ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

УРАВНЕНИЕ ЗАМКНУТОСТИ ДЛЯ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Н.А. БАЗАРЕНКО, И.М. ПЕШХОЕВ
(Донской государственный технический университет)

Получено уравнение замкнутости для биортогональной системы функций. Определены свойства замкнутых систем функций, позволяющие решать контактные задачи теории упругости для тел конечных размеров – прямоугольника, круглой плиты, цилиндров конечной длины и т.д.
Ключевые слова: *уравнение замкнутости, однородные решения.*

Введение. При решении в цилиндрической системе координат r,φ,z осесимметричной задачи теории упругости для круглой плиты находятся так называемые однородные решения [1-5], оставляющие свободным от напряжений торец плиты $r=1$ и соответствующие бигармоническим функциям $\Phi_k(r,z),\ k=0,1,\dots$:

$$\chi_0^{-1}\Phi_0=c_0[\nu zr^2+\nu_2 z^3/3]+d_0(r^2/2-z^2),\quad \varphi_0(z)=2c_0z+2d_0,$$
$$\chi_n^{-1}\Phi_n=\gamma_n^{-1}\left[e_nJ_0(\gamma_n r)+rJ_1J_1(\gamma_n r)\right]\varphi_n(z),\quad \varphi_n(z)=d_n ch\gamma_n z+c_n sh\gamma_n z,$$

$$\sigma_r={\sum_{n=0}}'\tilde{\sigma}_r^n(r)\varphi_n'(z),\quad {\sum_{k=0}}'\overline{T}_k(r)\varphi_k(z)=\overline{T}(r,z),\quad {\sum_{k=0}}'\overline{P}_k(r)\varphi_k'(z)=\overline{P}(r,z), \qquad (1)$$

где $\overline{T}_k(r)=\bar{i}u_z^k(r)+\bar{j}\tau_{rz}^k(r),\quad \overline{P}_k(r)=\bar{i}\sigma_z^k(r)-\bar{j}u_r^k(r)$ – собственные векторные функции, $\overline{T}=\bar{i}\tilde{u}_z(r,z)+\bar{j}\tau_{rz}(r,z),\quad \overline{P}=\bar{i}\sigma_z(r,z)-\bar{j}\tilde{u}_r(r,z)$,

$$\tilde{u}_r\equiv 2Gu_r={\sum_{k=0}}'u_r^k(r)\varphi_k'(z),\quad \tilde{u}_z\equiv 2Gu_z={\sum_{k=0}}'u_z^k(r)\varphi_k(z),\quad e_n=J_0+\nu_0\gamma_n^{-1}J_1,$$

$$\sigma_z^0(r)=\nu_1\chi_0,\ u_z^0(r)=\chi_0,\ \tau_{rz}^0(r)=0,\ u_r^0(r)=-\nu r\chi_0,\ \nu_0=2-2\nu,\ \nu_1=1+\nu,$$
$$\sigma_z^n(r)=\gamma_n\left(J_2J_0(\gamma_n r)-rJ_1J_1(\gamma_n r)\right)\chi_n,\qquad u_z^n(r)=\left(\sigma_z^n(r)-2\nu J_1J_0(\gamma_n r)\right)\chi_n,$$
$$\tau_{rz}^n(r)=\gamma_n^2\left(J_0J_1(\gamma_n r)-rJ_1J_0(\gamma_n r)\right)\chi_n,\quad u_r^n(r)=\left(e_nJ_1(\gamma_n r)-rJ_1J_0(\gamma_n r)\right)\chi_n,$$

G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона, $\chi_0=\sqrt{2/\nu_1},\ \nu_2=1-2\nu$; $J_\nu(\gamma_n r),\ J_\nu\equiv J_\nu(\gamma_n)$ – функции Бесселя, γ_k – корни уравнения [5]:

$$\nu_0J_1^2-\gamma_k^2\left(J_1^2+J_0^2\right)=0,\quad \mathrm{Re}\,\gamma_k\ge 0;\quad k=0,1,\dots,$$

χ_0 и $\chi_n=\left(\nu_0^2J_1^3J_2/\gamma_n-\nu_0J_1^4\right)^{-1/2}$ $(n=1,2,\dots)$ – нормирующие множители.

