УДК 539.3

ТРЕХМЕРНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

А.Д. АЗАРОВ
(Научно-исследовательский Институт механики и прикладной математики им. И.И. Воровича),
Д.А. АЗАРОВ
(Донской государственный технический университет)

Предложена трехмерная механическая модель для описания больших деформаций нелинейно-упругих тел. Модель отражает различные случаи анизотропии: ортотропный, трансверсально-изотропный, а также изотропный материалы. Рассмотрено одноосное растяжение. Изучены две характеристики нелинейного материала: аналоги модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Анализируется влияние внутренних параметров модели на характеристики материала.

Ключевые слова: *нелинейная упругость, анизотропия, математическая модель, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, одноосное растяжение.*

Введение. В теории упругости предложены многочисленные определяющие соотношения нелинейно-упругих тел для случая больших деформаций. Основные из них (Синьорини, Муни-Ривлина, Мурнагана) подробно разобраны в [1]. В их основе, как правило, лежат представления удельной потенциальной энергии деформации через инварианты тензора деформации. Ниже рассмотрен другой подход: моделирование соотношений связи «напряжение – деформация» с помощью механической конструкции.

В работе [2] была предложена двумерная математическая модель (ММ) для описания механических свойств полимерных материалов. Данная ММ имеет различные естественные возможности для развития. В настоящей статье подробно рассмотрена трехмерная ММ в упругой постановке.

Вывод соотношений новой ММ сделан на примере одноосного растяжения. Модель представлена пространственной механической (стержневой, пружинной) конструкцией с разными геометрическими (длины) и механическими (коэффициенты жесткости-упругости) характеристиками внутренних связей. При этом рассматриваются взаимозависимые свойства продольного и поперечного деформирования.

В литературе обычно большое внимание уделяется модулю упругости Юнга как основной характеристике свойств материалов. Тем не менее, несмотря на малую область изменения, коэффициент Пуассона является одинаково равноправной с модулем Юнга механической характеристикой [3]. Современные исследования [4, 5] выявили его связь с различными важными физико-механическими свойствами материалов. Определение коэффициента Пуассона напрямую из эксперимента является сложной задачей. Вычисление же его по формулам линейной теории упругости с использованием любой пары из констант материала (E и K, μ и K, E и μ) приводит к большим погрешностям, если не обращать внимание на необходимую большую точность исходных данных. Кроме того, усложняет задачу еще и то, что эксперименты проводятся на разных образцах и при разных условиях, что не может не сказаться на конечном результате [3].

Коэффициент Пуассона до сих пор не объяснен до конца с точки зрения механизма деформирования. В данной работе предложено возможное направление анализа этого механизма.

Прототипом предлагаемой модели можно считать и модель кристалла, описанную Р.Фейнманом [6]. Автор не ставил задачи анализа больших деформаций, а определил упругие постоянные кубических кристаллов через энергии взаимодействия атомов.

Основные положения модели в упругой постановке. Рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед упругой анизотропной сплошной среды с заключенной в него трехмерной механической конструкцией (рис.1). Ее узлы привязаны к центрам граней параллелепипеда. Конструкция представляет собой систему стержней (пружин), отражающих свойства связей между гранями. «Пружины-связи» данной модели считаются линейно-упругими. При этом модель является трехмерной, и особую роль в этом случае играют диагональные связи.

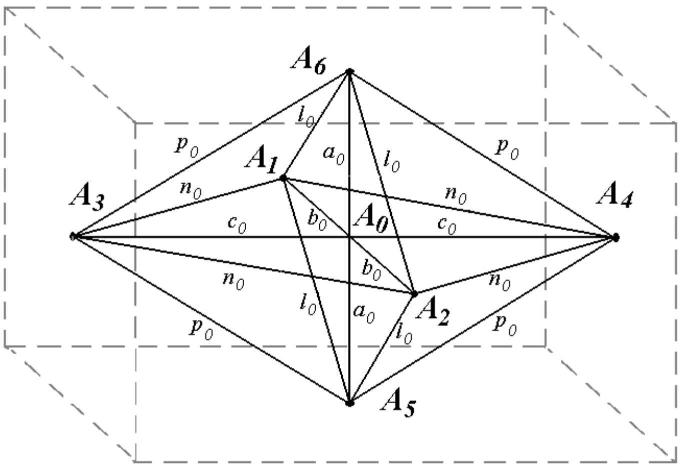

Рис. 1. Геометрия связей модели

Характеристики жесткости связей рассматриваются как некоторые интегральные оценки силовых взаимодействий общей структуры материала, но не отдельных атомов в отличие от [6]. При этом допускаются и отрицательные значения жесткостей связей, что является отражением реальных сил притяжения в структуре материала.

