

УДК 539.3 + 622.03

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ ТИПА СОМИЛИАНЫ

В.Я. МОЛОТНИКОВ

(Донской государственный технический университет),

А.А. МОЛОТНИКОВА

(Ростовский филиал Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса)

Приведено замкнутое решение задачи теории упругости о равновесии полуплоскости, в которой образована прямолинейная дислокация сдвига. Предполагается, что ядро дислокации лежит внутри области, а линия сдвига пересекает границу полуплоскости. Рассматривается применимость полученного решения к оценке напряженного состояния земной коры в окрестности дизъюнктивных дислокаций.

Ключевые слова: упругое равновесие, плоская задача, полуплоскость, дислокация Сомилианы, тектонические напряжения.

Введение. Пусть вдоль кривой L в упругой плоскости произведен разрыв. Края разрыва могут быть раздвинуты, и в полученную щель внедрен материал или, наоборот, с краев щели можно срезать часть материала и берега такой щели склеить, предварительно стиснув и сдвинув их друг относительно друга. Полученные на L скачки перемещений можно задать в виде:

$$g(l) = g_1(l) + ig_2(l), \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (1)$$

где l - длина дуги кривой L , отсчитываемая от начальной точки до рассматриваемой,

$$g_1(l) = u_1^+(l) - u_1^-(l), \quad g_2(l) = v_1^+(l) - v_1^-(l), \quad (2)$$

причем $u_1^\pm$ и $v_1^\pm$ - пределы компонент смещений u_1 и v_1 вдоль произвольных ортогональных осей O_1x_1 и O_1y_1 слева (+) и справа (-) при движении вдоль линии L от ее начала.

Разрывная деформация, определяемая формулами (1), (2), называется плоской дислокацией Сомилианы [1,2].

Постановка задачи. Положим, что L - луч O_1y_1 , исходящий из точки O_1 (рис.1,а), расположенной на расстоянии H от границы полуплоскости, и составляющий угол α с положительным направлением оси Oy . Кроме того, выполнены условия:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad (3)$$

$$u_1^+ = v_1^+ = u_1^- = 0, \quad v_1^- = \beta, \quad (\beta - \text{const}).$$

Ставится задача: найти упругое равновесие полуплоскости $y \leq 0$ (см. рис. 1,а) при условиях (3).

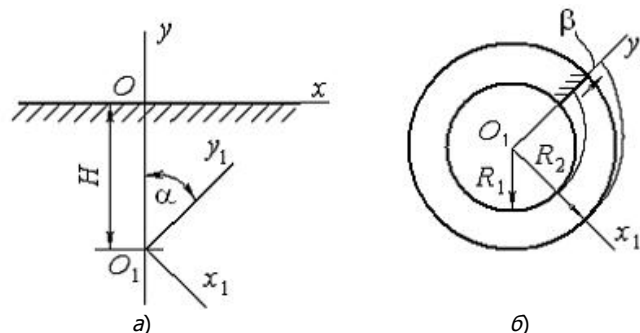


Рис.1. Дислокация Сомилианы в полуплоскости (а) и в кольцевой области (б)

Функции Мусхелишвили для бесконечной плоскости с внедренной дислокацией. Воспользуемся решением задачи для кругового кольца с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 (см. рис.1,б), в котором произведен разрез по оси O_1y_1 , и правый край разреза сдвинут относительно левого закрепленного края на величину β в направлении, указанном на рис.1,б стрелкой. После выполнения сдвига края разреза саяны, и левый край освобожден от закрепления.