Здесь и далее штрих у знака суммы означает укороченную запись

$${\sum_{k=0}}'G_k(\gamma_k,r,z)\equiv G_0+2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}G_n\right)\qquad (\gamma_0=0,\ \mathrm{Re}\,\gamma_n,\mathrm{Im}\,\gamma_n>0,\ n=1,2,\dots).$$

Векторные функции $\overline{T}_n(r),\overline{P}_m(r)$, соответствующие собственным значениям γ_n,γ_m $(m,n=0,1,\dots)$, а также другие функции

$$\overset{\circ}{\overline{U}}_n=\int_1^r\overline{T}_n(t)dt,\quad \overline{U}_m=-\left(r\overline{P}_m(r)\right)',\quad \overset{\circ}{\overline{V}}_n=\int_1^r\overline{P}_n(t)dt,\quad \overline{V}_m=-\left(r\overline{T}_m(r)\right)' \qquad (2)$$

образуют биортогональные нормированные системы

$$\int_0^1\overline{T}_n(r)\cdot\overline{P}_m(r)rdr=\int_0^1\overline{U}_n(r)\cdot\overset{\circ}{\overline{U}}_m(r)dr=\int_0^1\overline{V}_n(r)\cdot\overset{\circ}{\overline{V}}_m(r)dr=\begin{cases}1,\ m=n,\\0,\ m\ne n.\end{cases} \qquad (3)$$

На границе плиты $z = z_s$ $(z_0 = 0, z_1 = h)$ функции

$$\overline{U}(r, z_s) = \int_1^r \overline{T}(t)dt, \qquad \overline{V}(r, z_s) = \int_1^r \overline{P}(t)dt$$

с учетом условий (3) можно разложить в обобщенные ряды Фурье:

$$\overline{U} = \sum_{k=0}{}' f_{k,s}\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r) = \sum_{k=0}{}' f^{\circ}_{k,s}\overline{U}_k(r), \qquad \overline{V} = \sum_{k=0}{}' \tilde{f}_{k,s}\overset{\circ}{\overline{V}}_k(r) = \sum_{k=0}{}' \tilde{f}^{\circ}_{k,s}\overline{V}_k(r),$$

где коэффициенты Фурье функций $\overline{U}, \overline{V}$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} f_{k,s} &= \int_0^1 \overline{U}(r, z_s)\cdot\overline{U}_k(r)dr = \int_0^1 \left(\tilde{u}_z\tilde{\sigma}_z^k - \tau_{rz}\tilde{u}_r^k\right)rdr, \; f^{\circ}_{k,s} = \int_0^1 \overline{U}(r, z_s)\cdot\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r)dr, \\ \tilde{f}_{k,s} &= \int_0^1 \overline{V}(r, z_s)\cdot\overline{V}_k(r)dr = \int_0^1 \left(\sigma_z\tilde{u}_z^k - \tilde{u}_r\tilde{\tau}_{rz}^k\right)rdr, \; \tilde{f}^{\circ}_{k,s} = \int_0^1 \overline{V}(r, z_s)\cdot\overset{\circ}{\overline{V}}_k(r)dr. \end{aligned} \tag{4}$$

Условие (3) связано с возможностью почленного интегрирования рядов (1) и лежит в основе методики решения контактной задачи для круглой плиты. Как показывает апостериорный анализ, ряды (1) являются расходящимися и, следовательно, возможность их интегрирования необходимо еще доказать. В настоящей работе автор обосновывает правомерность почленного интегрирования рядов типа (1), которые используются в работах [1-5].

Решение задачи. Рассматривается система равенств на границе плиты $z = z_s$:

$$\overline{U} = \sum_{k=0}{}' f_{k,s}\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r), \quad \overline{V} = \sum_{k=0}{}' \tilde{f}_{k,s}\overset{\circ}{\overline{V}}_k(r) \quad \left(f_{k,s} \equiv \varphi_k(z_s), \tilde{f}_{k,s} \equiv \varphi'_k(z_s)\right), \tag{5}$$

где координаты векторов $\overline{U}, \overline{V}$ определяются функциями $\tilde{u}_z, \tau_{rz}, \sigma_z, \tilde{u}_r$, которые соответствуют бигармонической функции $\Phi(r, z) = \sum_{k=0}{}' \Phi_k$ при $z = z_s$.

Поскольку на границе $z = z_s$ функцию $\Phi(r, z)$ можно подчинить только двум условиям, то из четырех координатных функций независимыми будут две.