Если длины связей A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 не равны, то мы получим «геометрически» анизотропную модель. Если не равны коэффициенты упругости разных связей, то такую анизотропию условно назовем «механической».

Выбором различных значений геометрических и физических параметров можно придать модели сложную анизотропию. При этом количество параметров соответствует представлениям теории анизотропных сред. В общем случае анизотропного материала необходимо задать 21 параметр модели: 18 механических параметров – коэффициентов упругостей связей и 3 геометрических параметра – линейные размеры модели. Это согласуется с общими положениями анизотропной теории упругости, где вводится 21 константа упругости материала.

Уравнения модели для одноосного растяжения ортотропного тела. Рассмотрим случай растяжения «механически» и «геометрически» ортотропной модели. Обозначим длины граней элементарного прямоугольного параллелепипеда (длины связей) $A_5A_6 = 2a_0$, $A_1A_2 = 2b_0$, $A_3A_4 = 2c_0$. Диагональные связи между a_0 и b_0 обозначим l_0, между b_0 и c_0 - n_0, между a_0 и c_0 - p_0. Коэффициенты упругости связей обозначим соответственно k_a, k_b, k_c, k_l, k_n и k_p.

Рассмотрим одноосное растяжение модели силой F_a, приложенной в вершинах A_5 и A_6 вдоль связи a_0. Тогда после деформации длины связей станут соответственно A, B, C, L, N, и P, причем связи A, L и P растянутся, а B, C и N – сожмутся:

$$A = a_0 + \delta_a,\ B = b_0 - \delta_b,\ C = c_0 - \delta_c,\ L = l_0 + \delta_l,\ N = n_0 - \delta_n,\ P = p_0 + \delta_p, \quad (1)$$

где δ_a , δ_b , δ_c , δ_l , δ_n , δ_p – знакоположительные удлинения соответствующих связей.

Выпишем соотношения для длин диагональных связей в отсчетной конфигурации:

$$a_0{}^2 + b_0{}^2 = l_0{}^2 , \quad a_0{}^2 + c_0{}^2 = p_0{}^2 , \quad b_0{}^2 + c_0{}^2 = n_0{}^2 \quad (2)$$

и в актуальной конфигурации

$$A^2 + B^2 = L^2 , \quad A^2 + C^2 = P^2 , \quad B^2 + C^2 = N^2. \quad (3)$$

Учитывая (2) и подставляя (1) в выражение (3), получаем:

$$2a_0\delta_a + \delta_a{}^2 - 2b_0\delta_b + \delta_b{}^2 = 2l_0\delta_l + \delta_l{}^2 , \quad 2a_0\delta_a + \delta_a{}^2 - 2c_0\delta_c + \delta_c{}^2 = 2p_0\delta_p + \delta_p{}^2 ,$$

$$-2b_0\delta_b + \delta_b{}^2 - 2c_0\delta_c + \delta_c{}^2 = -2n_0\delta_n + \delta_n{}^2 . \quad (4)$$

Для деформированных углов (рис.2) получаем:

