

УДК 519.711.3+502/504

Моделирование процесса загрязнения атмосферы

Г. В. Мишугова

(Донской государственный технический университет)

Целью работы является построение математической модели, которая позволит проанализировать процесс загрязнения атмосферы. В качестве исходных данных взяты материалы государственных докладов, опубликованных в журнале «Экологический вестник Дона». Объектом исследования являются данные по выбросам загрязняющих веществ в атмосферу от автотранспорта, зафиксированные в Ростове-на-Дону и Ростовской области за период с 2001 по 2010 год. Математическое моделирование процесса загрязнения атмосферы осуществляется с помощью двух подходов: 1) описание с помощью математических моделей типа Гаузе; 2) уточнение и прогнозирование процесса загрязнения атмосферы с помощью метода Прони. Используются программные пакеты MathCad, MatLab. Результаты математического моделирования позволяют проводить анализ процесса загрязнения и выявлять его закономерности.

Ключевые слова: загрязнение атмосферы, математическая модель, логистическое уравнение, метод Прони.

Введение. За последнее десятилетие наблюдается положительная тенденция в развитии экономики. Выросли объёмы производства в машиностроительной сфере, в лёгкой и пищевой промышленности, в строительстве и т. д. Как следствие, растёт благосостояние населения. Например, автопарк легковых автомобилей Ростовской области вырос за последнее десятилетие практически в два раза, что привело к росту выбросов в атмосферу вредных веществ. В настоящее время для уменьшения количества выбросов в окружающую среду применяются различные фильтры и устройства очистки. Тем не менее, объём выбросов вредных веществ в атмосферу продолжает расти, что следует из данных журнала «Экологический вестник Дона».

Целью работы является построение математической модели, с помощью которой можно будет проанализировать процесс загрязнения воздуха, а также изучить закономерности этого процесса.

Постановка задачи. В данной работе рассматриваются проблемы моделирования процесса загрязнения атмосферы с использованием эколого-биологических моделей логистического типа и типа Гаузе, а также уточнение и прогнозирование развития процесса с помощью метода Прони. Для решения первой проблемы построены две модели: логистическая, которая не учитывает процесс очистки, и модель Лотки-Вольтерра, в которой процесс очистки уже учтён.

Моделирование роста объёмов выбросов автотранспорта с помощью логистического уравнения. Атмосферный воздух является самой важной жизнеобеспечивающей природной средой и представляет собой смесь газов и аэрозолей приземного слоя атмосферы, сложившуюся в ходе эволюции Земли.

Используя многолетний мониторинг состояния биосферы, в том числе и атмосферы, проводимый в журнале «Экологический вестник Дона» [1–6], можно сделать вывод, что наиболее существенным загрязнителем атмосферы в настоящее время является автотранспорт.

Рост объёмов выбросов от автотранспорта наиболее точно описывается моделью роста популяции (логистическим уравнением) [7–10]. Логистическое уравнение запишем в виде:

$$\frac{dN}{dt} = r(N - P) \left(1 - \frac{(N - P)}{K} \right) \quad (1)$$

где N — объём выбросов, P — положительный параметр, r — скорость роста (увеличение объёмов выбросов), K — поддерживающая ёмкость среды (то есть, максимально возможный объём (концентрация) выбросов).

Интегрируя уравнение (1), описывающее рост выбросов в зависимости от времени, получаем

$$N = K \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} + P. \quad (2)$$

По статистическим данным, взятым из журналов «Экологический вестник Дона» [1–6], с помощью численных методов (численное дифференцирование, метод наименьших квадратов и т. п.) определяются параметры, входящие в уравнение (1).

Метод наименьших квадратов (МНК) — метод оценки параметров модели на основании экспериментальных данных, содержащих случайные ошибки. В основе метода лежат следующие рассуждения: при замене точного (неизвестного) параметра модели приблизительным значением необходимо минимизировать разницу между экспериментальными данными и теоретическими (вычисленными при помощи предложенной модели). Это позволяет рассчитать параметры модели с помощью МНК с минимальной погрешностью.

Мерой разницы в методе наименьших квадратов служит сумма квадратов отклонений действительных (экспериментальных) значений от теоретических. Выбираются такие значения параметров модели, при которых сумма квадратов разностей будет наименьшей:

$$\sum_i (Y_i - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

где Y — теоретическое значение измеряемой величины, y — экспериментальное.

При этом полученные с помощью метода наименьших квадратов параметры модели являются наиболее вероятными [7].

Находим параметры K , r , N_0 , P , значения которых получаются равными $K = 387,5$, $r = 0,6$, $N_0 = 8,1$, $P = 186,3$.