Функции Мусхелишвили для указанного кольца приведены в [3]:¹

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) &= -\frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left[\frac{2z_1}{R_1^2+R_2^2}-\frac{1}{z_1}\right]; \\ \Psi(z_1) &= \frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left[\frac{1}{z_1}+\frac{2R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cdot\frac{1}{z_1^3}\right], \\ (z_1 &= x_1+iy_1),\end{aligned}\quad (4)$$

где $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, здесь E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Выполнив в формулах (4) предельные переходы при $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow \infty$, получим функции Мусхелишвили для бесконечной плоскости с внедренной по оси O_1y_1 (см. рис.1,б) дислокацией:

$$\Phi_1(z_1) = \Psi_1(z_1) = \frac{k}{z_1}, \quad (5)$$

где для краткости введено обозначение

$$k = \frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}. \quad (6)$$

Используя известные [3] формулы преобразования функций Мусхелишвили при замене прямоугольных координатных осей, записываем функции (5) в осях xOy (см. рис.1,а). Для этого совершим вначале поворот осей $x_1O_1y_1$ на угол α так, чтобы новая ось ординат приняла вертикальное положение и была направлена снизу вверх. Затем осуществим параллельный перенос осей на величину H (рис.1,а) вертикально вверх. В результате для бесконечной плоскости с дислокацией получим:

$$\Phi_2(z) = \frac{k}{(z+iH)e^{i\alpha}}, \quad \Psi_2(z) = \frac{k[(z+2iH)\cos\alpha + iz\sin\alpha]}{(z+iH)^2}, \quad (z = x+iy). \quad (7)$$

Функции Мусхелишвили для полуплоскости с дислокацией. Компоненты напряжений, соответствующие функциям (7), условимся обозначать $\tilde{X}_x, \tilde{Y}_y$ и $\tilde{X}_y$. Они связаны с функциями (7) зависимостями [3]:

$$\tilde{Y}_y + \tilde{X}_x = 2[\Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z)}]; \quad \tilde{Y}_y - \tilde{X}_x + 2i\tilde{X}_y = 2[\overline{z}\Phi_2'(z) + \Psi_2(z)], \quad (8)$$

где чертой сверху отмечаются комплексно сопряженные величины, а штрих означает операцию дифференцирования по аргументу z . Из формул (7), (8) получим поле напряжений в бесконечной плоскости с прямолинейной дислокацией типа Соммианы с ядром в точке O_1 и линией L , совпадающей с лучом O_1y_1 :

¹ В пятом издании монографии [3] формула для функции $\Psi(z_1)$ содержит досадные печатки.

² Рассматривается плоская деформация.

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_x &= \frac{k[x \cos \alpha - 3(y+H) \sin \alpha]}{x^2 + (y+H)^2} + k \cdot \frac{[x^2 + 3(y+H)^2]x \cos \alpha - [3x^2 - (y+H)^2](y+H) \sin \alpha}{[x^2 + (y+H)^2]^2}; \\
\tilde{Y}_y &= \frac{k[3x \cos \alpha - (y+H) \sin \alpha]}{x^2 + (y+H)^2} + k \cdot \frac{[3(y+H)^2 - x^2]x \cos \alpha + [3x^2 - (y+H)^2](y+H) \sin \alpha}{[x^2 + (y+H)^2]^2}; \\
\tilde{X}_y &= \frac{k[x \sin \alpha - (y+H) \cos \alpha]}{x^2 + (y+H)^2} + k \cdot \frac{[3x^2 - (y+H)^2](y+H) \cos \alpha + [x^2 - 3(y+H)^2]x \sin \alpha}{[x^2 + (y+H)^2]^2},
\end{aligned} \quad (9)$$

где параметр k по-прежнему определяется формулой (6).

Приложим теперь по оси x нормальные ($N(x)$) и касательные ($T(x)$) нагрузки, равные по величине соответственно нормальным $\tilde{Y}_y$ и касательным $\tilde{X}_y$ напряжениям на оси x , взятым с противоположными знаками. Полагая во второй и третьей из формул (9) $y=0$ и изменяя знаки, получаем:

$$\begin{aligned}
N(x) &= k \cdot \frac{H \sin \alpha - 3x \cos \alpha}{x^2 + H^2} - k \cdot \frac{(3H^2 - x^2)x \cos \alpha + (3x^2 - H^2)H \sin \alpha}{(x^2 + H^2)^2}; \\
T(x) &= k \cdot \frac{H \cos \alpha - x \sin \alpha}{x^2 + H^2} - k \cdot \frac{(3x^2 - H^2)H \cos \alpha + (x^2 - 3H^2)x \sin \alpha}{(x^2 + H^2)^2}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Следуя Л.А. Галину [4], обозначаем:

$$\omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \omega_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (z \in S^-), \quad (11)$$

где S^- означает область, расположенную ниже оси x , для всех точек которой $y < 0$.

