

УДК 539.32

Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями

А. О. Ватульян, А. В. Осипов

(Донской государственный технический университет)

Представлен способ формулировки асимптотически точных условий сопряжения, моделирующих тонкий разрез, при анализе поперечных колебаний консольно закреплённого стержня. Исследована модель трёхэлементной балки, на каждом участке которой характеристики постоянны. Получено точное аналитическое решение, формирующееся из решений задачи на каждом промежутке, связанных между собой посредством граничных условий и условий сопряжения. Далее исследована аналогичная задача для модели двухэлементной балки, для которой сформулированы асимптотически точные условия на линии сопряжения однородных участков. Рассмотрен случай исчезающе малого тонкого разреза. Проведён анализ точности полученных модифицированных условий сопряжения на амплитудно-частотные зависимости и резонансные частоты. В проведённых вычислительных экспериментах представлены значения невязок полученных условий при различных значениях длины разреза, глубины пропила, а также центра разреза.

Ключевые слова: балки с дефектами, модифицированные условия сопряжения.

Введение. В настоящее время всё больше внимания уделяется исследованиям колебаний неоднородных стержней, в том числе стержней с надрезом, моделирующим трещинообразный дефект. Эти модели важны для решения обратных задач динамики упругих конструкций [1, 2]. При этом отметим, что достаточно подробно исследованы задачи с полостью в стержне, проведены исследования и эксперименты по идентификации размеров и местоположения полости в стержне [3, 4], предложены формулы для определения поправок для резонансных частот. Кроме того, отметим цикл работ по исследованию задач об изгибных колебаниях балок с трещинами и разрезами [5–7]. При этом для адекватной постановки задачи требуется модификация граничных условий [8] в задаче для балки с надрезом.

В настоящей работе представлен способ формулировки асимптотически точных условий сопряжения, моделирующих тонкий разрез, при анализе поперечных колебаний консольно закреплённого стержня. Проведён анализ точности полученных условий на амплитудно-частотные зависимости и резонансные частоты.

Задача для трёхэлементной балки. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω упругой балки длины L , ослабленной тонким надрезом длины $2l$ с центром в точке x_0 . Будем считать, что балка на конце $x = 0$ жёстко закреплена, а на конце $x = L$ действует сосредоточенная сила. Уравнение колебаний неоднородной балки имеет вид [9]:

$$(EI(x)w''(x))' - \rho\omega^2 F(x)w(x) = 0$$

где E — модуль Юнга; I — момент инерции; ρ — плотность; F — площадь поперечного сечения.

Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad EI(L) \cdot w''(L) = 0; \quad (EI(x) \cdot w''(x))' \Big|_{x=L} = P.$$

Для упрощения постановки задачи рассмотрим сначала модель трёхэлементной балки, на каждом участке которой характеристики постоянны:

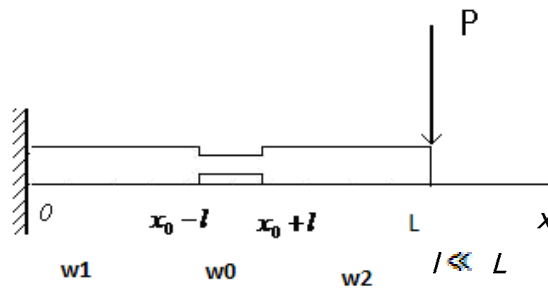


Рис. 1. Консольно закреплённая балка с тонким разрезом

Считая модуль Юнга величиной постоянной по всей длине балки ($E = \text{const}$), будем искать решение задачи на каждом промежутке (для простоты считаем, что поперечное сечение балки — прямоугольник шириной b и высотой H на неповреждённом участке и высоты h в ослабленном месте):

$$\begin{cases} w_1^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_1}{EI_1} w_1 = 0, \\ w_0^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_0}{EI_0} w_0 = 0, \\ w_2^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_2}{EI_2} w_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $F_1 = F_2 = bH$, $F_0 = bh$, $I_1 = I_2 = \frac{bH^3}{12}$, $I_0 = \frac{bh^3}{12}$.