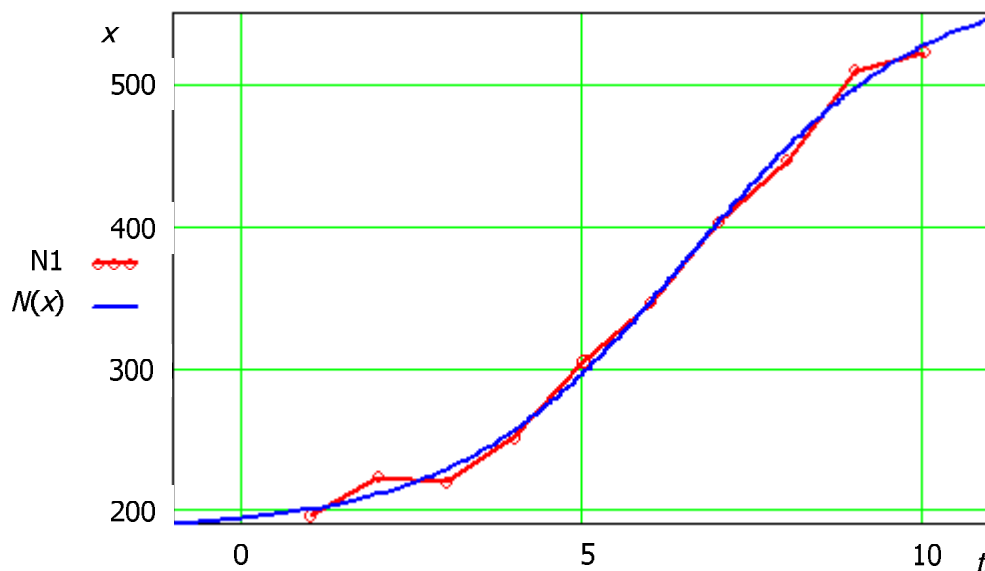


Рис. 1. График статистических данных (ломаная кривая, выделенная красным цветом) и решение логистического уравнения (выделено синим цветом)

Логистическое уравнение достаточно точно описывает рост объёмов выбросов от автотранспорта, что можно видеть из рис. 1. Степень отклонения полученной модели от фактических данных равна 2,2 %.

Математическое моделирование процесса загрязнения воздуха на основе модели типа Гаузе. Опишем модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой на основе модели Лотки-Вольтерра [8—10].

Пусть $X(t)$ — объём (концентрация) загрязнений в момент времени t ; $Y(t)$ — объём уловленных загрязнений в момент времени t :

$$\begin{cases} \dot{X} = aX - bXY \\ \dot{Y} = -dY + cXY \end{cases} \quad (3)$$

где a, b, c, d — положительные постоянные, характеризующие скорость изменения выброшенных и уловленных загрязнений и взаимодействия между ними.

Определяем коэффициенты a, b, c, d методом наименьших квадратов (который описан выше):

1) При помощи численного дифференцирования получаем переопределённую систему

$$\begin{cases} 14,0 = -161c + 33488d, \\ 21,0 = 208a - 33488b, \\ 14,0 = 229a - 40075b, \\ 17,0 = -175c + 40075d, \\ -6,0 = 243a - 46656b, \\ 11,0 = -192c + 46656d, \\ -5 = -203c + 48111d, \\ 22,0 = 237a - 48111b, \\ 12 = -198c + 51282d, \\ 12,0 = 259a - 51282b, \\ 32 = -210c + 56910d, \\ 29,4 = 271a - 56910b, \\ 7 = -242c + 72696,8d, \\ -35,4 = 300,4a - 72696,8b, \\ -29 = -249c + 65985d, \\ -10,0 = 265a - 65985b, \\ -2 = -220c + 56100d, \\ 6,0 = 255a - 56100b. \end{cases}$$

2) Решаем переопределённую систему методом наименьших квадратов [7]. Получаем нормальную систему, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -1,2 \cdot 10^8 a + 2,6 \cdot 10^{10} b = -1,4 \cdot 10^6, \\ 5,8 \cdot 10^5 a - 1,2 \cdot 10^8 b = 10651,2, \\ 386888c - 10 \cdot 10^7 d = -9455, \\ -10 \cdot 10^7 c + 2,6 \cdot 10^{10} d = 2,1 \cdot 10^6. \end{cases}$$

3) Находим коэффициенты a, b, c, d

$$\begin{cases} a := 0,4; \\ b := 0,002; \\ c := -0,4; \\ d := -0,001. \end{cases}$$

Проверяем адекватность модели (рис. 2).