Функции Мусхелишвили ($\Phi_3(z)$, $\Psi_3(z)$) для полуплоскости, нагруженной на границе $y=0$ усилиями (10) выражаются [3] через функции Галина (11) по формулам:

$$\Phi_3(z) = -\omega_1(z) + i\omega_2(z); \quad \Psi_3(z) = -2i\omega_2(z) + z[\omega_1'(z) - i\omega_2'(z)]. \quad (12)$$

Вычисление интегралов, представляющих функции Галина. Анализируя формулы (10), легко убедиться в том, что в интегралах типа Коши (11) функции $N(z)$ и $T(z)$ голоморфны всюду в S^- за исключением точки $z = -iH$, в которой они имеют как простой, так и двукратный полюс.

Рассмотрим, например, вычисление интеграла в первой из формул (11). Проведем в нижней полуплоскости $y \leq 0$ дугу полуокружности с центром в начале координат и радиусом $R > H$ (рис.2). Вычислим интеграл:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (13)$$

где Γ – замкнутый контур, состоящий из отрезка оси абсцисс $[-R; +R]$ и дуги полуокружности C (рис.2). Контур Γ будем обходить в положительном направлении так, чтобы ограниченная им часть области S^- при обходе Γ была расположена все время слева. На рис.2 направление обхода Γ показано стрелками.

В силу аддитивности интеграла представим формулу (13) в виде

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (14)$$

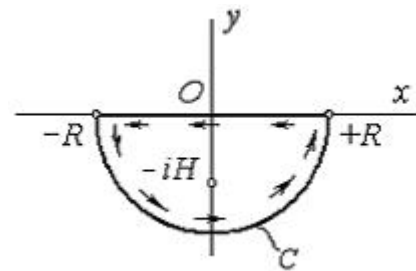


Рис. 2. Контур интегрирования

С другой стороны, по теореме вычетов [5]

$$F(z) = \sum \text{res } N(a_i), \quad (15)$$

где в правой части равенства символически записана сумма вычетов функции $N(z)$ во всех особых точках a_i области, ограниченной контуром Γ .

Приравнявая правые части равенств (14) и (15), получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{N(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \sum \text{res } N(a_i). \quad (16)$$

Используя первую из формул (10), легко убедиться в том, что при $R \rightarrow \infty$ интеграл в правой части формулы (16) стремится к нулю. Тогда, совершая указанный предельный переход в формуле (16) с учетом обозначений (11), получаем:

$$\omega_1(z) = - \sum \text{res } N(a_i). \quad (17)$$

Из формулы (17) после подсчета и суммирования вычетов получим:

$$\omega_1(z) = k \cdot \frac{(z - 2iH) \cos \alpha + H \sin \alpha}{(z - iH)^2}. \quad (18)$$

Аналогично найдем:

$$\omega_2(z) = k \cdot \frac{H \cos \alpha + z \sin \alpha}{(z - iH)^2}. \quad (19)$$

Подстановка найденных функций (18), (19) и соответствующих производных в формулы (12) дает следующие функции Мусхелишвили для полуплоскости, на границе которой приложены распределенные нагрузки (10):