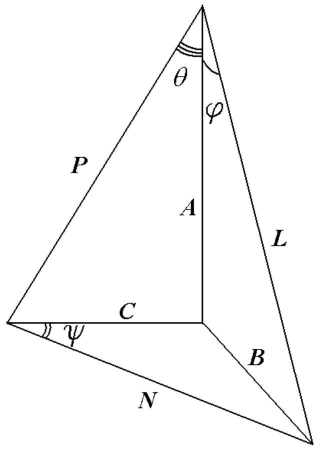

Рис. 2. Углы в актуальной конфигурации

$$\cos\varphi = \frac{A}{L} = \frac{a_0+\delta_a}{l_0+\delta_l},$$
$$\sin\varphi = \frac{B}{L} = \frac{b_0-\delta_b}{l_0+\delta_l},$$
$$\cos\psi = \frac{C}{N} = \frac{c_0-\delta_c}{n_0-\delta_n},$$
$$\sin\psi = \frac{B}{N} = \frac{b_0-\delta_b}{n_0-\delta_n},$$
$$\cos\theta = \frac{A}{P} = \frac{a_0+\delta_a}{p_0+\delta_p},$$
$$\sin\theta = \frac{C}{P} = \frac{c_0-\delta_c}{p_0+\delta_p}. \tag{5}$$

Составим уравнения статики в узлах в проекциях на три ортогональные оси (рис. 3):

$$F_a = R_a + 2R_l\cos\varphi + 2R_p\cos\theta,$$
$$-2R_p\sin\theta + 2R_n\cos\psi + R_c = 0, \tag{6}$$
$$-2R_l\sin\varphi + 2R_n\sin\psi + R_b = 0,$$

где R_i – реакция соответствующей связи.

Физический закон для каждой связи:

$$R_i = k_i\delta_i\ ,\ \ i = a,b,c,l,n,p\,. \tag{7}$$

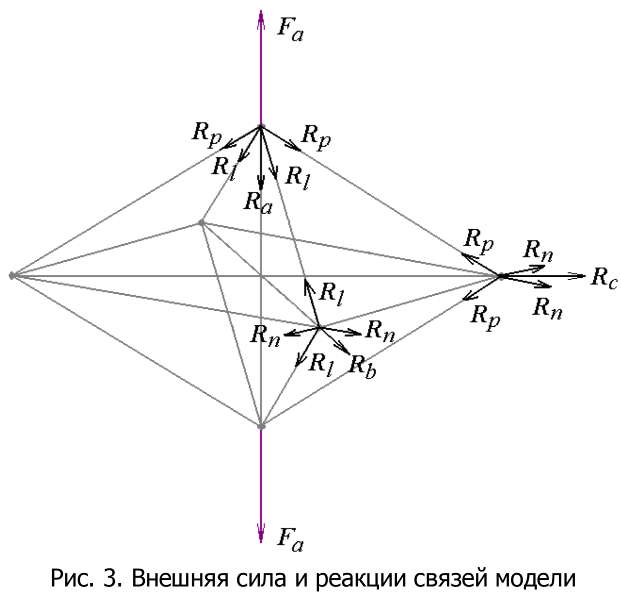

Рис. 3. Внешняя сила и реакции связей модели

Подставив в (6) выражения (5) и (7), получим нелинейные уравнения:

$$F_a = k_a\delta_a + 2k_l\delta_l\frac{a_0+\delta_a}{l_0+\delta_l} + 2k_p\delta_p\frac{a_0+\delta_a}{p_0+\delta_p}, \quad 2k_p\delta_p\frac{c_0-\delta_c}{p_0+\delta_p} - 2k_n\delta_n\frac{c_0-\delta_c}{n_0-\delta_n} - k_c\delta_c = 0,$$
$$2k_l\delta_l\frac{b_0-\delta_b}{l_0+\delta_l} - 2k_n\delta_n\frac{b_0-\delta_b}{n_0-\delta_n} - k_b\delta_b = 0\,. \tag{8}$$

Уравнения (4) и (8) образуют систему для определения неизвестных F_a , δ_a , δ_b, δ_c, δ_l, δ_n, δ_p. Эта система является математической моделью, соответствующей предложенной трехмерной механической конструкции связей.