Условия сопряжения и граничные условия для системы (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0, w_1'(0) = 0, \\ w_1(x_0 - l) &= w_0(x_0 - l), w_1'(x_0 - l) = w_0'(x_0 - l), \\ I_1 w_1''(x_0 - l) &= I_0 w_0''(x_0 - l), I_1 w_1'''(x_0 - l) = I_0 w_0'''(x_0 - l), \\ w_0(x_0 + l) &= w_2(x_0 + l), w_0'(x_0 + l) = w_2'(x_0 + l), \\ I_0 w_0''(x_0 + l) &= I_2 w_2''(x_0 + l), I_0 w_0'''(x_0 + l) = I_2 w_2'''(x_0 + l), \\ w_2''(L) &= 0, w_2'''(L) = \frac{P}{EI_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Попробуем упростить решение задачи, сформулировав для двухэлементной балки модифицированные граничные условия в месте наличия надреза. Для получения условий стыковки на концах разреза представим функцию w_0 в следующем виде:

$$w_0(x) = A_1 \text{ch}(k(x - x_0)) + A_2 \cos(k(x - x_0)) + A_3 \text{sh}(k(x - x_0)) + A_4 \sin(k(x - x_0)), \quad (3)$$

где $k^4 = \frac{12\rho\omega^2}{Eh^2}$.

Используя граничные условия (2), получаем следующие равенства, связывающие граничные значения функций w_1 и w_2 на краях разреза:

$$\begin{aligned} w_2(x_0 + l) &= (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4)kl; \\ w_2'(x_0 + l) &= (A_1 - A_2)k^2l + (A_3 + A_4)k; \\ I_2 w_2''(x_0 + l) &= I_0 ((A_1 - A_2)k^2 + (A_3 - A_4)k^3l); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 w_2'''(x_0 + l) &= I_0 ((A_1 + A_2) k^4 l + (A_3 - A_4) k^3); \\
 w_1(x_0 - l) &= (A_1 + A_2) - (A_3 + A_4) k l; \\
 w_1'(x_0 - l) &= -(A_1 - A_2) k^2 l + (A_3 + A_4) k; \\
 I_2 w_1''(x_0 - l) &= I_0 ((A_1 - A_2) k^2 - (A_3 - A_4) k^3 l); \\
 I_2 w_1'''(x_0 - l) &= I_0 (-(A_1 + A_2) k^4 l + (A_3 - A_4) k^3).
 \end{aligned}$$

Исключив из получившихся соотношений произвольные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 , характеризующие участок надреза, получаем следующие условия, связывающие соответствующие значения производных слева и справа от разреза:

$$\begin{aligned}
 w_1(x_0 - l) - w_2(x_0 + l) + l(w_1'(x_0 - l) + w_2'(x_0 + l)) &= 0; \\
 w_1'(x_0 - l) - w_2'(x_0 + l) + l \cdot \frac{I_2}{I_0} (w_1''(x_0 - l) + w_2''(x_0 + l)) &= 0; \\
 \frac{I_2}{I_0} (w_1''(x_0 - l) - w_2''(x_0 + l)) + l \cdot \frac{I_2}{I_0} (w_1'''(x_0 - l) + w_2'''(x_0 + l)) &= 0; \\
 \frac{I_2}{I_0} (w_1'''(x_0 - l) - w_2'''(x_0 + l)) + k^4 l (w_1(x_0 - l) + w_2(x_0 + l)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Раскладывая в соотношениях (4) выражения для функций в ряд с точностью до $O(l^2)$ в окрестности x_0 , получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 w_1(x_0) - l \cdot w_1'(x_0) + \frac{l^2}{2} \cdot w_1''(x_0) - w_2(x_0) - l \cdot w_2'(x_0) - \frac{l^2}{2} \cdot w_2''(x_0) + \\
 + l \cdot (w_1'(x_0) - l \cdot w_1''(x_0) + w_2'(x_0) + l \cdot w_2''(x_0)) &= 0; \\
 w_1'(x_0) - l \cdot w_1''(x_0) + \frac{l^2}{2} \cdot w_1'''(x_0) - w_2'(x_0) - l \cdot w_2''(x_0) - \frac{l^2}{2} \cdot w_2'''(x_0) + \\
 + l \cdot \frac{I_2}{I_0} (w_1''(x_0) - l \cdot w_1'''(x_0) + w_2''(x_0) + l \cdot w_2'''(x_0)) &= 0; \\
 w_1''(x_0) - l \cdot w_1'''(x_0) + \frac{l^2}{2} \cdot w_1^{IV}(x_0) - w_2''(x_0) - l \cdot w_2'''(x_0) + \\
 + \frac{l^2}{2} \cdot w_2^{IV}(x_0) + l \cdot (w_1'''(x_0) - l \cdot w_1^{IV}(x_0) + w_2'''(x_0) + l \cdot w_2^{IV}(x_0)) &= 0; \\
 w_1'''(x_0) - w_2'''(x_0) + k^4 l \cdot \frac{I_0}{I_2} (w_1(x_0) + w_2(x_0)) &= 0.
 \end{aligned}$$