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) &= k \cdot \frac{(3iH - z) \cos \alpha + i(z + iH) \sin \alpha}{(z - iH)^2}; \\ \Psi_3(z) &= k \cdot \frac{(3iHz - 2H^2 - z^2) \cos \alpha - (iz^2 + 5Hz) \sin \alpha}{(z - iH)^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Компоненты напряжений, соответствующих этим функциям, условимся снабжать верхним индексом «0». Используя формулы типа (8) и зависимости (20), находим:

$$\begin{aligned} X_x^0 &= \frac{2k \{ 2x(y - H) [(4H - y) \cos \alpha + 2x \sin \alpha] - [x^2 - (y - H)^2] [x \cos \alpha + (H + 2y) \sin \alpha] \}}{[x^2 + (y - H)^2]^2} - \\ &\quad - \frac{2ky \{ x [3(y - H)^2 - x^2] [(5H - y) \cos \alpha + x \sin \alpha] \}}{[x^2 + (y - H)^2]^3} + \\ &\quad + \frac{(y + H) [(y - H)^2 - 3x^2] [x \cos \alpha + (y + H) \sin \alpha]}{[x^2 + (y - H)^2]^3}; \\ Y_y^0 &= - \frac{2k \{ (x \cos \alpha + H \sin \alpha) [x^2 - (y - H)^2] + 2x(y - H)(y - 2H) \cos \alpha \}}{[x^2 + (y - H)^2]^2} + \\ &\quad + \frac{2ky \{ x [3(y - H)^2 - x^2] [(5H - y) \cos \alpha + x \sin \alpha] \}}{[x^2 + (y - H)^2]^3} + \\ &\quad + \frac{(y + H) [(y - H)^2 - 3x^2] [(y + H) \sin \alpha + x \cos \alpha]}{[x^2 + (y - H)^2]^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$X_y^0 = - \frac{2k \left\{ (H \cos \alpha + x \sin \alpha) [x^2 - (y-H)^2] + 2xy(y-H) \sin \alpha \right\}}{[x^2 + (y-H)^2]^2} -$$

$$- \frac{2ky \left\{ (y-H) [(y-H)^2 - 3x^2] x \sin \alpha + (5H-y) \cos \alpha \right\}}{[x^2 + (y-H)^2]^3} +$$

$$+ \frac{x [x^2 - 3(y-H)^2] x \cos \alpha + (3H+y) \sin \alpha}{[x^2 + (y-H)^2]^3}.$$

Суммированием соответствующих компонент напряжений в формулах (9) и (21) получаем решение поставленной задачи:

$$X_x = \tilde{X}_x + X_x^0; \quad Y_y = \tilde{Y}_y + Y_y^0; \quad X_y = \tilde{X}_y + X_y^0. \quad (22)$$

На рис.3 изображены эпюры максимальных ($\sigma_{\max}$) и минимальных ($\sigma_{\min}$) (в плоскости xOy (см. рис.1,а)) нормальных напряжений, рассчитанных по формуле

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{X_x + Y_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2},$$

а также эпюры нормального напряжения (σ_z), перпендикулярного плоскости xOy

$$\sigma_z = \nu(X_x + Y_y),$$

причем компоненты X_x, Y_y, X_y определены формулами (22), (9) и (21).

На рис.3 построены также эпюры эквивалентных напряжений ($\sigma_{\text{экр}}^V$) по пятой теории прочности (Мора):

$$\sigma_{\text{экр}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3,$$

где m – отношение пределов прочности при растяжении и сжатии; σ_1 и σ_3 – соответственно алгебраически большее и меньшее главное напряжение.