Задавая деформацию δ_a в качестве исходной величины, из (4) и (8) можно определить функции:

$$F_a(\delta_a)\ ,\ \delta_b(\delta_a),\ \delta_c(\delta_a),\ \delta_l(\delta_a),\ \delta_n(\delta_a),\ \delta_p(\delta_a)\,.$$

Из зависимости $F_a(\delta_a)$ можно определить нелинейную характеристику, связывающую растягивающее напряжение с продольной деформацией, являющуюся аналогом модуля Юнга линейной теории упругости. Аналогично из зависимости $\delta_b(\delta_a)$ получаем нелинейную характеристику связи поперечной и продольной деформаций, являющуюся аналогом коэффициента Пуассона линейной теории упругости

Задавая силу F_a в качестве исходной величины, можно определить зависимости $\delta_a(F_a)$, $\delta_b(F_a)$, $\delta_c(F_a)$, $\delta_l(F_a)$, $\delta_n(F_a)$, $\delta_p(F_a)$ и далее характеристику, аналогичную податливости.

Таким образом можно рассмотреть одноосное растяжение модели силой F_b, приложенной в вершинах A_1 и A_2 вдоль связей b_0, и одноосное растяжение модели силой F_c, приложенной в вершинах A_3 и A_4 вдоль связей c_0. При этом структура уравнений сохраняется, меняются только индексы.

Уравнения модели для одноосного растяжения трансверсально-изотропного тела. Рассмотрим трансверсально-изотропный материал. Пусть в отсчетной конфигурации $c_0 = b_0$, тогда $p_0 = l_0$. Найдем две характеристики материала: «коэффициент Пуассона» и «модуль упругости Юнга» в зависимости от коэффициентов упругости связей геометрической модели.

Общее решение задачи. Рассмотрим одноосное растяжение материала вдоль вертикальной оси силой F_a. В этом случае формулы (1) упрощаются, длины связей в текущей конфигурации:

$$L = l_0 + \delta_l\,,\quad A = a_0 + \delta_a\,,\quad B = a_0 - \delta_b\,,\quad N = l_0 - \delta_n\,. \tag{9}$$

При одноосном растяжении сечение модели в перпендикулярной плоскости не искажает своей формы $N = B\sqrt{2}$. Это дает возможность явно определить δ_n:

$$\left.\begin{aligned} l_0 - \delta_n &= (a_0 - \delta_b)\sqrt{2} \\ l_0 &= a_0\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\quad \delta_n = \delta_b\sqrt{2}. \tag{10}$$

Кроме того, упрощается первая формула (4):

$$2l_0\delta_l + \delta_l^{\,2} = 2a_0\delta_a + \delta_a^{\,2} - 2a_0\delta_b + \delta_b^{\,2}\,. \tag{11}$$

Углы в актуальной конфигурации:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{B}{L} = \frac{a_0 - \delta_b}{l_0 + \delta_l} \qquad & \psi &= \frac{\pi}{4}\ , \\ \cos\varphi &= \frac{A}{L} = \frac{a_0 + \delta_a}{l_0 + \delta_l} \qquad & \theta &= \varphi\ , \\ tg\varphi &= \frac{B}{A} = \frac{a_0 - \delta_b}{a_0 + \delta_a}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения статики (6) с учетом трансверсальной изотропии примут вид:

$$-2k_l\delta_l\sin\varphi+\sqrt{2}k_n\delta_n+k_b\delta_b=0, \tag{13}$$

$$F_a=4k_l\delta_l\cos\varphi+k_a\delta_a. \tag{14}$$

Подставляя в выражение (13) формулы (10) и (12) после очевидных преобразований, получаем:

$$\delta_b=C_l\delta_l\ ,\ \delta_n=\sqrt{2}\ \delta_b, \tag{15}$$

где комплекс

$$C_l(\delta_l)=\frac{2k_la_0}{l_0(2k_n+k_b)+\delta_l(2k_n+k_b+2k_l)}. \tag{16}$$

Подставив соотношение (15) в (11), после преобразования приходим к уравнению относительно δ_l с учетом зависимости (16):

$$\delta_l^2(1-4k_l^2a_0^2C_l^2(\delta_l))+2a_0\delta_l(\sqrt{2}+2k_la_0C_l(\delta_l))-2a_0\delta_a-\delta_a^2=0. \tag{17}$$