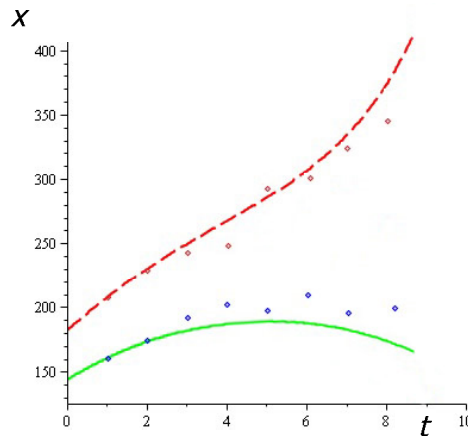


Рис. 2. Модель Лотки-Вольтерра

Получаем невязку по формуле $\frac{\sqrt{\sum (x_i - x_i^*)^2 + (y_i - y_i^*)^2}}{\sqrt{\sum x_i^2 + y_i^2}}$, которая равна $\delta = 9\%$. Это го-

ворит о том, что модель вполне адекватна, особенно на начальном отрезке времени, но желательно уточнение на последних шагах.

Моделирование с использованием метода Прони. Для более точного исследования процесса загрязнения применим метод Прони [11] — метод анализа коротких отрезков сигнала, основанный на аппроксимации сигнала конечной суммой комплексных экспонент. Сигнал $x[n]$ заменяется некоторой детерминированной экспоненциальной моделью:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^p A_k \exp[(a_k + j2\pi f_k)(n-1)T + j\theta_k],$$

где A_k и a_k — амплитуда и коэффициент затухания (в с^{-1}), f_k и θ_k — частота (в Гц) и начальная фаза (в рад) k -й синусоиды.

Иначе $\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}$, где $h_k = A_k \exp(j \cdot \theta_k)$, $z_k = \exp[(a_k + j2\pi f_k)T]$.

Задача заключается в поиске параметров экспоненциальной модели, аппроксимирующей p экспонентами $2p$ отсчётов действительных данных.

Расчёты проводились с помощью пакета MatLab. Результаты вычислений представлены на рис. 3. Сумма экспонент достаточно точно отражает экспериментальные данные. Метод Прони имеет преимущества при исследовании аperiodических сигналов по сравнению с другими методами, а также может применяться для прогнозирования (на графике прогноз указан точками).

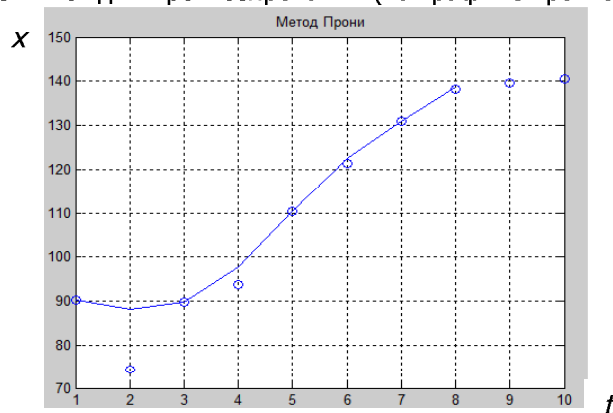


Рис. 3. Динамика выбросов загрязняющих веществ в атмосферу от автотранспорта в г. Ростов-на-Дону с 2001 по 2010 годы (на графике обозначены точками) и применение метода Прони (на графике ломаная кривая)

Заключение. В результате изучения процесса загрязнения атмосферы был проведён анализ данных. Построена модель роста объёмов выбросов от автотранспорта, которая наиболее точно описывается моделью роста популяции, но не учитывает процесс очистки. Также построена адекватная модель процесса загрязнения атмосферы типа Гаузе, в которой процесс очистки уже учтён. Произведено уточнение и прогнозирование процесса загрязнения атмосферы с помощью метода Прони.

Библиографический список

1. Государственный доклад «О состоянии окружающей природной среды Ростовской области в 1995 году» / под ред. В. Д. Гребенюка, В. Н. Агеева, М. В. Парашченко. — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 1996. — 164 с.
2. Государственный доклад «О состоянии окружающей природной среды Ростовской области в 2000 году» / под ред. В. П. Водолацкого, П. П. Ульянова, М. В. Парашченко. — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 2001. — 136 с.
3. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2003 году» / под ред. С. М. Назарова, В. М. Остроуховой, М. В. Парашченко. — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 2004. — 264 с.
4. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2008 году» / под ред. С. Г. Курдюмова, Г. И. Скрипки, М. В. Парашченко. — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 2009. — 356 с.
5. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2009 году» / под ред. С. Г. Курдюмова, Г. И. Скрипки, М. В. Парашченко. — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 2010. — 372 с.
6. Доклад «Об экологической ситуации в Ростовской области за 2010 год». — Ростов-на-Дону : ООО «Синтез технологий», 2011. — 284 с.
7. Демидович, В. П. Численные методы анализа / В. П. Демидович, И. А. Марон, Э. Э. Шувалова. — Москва : Наука, 1967. — 406 с.
8. Ризниченко, Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. — Москва : Изд-во МГУ, 1993. — 302 с.
9. Романов, М. Ф. Математические модели в экологии : учеб. пособие / М. Ф. Романов, М. П. Фёдоров. — Санкт-Петербург : Иван Фёдоров, 2003. — 239 с.
10. Братусь, А. С. Динамические системы и модели в биологии / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. — Москва : Физматлит, 2010. — 400 с.
11. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл. — Москва : Мир, 1990. — 584 с.