Упростив, окончательно получаем следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned}
 w_1(x_0) - w_2(x_0) - \frac{l^2}{2} \cdot (w_1''(x_0) - w_2''(x_0)) &= 0; \\
 w_1'(x_0) - w_2'(x_0) + l \cdot \left(\frac{I_2}{I_0} - 1 \right) (w_1''(x_0) + w_2''(x_0)) - \frac{l^2}{2} \cdot \left(\frac{I_2}{I_0} - 1 \right) (w_1'''(x_0) - w_2'''(x_0)) &= 0; \\
 w_1''(x_0) - w_2''(x_0) - \frac{l^2}{2} \cdot (w_1^{IV}(x_0) - w_2^{IV}(x_0)) &= 0; \\
 w_1'''(x_0) - w_2'''(x_0) + k^4 l \cdot \frac{I_0}{I_2} (w_1(x_0) + w_2(x_0)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Сохраняя в (5) слагаемые с точностью до $O(l^2)$, получаем окончательно условия сопряжения на концах разреза для сечения в виде прямоугольника:

$$\begin{aligned} 1. & w_1(x_0) - w_2(x_0) = 0; \\ 2. & w_1'(x_0) - w_2'(x_0) + 2l \left(\frac{H^3}{h^3} - 1 \right) w_1''(x_0) = 0; \\ 3. & w_1''(x_0) - w_2''(x_0) = 0; \\ 4. & w_1'''(x_0) - w_2'''(x_0) + \frac{24\rho\omega^2}{EH^3} \cdot h/w_1(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае исчезающе малого тонкого разреза, где $l \rightarrow 0$, в условиях 2 и 4 в (6) выполняется предельный переход, и они сводятся к традиционным.

В таблице 1 показано, как изменяется невязка при выполнении каждого из условий (6) с изменением длины разреза; в таблице 2 показано, как изменяется невязка при изменении глубины разреза; в таблице 3 показано, как изменяются значения невязки каждого из условий для различных точек разреза x_0 .

Таблица 1

Значение невязок условий сопряжения при различных l для $x_0 = 0,5$

$\frac{l}{L}$	$\frac{H}{h}$	Значения невязок для соответствующих условий сопряжения в процентах			
		1	2	3	4
0,1	2	60,02	5,81	22,34	5,99
0,05	2	23,69	3,76	10,81	1,49
0,01	2	3,81	1,21	2,10	0,06
0,005	2	0,18	0,63	1,05	0,01
0,001	2	0,03	0,13	0,21	0,0006

Таблица 2

Значение невязок условий сопряжения при различных значениях глубины разреза для $x_0 = 0,5$

$\frac{l}{L}$	$\frac{H}{h}$	Значения невязок для соответствующих условий сопряжения в процентах			
		1	2	3	4
0,01	1,11	3,66	1,21	2,07	0,003
0,01	1,25	3,67	1,21	2,07	0,005
0,01	1,43	3,70	1,21	2,07	0,01
0,01	1,67	3,73	1,21	2,08	0,02
0,01	2	3,81	1,21	2,10	0,06
0,01	2,5	3,96	1,22	2,18	0,17

Таблица 3

Значение невязок условий сопряжения для различных значений точки разреза

$\frac{l}{L}$	$\frac{H}{h}$	x_0	Значения невязок для соответствующих условий сопряжения в процентах			
			1	2	3	4
0,01	2	0,1	28,92	9,52	1,16	0,02
0,01	2	0,2	11,67	4,31	1,3	0,03
0,01	2	0,3	7,10	2,61	1,49	0,04
0,01	2	0,4	5,01	1,74	1,75	0,05
0,01	2	0,5	3,81	1,21	2,10	0,06
0,01	2	0,6	3,03	0,83	2,63	0,07
0,01	2	0,7	2,48	0,54	3,50	0,07
0,01	2	0,8	2,07	0,31	5,21	0,08
0,01	2	0,9	1,75	0,11	10,12	0,08

Нетрудно заметить, что при увеличении длины или глубины разреза ($H > 3h$) погрешность возрастает, что требует более сложных моделей изгиба балки, например, модели типа Тимошенко [9].

Задача для двухэлементной балки. С помощью выведенных условий сопряжения (4) можно исследовать задачу о колебаниях двухэлементной балки, то есть балки с тонким разрезом, которой соответствует система двух дифференциальных уравнений, а вместо граничных условий (2) для трёхэлементной балки выступают полученные условия сопряжения (6).

Сравним полученное решение для двухэлементной балки и точное решение для трёхэлементной балки, а в качестве критерия выберем значение смещения на свободном конце ($w_2(L)$) при различных значениях безразмерной частоты k .