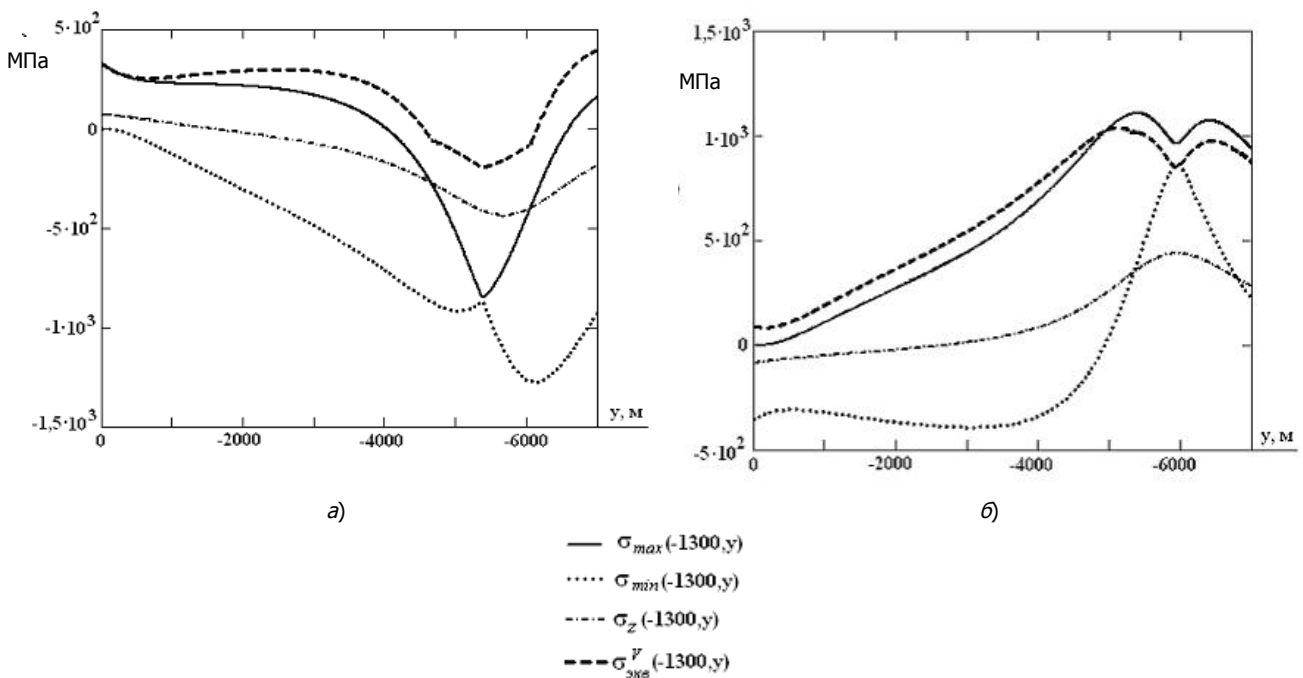


Рис.3. Эпюры напряжений на вертикали слева (а) и справа (б) от ядра дислокации

При этом фиксированные значения абсциссы x выбирались так, чтобы вертикаль $x = \text{const}$ целиком располагалась слева (см. рис.3,а) или справа (см. рис.3,б) от линии разрыва перемещений. При построении эпюр принято: $E = 2,1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,24$; $H = 5800$ м; $\beta = 700$ м; $m = 0,25$, $\alpha = \pi/15$.

Отметим следующие особенности распределения напряжений в окрестности ядра дислокации. Слева от линии разрыва (см. рис.3,а) всюду $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, за исключением некоторой окрестности ядра дислокации, в которой $\sigma_1 = \sigma_z$. Аналогично справа от линии разрыва (см. рис.3,б) $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ всюду, за исключением некоторой окрестности ядра, где $\sigma_3 = \sigma_z$.

О применимости полученных результатов к оценке тектонических напряжений. Известно [6], что одним из проявлений геодинамических процессов в земной коре является образование разрывных нарушений, называемых дизъюнктивными дислокациями. Схематически такая

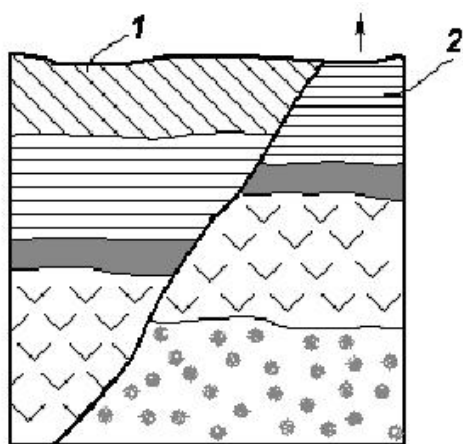


Рис.4. Схема образования дислокации взброса

дислокация показана на рис. 4, где цифрами 1 и 2 обозначены соответственно неподвижный и переместившийся блоки земной коры. Такого рода разлом в геологии называется [6] взбросом. Стрелка на рис. 4 указывает направление смещения блока 2. Напряжения, обусловленные движением земной коры, принято называть [6] тектоническими.