Замечание 1. Если удовлетворено только одно уравнение системы (5)

$$\sum_{k=0}{}' f_{k,s}\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r) = \overline{U}(r, z_s) \equiv \bar{i}\int_1^r \tilde{u}_z(t, z_s)dt + \bar{j}\int_1^r \tau_{rz}(t, z_s)dt, \tag{6}$$

где $\tilde{u}_z(r, z_s), \tau_{rz}(r, z_s)$ – заданные независимые функции,

то второе уравнение системы выполняется автоматически, т.е. система двух равенств (5) эквивалентна, например, одному уравнению (6).

Следуя схеме исследования рядов Фурье, описанной в [6, с.414-424], заменим бесконечные ряды в равенствах (5) их частичными суммами и оценим погрешности, которые получаются в результате такой замены. За меру приближения n-х частичных сумм к функциям $\overline{U}$, $\overline{V}$ примем средние квадратические погрешности $\varepsilon_n, \tilde{\varepsilon}_n$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{t}_n &= \overline{U}(r, z_s) - \sum_{k=0}^{n}{}' f_{k,s}\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r), \qquad \bar{r}_n = \overline{V}(r, z_s) - \sum_{k=0}^{n}{}' \tilde{f}_{k,s}\overset{\circ}{\overline{V}}_k(r), \\ \varepsilon_n^2 &\equiv \int_0^1 \bar{t}_n^{\,2} dr = \int_0^1 \left[\overline{U}^2 - \sum_{k=0}^{n}{}' f_{k,s}\overset{\circ}{\overline{U}}_k(r)\cdot\left(\overline{U} + \bar{t}_n\right)\right]dr, \\ \tilde{\varepsilon}_n^2 &\equiv \int_0^1 \bar{r}_n^{\,2} dr = \int_0^1 \left[\overline{V}^2 - \sum_{k=0}^{n}{}' \tilde{f}_{k,s}\overset{\circ}{\overline{V}}_k(r)\cdot\left(\overline{V} + \bar{r}_n\right)\right]dr. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\bar{t}_n, \bar{r}_n$ – уклонения n-х частичных сумм от функций $\overline{U}(r, z_s), \overline{V}(r, z_s)$.

Если для любой бигармонической функции $\Phi(r, z)$ мы докажем , что

$$\varepsilon_n \to 0, \text{ когда } n \to \infty, \tag{8}$$

(тогда в силу *замечания 1* и $\bar{t}_n, \bar{r}_n, \tilde{\varepsilon}_n \to 0$) то, переходя к пределу в равенствах (7) при $n \to \infty$ и принимая во внимание формулы (4), получим:

$$\int_0^1 |\overline{U}(r,z_s)|^2\, dr = {\sum_{k=0}^{\infty}}' f_{k,s} f^{\circ}_{k,s}, \qquad \int_0^1 |\overline{V}(r,z_s)|^2\, dr = {\sum_{k=0}^{\infty}}' \tilde{f}_{k,s} \tilde{f}^{\circ}_{k,s}. \tag{9}$$

Уравнения (9) можно назвать обобщенными уравнениями замкнутости для функций $|\overline{U}|, |\overline{V}|$ по отношению к биортогональной системе функций (2).

Система функций (2) является замкнутой и полной, так как уравнения (9) справедливы для любой бигармонической функции $\Phi(r,z)$, через которую определяются левые части этих уравнений. Указанные выше свойства системы функций (2) тесно связаны [7].

Вернемся к обоснованию условия (8). Для частной бигармонической функции $\Phi = r^2 z^2 - 2z^4/3$ по формулам:

$$\tilde{u}_z = (\nu_0 \Delta - \partial_z^2)\Phi, \quad \sigma_z = [(2-\nu)\Delta - \partial_z^2]\partial_z \Phi, \quad \tilde{u}_r = -\partial_r \partial_z \Phi,$$
$$\tau_{rz} = \partial_r[(1-\nu)\Delta - \partial_z^2]\Phi, \quad \Delta \equiv \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + \partial_z^2$$

находим перемещения $\tilde{u}_z, \tilde{u}_r$, напряжения σ_z, τ_{rz} и величину ε_n^2 при $z_1 = 1$:

$$\tilde{u}_z = 2\nu_2 r^2 + 8\nu z_1^2, \quad \sigma_z = 8\nu z_1, \quad \tilde{u}_r = -4 z_1 r, \quad \tau_{rz} = -4\nu r,$$