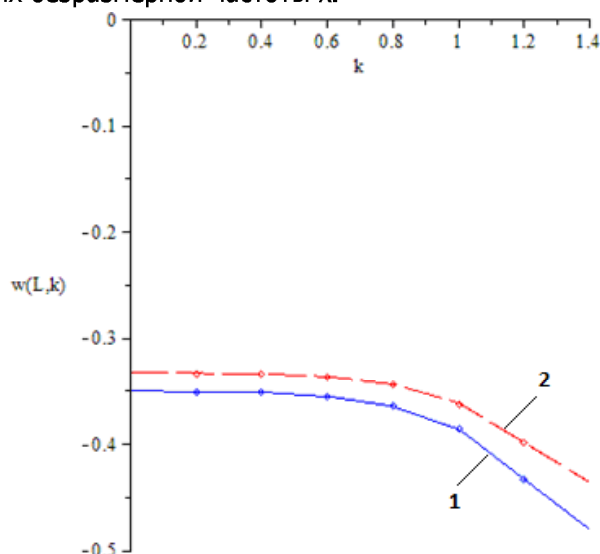


Рис. 2. Сравнение значений $w_2(L)$ при значениях k до первого резонанса для $H = 0,1$, $h = 0,05$, $l = 0,01$:

1 — решение для трёхэлементной балки, 2 — решение для двухэлементной балки

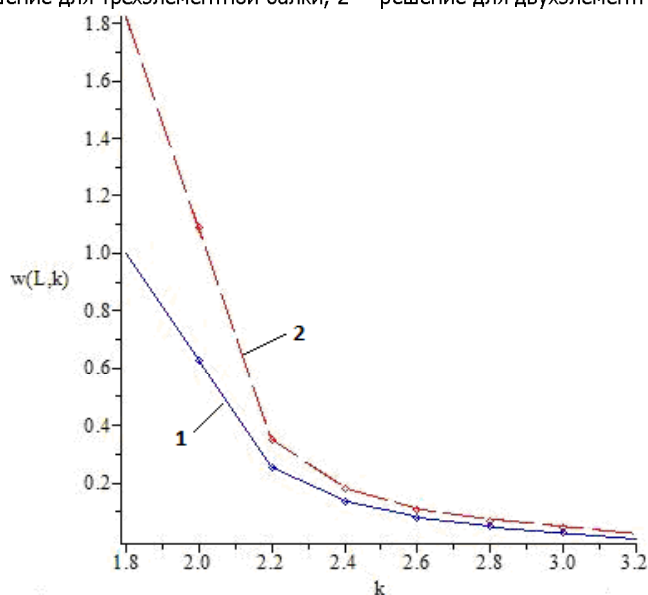


Рис. 3. Сравнение значений $w_2(L)$ при значениях k после первого резонанса для $H = 0,1$, $h = 0,05$, $l = 0,01$:

1 — решение для трёхэлементной балки, 2 — решение для двухэлементной балки

Как проиллюстрировано на рисунках 2 и 3, погрешность решения увеличивается в окрестности резонанса, но при этом на других участках не превышает 5 %.

В таблице 4 показаны значения резонансных частот для точного решения задачи с использованием трёхэлементной балки и решения задачи для двухэлементной балки, построенного с использованием полученных условий сопряжения.

Таблица 4

Сравнение значений резонансных частот для трёхэлементной и двухэлементной балок

$\frac{l}{L}$	$\frac{H}{h}$	Значения резонансных частот для	
		трёхэлементной балки	двухэлементной балки
0,01	1,11	1,873	1,870
0,01	1,25	1,869	1,868
0,01	1,43	1,861	1,864
0,01	1,67	1,844	1,858
0,01	2	1,802	1,844
0,01	2,5	1,692	1,815

Как видно из приведённой таблицы, при малой глубине разреза значения резонансных частот отличаются незначительно, а при увеличении глубины разреза разница между резонансными частотами растёт.

Заключение. Рассмотрена модель трёхэлементной балки, характеристики которой постоянны на каждом участке. Получено точное аналитическое решение, формирующееся из решений задачи на каждом промежутке. Представлен способ формулировки условий сопряжения на концах тонкого разреза. Сформулированы адекватные модифицированные условия сопряжения на концах тонкого разреза. Проведён ряд численных экспериментов по оценке точности полученных условий, в которых продемонстрирована адекватность полученных условий. Результаты вычислительных экспериментов позволили оценить влияние параметров пропила на точность сформулированных условий сопряжения. Выполнено сравнение резонансных частот для трёхэлементной и двухэлементной балок.