Материал поступил в редакцию 21.11.2012.

References

1. Grebenyuk, V.D., Ageyev, V.N., Parashchenko, M.V., eds. *Gosudarstvennyy doklad «O sostoyanii okruzhayushchey prirodnoy sredy Rostovskoy oblasti v 1995 godu»*. [State report "On the state of the environment of Rostov Region in 1995".] Rostov-on-Don: ООО «Sintez tekhnologiy», 1996, 164 p. (in Russian).
2. Vodolatskiy, V.P., Ulyanov, P.P., Parashchenko, M.V., eds. *Gosudarstvennyy doklad «O sostoyanii okruzhayushchey prirodnoy sredy Rostovskoy oblasti v 2000 godu»*. [State report "On the state of the environment of Rostov Region in 2000".] Rostov-on-Don: ООО «Sintez tekhnologiy», 2001, 136 p. (in Russian).

3. Nazarov, S.M., Ostroukhova, V.M., Parashchenko, M.V., eds. *Ekologicheskiy vestnik Dona «O sostoyanii okruzhayushchey sredy i prirodnikh resursov Rostovskoy oblasti v 2003 godu»*. [Ecological bulletin of Don "On the state of the environment and natural resources of Rostov Region in 2003".] Rostov-on-Don: OOO «Sintez tekhnologiy», 2004, 264 p. (in Russian).
4. Kurdyumov, S.G., Skripka, G.I., Parashchenko, M.V., eds. *Ekologicheskiy vestnik Dona «O sostoyanii okruzhayushchey sredy i prirodnikh resursov Rostovskoy oblasti v 2008 godu»*. [Ecological bulletin of Don "On the state of the environment and natural resources of Rostov Region in 2008".] Rostov-on-Don: OOO «Sintez tekhnologiy», 2009, 356 p. (in Russian).
5. Kurdyumov, S.G., Skripka, G.I., Parashchenko, M.V., eds. *Ekologicheskiy vestnik Dona «O sostoyanii okruzhayushchey sredy i prirodnikh resursov Rostovskoy oblasti v 2009 godu»*. [Ecological bulletin of Don "On the state of the environment and natural resources of Rostov Region in 2009".] Rostov-on-Don: OOO «Sintez tekhnologiy», 2010, 372 p. (in Russian).
6. *Doklad «Ob ekologicheskoy situatsii v Rostovskoy oblasti za 2010 god»*. [Report "On ecological situation in Rostov Region for 2010".] Rostov-on-Don: OOO «Sintez tekhnologiy», 2011, 284 p. (in Russian).
7. Demidovich, V.P., Maron, I.A., Shuvalova, E.E. *Chislennyye metody analiza*. [Numerical analysis.] Moscow: Nauka, 1967, 406 p. (in Russian).
8. Riznichenko, G.Y., Rubin, A.B. *Matematicheskiye modeli biologicheskikh produktsionnykh protsessov*. [Mathematical models of biological production processes.] Moscow: Izd-vo MGU, 1993, 302 p. (in Russian).
9. Romanov, M.F., Fedorov, M.P. *Matematicheskiye modeli v ekologii*. [Mathematical models in ecology.] Санкт-Петербург: Ivan Fedorov, 2003, 240 p. (in Russian).
10. Bratus, A.S., Novozhilov, A.S., Platonov, A.P. *Dinamicheskiye sistemy i modeli v biologii*. [Dynamic systems and models in biology.] Moscow: Fizmatlit, 2010, 400 p. (in Russian).
11. Marple, Jr., S.L. *Tsifrovoy spektralnyy analiz i yego prilozheniya*. [Digital spectral analysis: with applications.] Moscow: Mir, 1990, 584 p. (in Russian).

AIR CONTAMINATION PROCESS SIMULATION

G. V. Mishugova

(Don State Technical University)

The work objective is the development of the mathematical model for analyzing the air pollution process. State reports published in the "Ecological Vestnik of Don" journal are taken as basic data. The target of research is the data on the automotive pollutant emission into the atmospheric air registered in Rostov-on-Don and Rostov Region as of from 2001 to 2010. The mathematical simulation of the air contamination process is performed through two approaches: 1) description by mathematical models of Gauze type; 2) improvement and forecasting of the air contamination process by Prony's method; MathCad, MatLab program packages are used. The mathematical simulation results allow to analyze the contamination process and to identify its regularities.

Keywords: air pollution, mathematical model, logistic equation, Prony's method.