$$f_{k,1} = \int_0^1 \left(\sigma_z^k(r)\tilde{u}_z - u_r^k(r)\tau_{rz}\right) r\,dr = \frac{4\nu_0 J_1}{\gamma_k^2}\left(\nu J_2 + \frac{\nu_1}{\gamma_k} J_1\right)\chi_k, \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$f_{0,1} = \frac{1 + 7\nu + 4\nu^2}{2}\chi_0, \quad \overline{U}(r,z_1) = \bar{i}\,p + \bar{j}q, \quad q = \int_1^r \tau_{rz}(t,z_1)dt = -2\nu(r^2 - 1),$$

$$p(r,z_1) = \int_1^r \tilde{u}_z(t,z_1)dt = \frac{2}{3}\nu_2(r^3 - 1) + 8\nu(r-1), \qquad \bar{t}_n = \bar{i}E(n,r) + \bar{j}R(n,r),$$

$$E(n,r) = p(r,z_1) - f_{0,1}\int_1^r \tilde{u}_z^0(t)dt - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^n f_{k,1} J_u(k,r)\right\} =$$
$$= \frac{2}{3}\nu_2(r^3 - 1) + \frac{4\nu^2 + \nu - 1}{\nu_1}(r-1) - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^n f_{k,1} J_u(k,r)\right\},$$

$$R(n,r) = q(r,z_1) - f_{0,1}\int_1^r \tilde{\tau}_{rz}^0(t) - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^n f_{k,1} J_\tau(k,r)\right\} =$$
$$= -2\nu(r^2 - 1) - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^n f_{k,1} J_\tau(k,r)\right\}, \qquad J_\tau(k,r) = \int_1^r \tilde{\tau}_{rz}^k(t)dt,$$

$$J_u(k,r) = \int_1^r \tilde{u}_z^k(t)dt = \chi_k(\nu_2 J_1 - \gamma_k J_0)\left(r\tilde{R}(z) - \tilde{R}(\gamma_k)\right) + J_1\left(rJ_0(z) - J_0\right)\chi_k,$$

$$\tilde{H}_\nu(z) = (H_\nu(z) - Y_\nu(z))\pi/2, \quad \tilde{R}(z) = \tilde{H}_0(z)J_1(z) - \left(\tilde{H}_1(z) - 1\right)J_0(z), \quad kr \ge 20,$$

$$J_u(k,r) = \chi_k \int_1^r \left[(\nu_0 J_1 - \gamma_k J_0)J_0(\gamma_k t) - \gamma_k t J_1 J_1(\gamma_k t)\right]dt \ \text{(если } kr \le 20\text{)},$$

$$\tilde{H}_\nu = \sum_{k=0}^{9} \frac{(z/2)^\nu 4^k \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2 - k) z^{2k+1}}, \; J_\tau(k,r) = \chi_k\left\{\nu_0 J_1^2 \gamma_k^{-1} - \gamma_k\left[J_0 J_0(z) + rJ_1 J_1(z)\right]\right\},$$

$$\varepsilon_n^2 = \int_0^1 \left(E(n,r)^2 + R(n,r)^2\right)dr. \tag{10}$$

Здесь $H_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)\,(\nu=0{,}1;\, z\equiv\gamma_k r)$ – функции Струве и Бесселя [5,8]; для значений $kr\le 20$ интеграл $J_u(k,r)$ находится численно.

Вычисляя величину ε_n^2 по формуле (10) при $z_1=1,\ \nu=0.3,$ получим:

$$\varepsilon_4^2=1.71\cdot10^{-3},\qquad \varepsilon_{40}^2=4.88\cdot10^{-6},\qquad \varepsilon_{400}^2=2.99\cdot10^{-8}\ \text{и т.д.}$$

То есть численно установлено, что в частном случае $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty.$ По-видимому, это свойство выполняется для тех бигармонических функций $\Phi(r,z),$ для которых существуют интегралы от квадратов функций $\overline{U},\ \overline{V}$ и можно вычислять обобщенные коэффициенты Фурье по формулам (4).

Важным следствием формул (9) являются соотношения (5), которые перепишем в виде:

$$\int_1^r \overline{T}(t,z_s)dt=\sum_{k=0}{}' f_{k,s}\int_1^r \overline{T}_k(t)dt,\quad \int_1^r \overline{P}(t,z_s)dt=\sum_{k=0}{}' \tilde{f}_{k,s}\int_1^r \overline{P}_k(t)dt,\ r\in[0,1]. \tag{11}$$

Если бы мы знали, что ряды (1) при $z=z_s$ сходятся равномерно, то равенства (4), (5), (11) были бы очевидными.