Если массив горных пород в окрестности дислокации принять однородным, изотропным и идеально упругим, то, очевидно, поставленная задача служит почти адекватной математической моделью горного массива с дислокацией взброса. При иных условиях ответ на вопрос о применимости найденного решения (22) к оценке тектонических напряжений в окрестности взброса может быть получен только путем сопоставления результатов натурных и численных экспериментов.

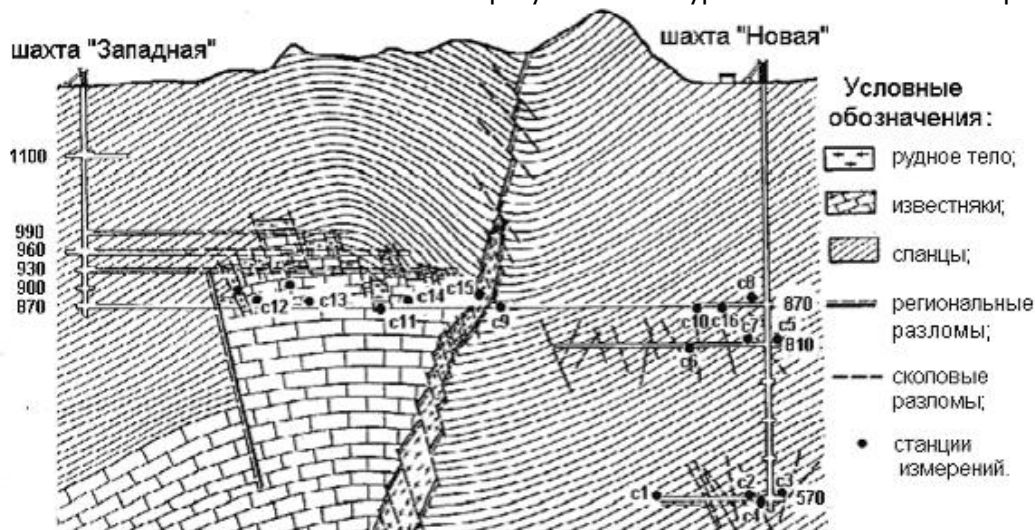


Рис.5. Геологическая схема района рудника «Кадамжай» с изображением мест расположения станций измерения напряжений на различных высотных отметках над уровнем моря

Для того чтобы выполнить указанное сопоставление, воспользуемся сведениями, изложенными в коллективном труде [7]. На рис.5 схематически изображен заимствованный из [7] разрез верхней части земной коры в зоне сурьмяного рудника «Кадамжай». На станциях измере-

ний, отмеченных на схеме, сотрудниками ВНИМИ (СПб.) и ИФМГП (Бишкек) были проведены опытные работы по исследованию напряженного состояния горных пород, вмещающих разлом, «залечивание» которого привело к образованию рудной залежи. В цитируемой работе оказались практически все сведения, необходимые для выполнения расчетов, основанных на формулах (22). Эти сведения частично уже даны выше (модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν сланцев, высота взброса β и др.) и использованы при построении эпюр напряжений (см. рис.3). Другая их часть, а также опытные и расчетные значения максимальных тектонических напряжений приведены в таблице.

Максимальные тектонические напряжения
в окрестности рудника «Кадамжай» (Центрально-Азиатский регион)

Участок, горизонт	Глубина от дневной поверхности, м	Расстояние до разлома по горизонтали, м	Максимальное нормальное тектоническое напряжение, МПа	
			измеренное	расчетное
1	2	3	4	5
Горизонт 960 м	240	200	11,3	7,9
Северный штрек, горизонт 930 м	330	25	17,1	14,2
Южный штрек, горизонт 930 м	380	10	22,0	20,0
Ствол шахты «Новая»	425	700	7,8	11,1

Как видно из столбцов 4 и 5 таблицы, совпадение расчетных и опытных значений максимальных тектонических напряжений вполне приемлемое. Кроме численных значений, имеет место также приемлемое совпадение направлений этих напряжений. Так, произведя несложные вычисления, можно найти, что, например, на горизонте 930 м в южном штреке напряжение $\sigma_{\max}$ имеет азимут 163° , тогда как опытное значение этого азимута составляет 156° [7, с.265].