Таким образом, при заданном δ_a из нелинейных соотношений (16) и (17) определяется δ_l, а далее по формулам (15) δ_b и δ_n. Формулу для усилия (14) можно преобразовать таким образом:

$$F_a=4k_l\delta_l\frac{a_0+\delta_a}{l_0+\delta_l}+k_a\delta_a. \tag{18}$$

Введем безразмерные величины: геометрические параметры приведем к начальной длине связи a_0, а механические параметры – к коэффициенту упругости этой же связи k_a. Далее под старыми обозначениями будем иметь в виду новые безразмерные величины:

$$l_0=\frac{l_0}{a_0}=\sqrt{2};\ \delta_a=\frac{\delta_a}{a_0};\ \ \delta_b=\frac{\delta_b}{a_0};\ \delta_l=\frac{\delta_l}{a_0};\ \delta_n=\frac{\delta_n}{a_0};\ k_l=\frac{k_l}{k_a};\ k_b=\frac{k_b}{k_a};\ k_n=\frac{k_n}{k_a}.$$

В такой постановке уравнения (15) - (18) принимают вид системы:

$$\begin{cases} C_l(\delta_l)=\dfrac{2k_l}{\sqrt{2}(2k_n+k_b)+\delta_l(2k_n+k_b+2k_l)} \\ \delta_l^2(1-C_l^2)+2\delta_l(\sqrt{2}+C_l)-2\delta_a-\delta_a^2=0 \\ \delta_b=C_l\delta_l \\ \delta_n=\delta_b\sqrt{2} \\ F_a=\left(\delta_a+4k_l\delta_l\dfrac{1+\delta_a}{\sqrt{2}+\delta_l}\right)k_aa_0\ . \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) нелинейная, аналитическое решение ее не представляется возможным. Тем не менее, численное решение системы в зависимости от параметра удлинения δ_a производится без особых затруднений средствами систем компьютерной математики, например, пакета MathCad.

В результате получены нелинейные зависимости: $\delta_b(\delta_a),\ \delta_l(\delta_a),\ \delta_n(\delta_a),\ F_p(\delta_a)$.

Частичная линеаризация задачи по деформациям (приближенное решение). Систему (19) можно упростить с помощью частичной линеаризации задачи по деформациям. Будем рассматривать малые деформации, когда можно пренебречь квадратами удлинений, но только в выражении (11) с учетом безразмерных соотношений: $l_0\delta_l=\delta_a-\delta_b$.

Так как $l_0 = \sqrt{2}$, то $\delta_l = \dfrac{\delta_a - \delta_b}{\sqrt{2}}$. (20)

Подставив (20) в (13) и (14), получим:

$$\begin{cases} 2k_l(\delta_a - \delta_b)\dfrac{1-\delta_b}{2+\delta_a-\delta_b} - (2k_n + k_b)\delta_b = 0 \\ F_a = (4k_l(\delta_a - \delta_b)\dfrac{1+\delta_a}{2+\delta_a-\delta_b} + \delta_a)k_a a_0 \ . \end{cases} \quad (21)$$

В отличие от (18) в этом случае продольная деформация $\delta_b(\delta_a)$ находится из квадратного уравнения, а остальные характеристики удлинений и силы $\delta_l(\delta_a)$, $\delta_n(\delta_a)$, $F_p(\delta_a)$ можно рассчитать аналитически с помощью несложных формул.

На рис.4 графики представлены при k_a=1 , k_b=1 , k_l=2 и k_n=1 для точного и приближенного решений.