Библиографический список

1. Гладвелл, Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний / Г. М. Л. Гладвелл. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. — 608 с.
2. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела / А. О. Ватульян. — Москва : Физматлит, 2007. — 223 с.
3. Ватульян, А. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне / А. О. Ватульян, Н. О. Солуянов // Дефектоскопия. — 2005. — № 9. — С. 44–56.
4. Ватульян, А. О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний / А. О. Ватульян, Н. О. Солуянов // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1015–1020.
5. Ахтямов, А. М. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне / А. М. Ахтямов, А. Р. Аюпова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 37–42.
6. Ахтямов, А. М. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний / А. М. Ахтямов, А. Р. Каримов // Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org>. — 2010. — Т. 10, № 3.
7. Ильгамов, М. А. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом / М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов // Дефектоскопия. — 2009. — № 6. — С. 83–89.

8. Осипов, А. В. Об одной модели балки с тонким разрезом / А. В. Осипов // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XV Междунар. конф. В 2 тт. Т. 2. — Ростов-на-Дону : Изд-во Южного федерального ун-та, 2011. — С. 190–193.

9. Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. — Москва : Машиностроение, 1970. — 736 с.

Материал поступил в редакцию 18.11.2012.

References

1. Gladwell, G.M.L. *Obratnyye zadachi teorii kolebaniy*. [Inverse problems in vibration.] Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2008, 608 p. (in Russian).

2. Vatulyan, A.O. *Obratnyye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tverdogo tela*. [Inverse problems in deformable solid mechanics.] Moscow: Fizmatlit, 2007, 223 p. (in Russian).

3. Vatulyan, A.O., Soluyanov, N.O. *Ob opredelenii mestopolozheniya i razmera polosti v uprugom sterzhne*. [On positioning and sizing of cavity in elastic rod.] *Defektoskopiya*, 2005, no. 9, pp. 44–56 (in Russian).

4. Vatulyan, A.O. *Identifikatsiya polosti v uprugom sterzhne pri analize poperechnykh kolebaniy*. [Characterization of cavity in elastic rod under lateral vibration analysis.] *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1015–1020 (in Russian).

5. Akhtyamov, A.M. *O reshenii zadachi diagnostirovaniya defektov v vide maloy polosti v sterzhne*. [On solution to problems of diagnosing defects in the form of a small cavity in rod.] *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37–42 (in Russian).

6. Akhtyamov, A.M., Karimov, A.R. *Diagnostirovaniye mestopolozheniya treshchiny v sterzhne po sobstvennym chastotam prodolnykh kolebaniy*. [Diagnostics of crack location in a rod using natural frequency of longitudinal vibration.] *Elektronnyy «Tekhnicheskaya akustika»*. [Electronic Journal *Technical Acoustics*.] <http://ejta.org>, 2010, vol. 10, no. 3 (in Russian).

7. Ilgamov, M.A., Khakimov, A.G. *Diagnostika povrezhdeniy konsolnoy balki s nadrezom*. [Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch.] *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2009, no. 6, pp. 83–89 (in Russian).

8. Osipov, A.V. *Ob odnoy modeli balki s tonkim razrezom*. [On a beam model with a thin section.] *Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: trudy XV Mezhdunarodnoy konferentsii*. [Contemporary issues of continuum mechanics: Proc. XV Int. Conf.] In 2 vol. Vol. 2. Rostov-on-Don: Izdatelstvo Yuzhnogo federalnogo universiteta, 2011, pp. 190–193 (in Russian).

9. Filippov, A.P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem*. [Deformable system vibrations.] Moscow: Mashinostroyeniye, 1970, 736 p. (in Russian).

TRANSVERSE VIBRATIONS OF BEAM WITH LOCALIZED HETEROGENEITIES

A. O. Vatulyan, A. V. Osipov
(Don State Technical University)

The formulation technique for the asymptotically exact coupling conditions simulating a thin section under the analysis of transverse vibrations of the cantilever fitted rod is presented. The three-piece beam model with constant characteristics in every area is investigated. An exact analytical solution produced from decisions of every interval associated with each other through the boundary conditions and matching conditions is obtained. Then, the analogous problem for the two-element beam model, for which asymptotically exact conditions on the coupling line of the uniform sections are formulated, is studied. The case of the vanishingly small thin cut is considered. The accuracy analysis of the obtained modified coupling conditions on the amplitude-frequency dependences and resonant frequencies is made. The residual values of the obtained conditions at various amounts of the cut length, depth, and central point are presented in the conducted computational experiments.

Keywords: beams with defects, modified coupling conditions.