Итак, в результате проведенной работы было получено замкнутое решение задачи упругого равновесия полуплоскости с внедренной в нее прямолинейной дислокацией типа Соммиери, выходящей на границу области. Решение представлено трансцендентными функциями приемлемой компактности. Указана одна из возможных областей приложения полученного решения.

Выводы. На основании сопоставления значений максимальных тектонических напряжений, найденных расчетным путем (см. таблицу, ст. 5), с результатами натурных экспериментов [7] можно сделать следующие выводы:

1) поставленная в статье задача может быть использована в качестве математической модели при оценке (в первом приближении) напряжений в окрестности определенных разновидностей тектонических разломов земной коры;

2) при использовании аналитического решения рассмотренной задачи во многих случаях может отпасть необходимость в дорогостоящих и трудоемких исследованиях напряженно-деформированного состояния горных пород методом разгрузки [7] или иными инструментальными методами.

Библиографический список

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций / Дж. Эшелби. – М.: ИЛ, 1963. – 221 с.
2. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел / Т. Екобори. – М.: Металлургия, 1971. – 264 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики: учеб. для вузов / В.И. Смирнов. – Т.3, ч.2. – М.: Наука, 1974. – 672 с.
6. Хаин В.Е. Геотектоника с основами геодинамики: учеб. для вузов / В.Е. Хаин, М.Г. Ломизе. – 3-е изд. – М.: Книжный дом «Университет», 2010. – 560 с.
7. Современная геодинамика областей внутриконтинентального коллизионного горообразования (Центральная Азия); ред. Н.П. Лавёров – М.: Научный мир, 2005. – 400 с.

Материал поступил в редакцию 22.11.10.

References

1. Eshelbi Dj. Kontinual'naya teoriya dislokatsii / Dj. Eshelbi. – M.: IL, 1963. – 221 s. – In Russian.
2. Ekobori T. Fizika i mehanika razrusheniya i prochnosti tverdyh tel / T. Ekobori. – M.: Metallurgiya, 1971. – 264 s. – In Russian.
3. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti / N.I. Mushelishvili. – M.: Nauka, 1966. – 708 s. – In Russian.
4. Galin L.A. Kontaknye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti / L.A. Galin. – M.: Nauka, 1980. – 304 s. – In Russian.
5. Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki: ucheb. dlya vuzov / V.I. Smirnov. – T.3, ch.2. – M.: Nauka, 1974. – 672 s. – In Russian.
6. Hain V.E. Geotektonika s osnovami geodinamiki: ucheb. dlya vuzov / V.E. Hain, M.G. Lomize. – 3-e izd. – M.: Kniznyi dom «Universitet», 2010. – 560 s. – In Russian.
7. Sovremennaya geodinamika oblastei vnutrikontinental'nogo kollizionnogo gorooobrazovaniia (Central'naya Aziya); red. N.P. Laverov – M.: Nauchnyi mir, 2005. – 400 s. – In Russian.

V.Y. MOLOTNIKOV, A.A. MOLOTNIKOVA

ELASTIC BALANCE OF HALF-PLANE WITH RECTILINEAR SOMILIAN DISLOCATION

Closed solution of the elasticity problem on the half-plane balance with rectilinear shift dislocation is presented. The dislocation core is assumed to lie inside the area, and the slip line - to cross the half-plane boundary. The solution applicability to the estimation of the crust stress state near disjoint dislocations is considered.

Key words: *elastic balance, plane problem, half-plane, Somilian dislocation, tectonic stress.*