Замечание 2. Формулы (4), (11) всегда справедливы, даже если ряды (1) не сходятся, т.е. оказывается, что ряды (1) можно интегрировать почленно так, как будто бы они равномерно сходятся и имеют суммы, равные $\overline{T},\overline{P}$, причем ряды, стоящие в правых частях равенств(5), (11), сходятся равномерно для всех значений $r\in[0{,}1]$ (см. свойства замкнутых систем ортогональных функций [6, с.455].

Выводы. Применение в работах [1-5] условия ортогональности (3) и связанное с этим условием интегрирование расходящихся рядов типа (1) можно считать правомерной операцией, не приводящей к ошибочным результатам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-08-00839-а).

Библиографический список

1. Александров В.М. Контактная задача для прямоугольника со свободными от напряжений боковыми гранями / В.М. Александров, Н.А. Базаренко // ПММ. – 2007. – Т.71. – Вып.2. – С.340-351.

2. Базаренко Н.А. Контактная задача для полого и сплошного цилиндров со свободными от напряжений торцами / Н.А. Базаренко // ПММ. – 2008. – Т.72. – Вып.2. – С.328-341.

3. Базаренко Н.А. Взаимодействие полого цилиндра конечной длины и плиты с цилиндрической полостью с жестким вкладышем / Н.А. Базаренко //ПММ. – 2010. – Т.74. – Вып.3. – С.126-139.

4. Базаренко Н.А. Взаимодействие жесткого штампа с закрепленным по основанию упругим прямоугольником со свободными от напряжений боковыми гранями / Н.А. Базаренко // ПММ. – 2010. – Т.74. – Вып.4. – С.113-128.

5. Базаренко Н.А. Контактная задача для круглой плиты со свободным от напряжений торцом / Н.А. Базаренко // ПММ. – 2010. – Т.74. – Вып.5. – С.25-41.

6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.II. / В.И. Смирнов. – 16-е изд. – М.: Физматгиз, 1958. – 628 с.

7. Кампе де Ферье Ж. Функции математической физики / Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петьо [и др.]. – М.: Физматгиз, 1963. – 104 с.

8. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables// Eds M. Abramowitz and Stegun. Washington: Gov. Print off., 1964. // Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред.М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Материал поступил в редакцию 24.05.10.

References

1. Aleksandrov V.M. Kontaktnaya zadacha dlya pryamougol'nika so svobodnymi ot napryajenii bokovymi granyami / V.M. Aleksandrov, N.A. Bazarenko // PMM. – 2007. – T.71. – Vyp.2. – S.340-351. – In Russian.
2. Bazarenko N.A. Kontaktnaya zadacha dlya pologo i sploshnogo cilindrov so svobodnymi ot napryajenii torcami / N.A. Bazarenko // PMM. – 2008. – T.72. – Vyp.2. – S.328-341. – In Russian.
3. Bazarenko N.A. Vzaimodeistvie pologo cilindra konechnoi dliny i plity s cilindricheskoi polost'yu s jestkim vkladyshem / N.A. Bazarenko //PMM. – 2010. – T.74. – Vyp.3. – S.126-139. – In Russian.
4. Bazarenko N.A. Vzaimodeistvie jestkogo shtampa s zakreplennym po osnovaniyu uprugim pryamougol'nikom so svobodnymi ot napryajenii bokovymi granyami / N.A. Bazarenko // PMM. – 2010. – T.74. – Vyp.4. – S.113-128. – In Russian.
5. Bazarenko N.A. Kontaktnaya zadacha dlya krugloi plity so svobodnym ot napryajenii torcom / N.A. Bazarenko // PMM. – 2010. – T.74. – Vyp.5. – S.25-41. – In Russian.
6. Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki. T.II. / V.I. Smirnov. – 16-e izd. – M.: Fizmatgiz, 1958. – 628 s. – In Russian.
7. Kampe de Fer'e J. Funkcii matematicheskoi fiziki / J. Kampe de Fer'e, R. Kempbell, G. Pet'o [i dr.]. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 104 s. – In Russian.
8. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables// Eds M. Abramowitz and Stegun. Washington: Gov. Print off., 1964.

N.A. BAZARENKO, Isa M. PESHKHOYEV

CLOSEDNESS EQUATION FOR BIORTHOGONAL SYSTEM OF FUNCTIONS

Closedness equation for biorthogonal system of functions has been derived. Closed-loop function systems characteristics are defined. They allow to solve contact problems of elasticity theory for finite bodies – a rectangle, a circular plate, a cylinder of finite length, etc.

Key words: *closedness equation, homogeneous solutions.*