работы такого алгоритма, о его практической применимости и эффективности. В дальнейшем планируется вернуться к рассмотрению этих вопросов. Интересным, хотя и весьма сложным, вопросом является также обобщение теоремы 2 данной работы на другие классы тёплицевых несамосопряжённых матриц [7]. Сложность такого рода результата понятна в силу того, что он должен включать в себя теоремы типа слабой теоремы Серё для этих классов несамосопряжённых тёплицевых матриц.

Библиографический список

1. Grenander V. Teoplitz Forms and Their Applications / V. Grenander, G. Szego — Berkeley : Univ. of California Press, 1958. — 245 p.
2. Schmidt P. The Teoplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial / Schmidt P., Spitzer F. // Math. Scand. — 1960. — V. 8. — P. 15–38.
3. Ullman J. L. A problem of Schmidt and Spitzer / J. L. Ullman // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73. — P. 883–885.

4. Bottcher A. Spectral properties of banded Teoplitz matrices / A. Bottcher, S. Grudsky. — Philadelphia : SIAM, 2005. — 422 p.
5. Bikker P. On the Bezout Construction of the Resultant / P. Bikker, A. Uteshev // J. Symbolic Computation. — 1999. — V. 28. — P. 45–88.
6. Кокс, Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. — Москва : Мир, 2000. — 687 с.
7. Widom H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Teoplitz matrices and the asymptotics of Teoplitz determinants in the case of nonvanishing index / H. Widom // Operator Theory: Adv. And Appl. — 1990. — V. 48. — P. 387–421.

Материал поступил в редакцию 27.09.2012.

References

1. Grenander, V., Szego, G. Teoplitz Forms and Their Applications. Berkeley: Univ. of California Press, 1958, 245 p.
2. Schmidt, P., Spitzer, F. The Teoplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial. Math. Scand., 1960, vol. 8, pp. 15–38.
3. Ullman, J.L. A problem of Schmidt and Spitzer. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, pp. 883–885.
4. Bottcher, A., Grudsky, S. Spectral properties of banded Teoplitz matrices. Philadelphia: SIAM, 2005, 422 p.
5. Bikker, P., Uteshev, A. On the Bezout Construction of the Resultant. J. Symbolic Computation, 1999, vol. 28, pp. 45–88.
6. Cox, D., Little, J., O'Shea, D. *Idealy, mnogoobraziya i algoritmy*. [Ideals, Varieties, and Algorithms.] Moscow: Mir, 2000, 687 p. (in Russian).
7. Widom, H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Teoplitz matrices and the asymptotics of Teoplitz determinants in the case of nonvanishing index. Operator Theory: Adv. And Appl., 1990, vol. 48, pp. 387–421.

ON FORMULATION OF LIMITARY SPECTRUM OF BANDED TOEPLITZ MATRICES

S. A. Zolotych, V. A. Stukopin
(Don State Technical University)

A problem on the formulation of the limit set for the sequences of increasing Toeplitz matrices eigenvalues (of the limitary spectrum) with the chosen symbol is solved. The limitary spectrum of the banded Toeplitz matrices is described as a semialgebraic set, viz a solution set of some system of algebraic equations and inequalities. In the solution to the problem, the multivariate resultant technique is used. An algorithm of the limitary spectrum determination is formulated for the particular case. An example of the limitary spectrum computation for the specific symbol is considered. These results check the classical results by F. Spitzer and P. Schmidt on the description of the limitary spectrum of the non-selfadjoint Toeplitz matrices. It should be pointed out that these classical results are significantly existence theorems, and the problem on the effective computation of limitary spectrum by F. Spitzer and P. Schmidt is not considered.

Keywords: banded Toeplitz matrices, limitary spectrum, resultant, Toeplitz matrix symbol.