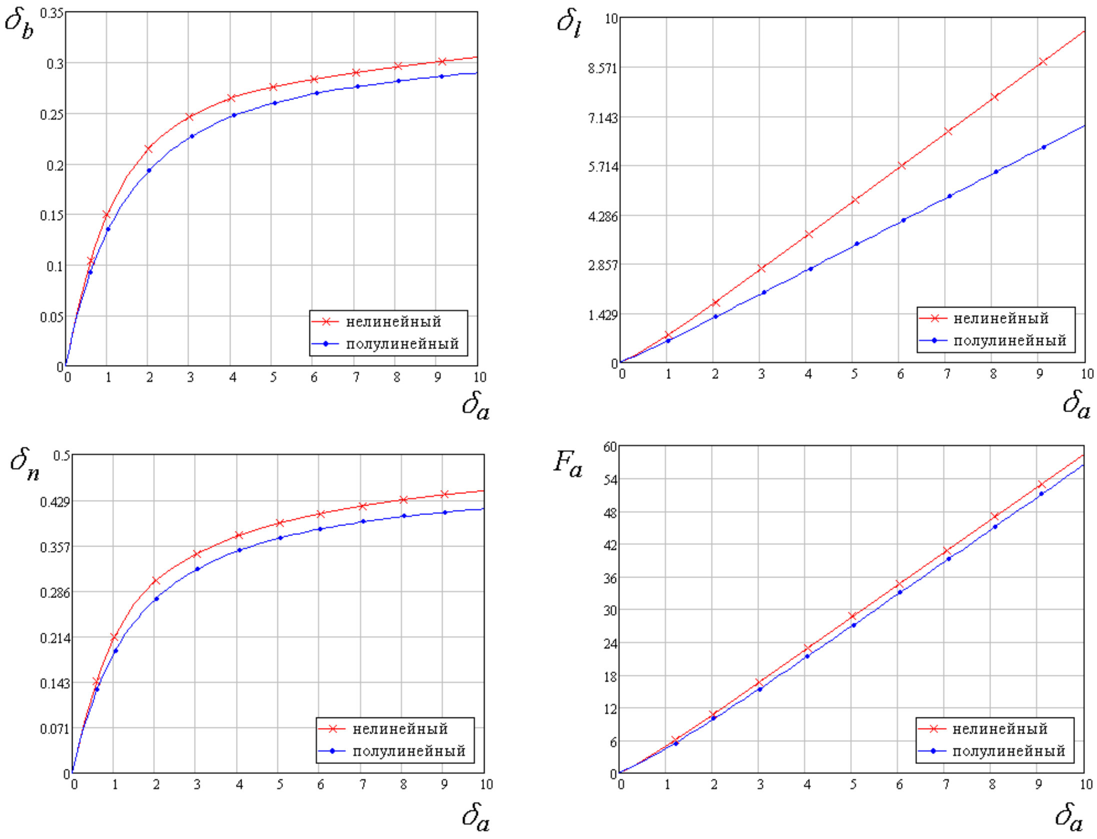

Рис. 4. Сравнение деформационных и силовых характеристик модели
для точного и приближенного решений

На рисунке видно, что наибольшая погрешность между точным (нелинейным) решением и приближенным («полулинейным») наблюдается для величины δ_l, и достигает 30 % при деформации порядка 1000 %, т.е. при десятикратном увеличении длины. При меньших деформациях порядка 10 % расхождение между нелинейным и линейным решением δ_l значительно меньше – около 3 %. Для других величин $\delta_b(\delta_a)$, $\delta_n(\delta_a)$, $F_a(\delta_a)$ расхождение даже при десятикратном удлинении не превышает 8 %.

Отметим, что параметр δ_l определяет характер влияния продольной деформации на поперечные, то есть является параметром, отвечающим за «коэффициент Пуассона» модели.

После определения зависимости силы от удлинения, поделив силу F_p на площадь поперечного сечения до деформации $S = 4a_0^{\,2}$, получаем напряжение σ, а безразмерная δ_a уже является относительной деформацией ε. Далее можно вычислить нелинейную характеристику, аналогичную линейному модулю Юнга $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$. Кроме того, из первого уравнения системы (21) можно найти нелинейную характеристику, аналогичную коэффициенту Пуассона $\nu = \dfrac{\delta_b}{\delta_a}$.

Полная линеаризация задачи (линейная задача). Получим коэффициент Пуассона и модуль Юнга в рамках линейной теории упругости при малых деформациях. Тогда $\delta_a \to 0,\ \delta_b \to 0$, и система (21) принимает вид:

$$\begin{cases} k_l(\delta_a - \delta_b) - (2k_n + k_b)\delta_b = 0 \\ F_a = \left(2k_l(\delta_a - \delta_b) + \delta_a\right)k_a a_0 \ . \end{cases}$$

Далее приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} \delta_b = \dfrac{k_l}{k_l + 2k_n + k_b}\delta_a \\ F_a = \left(1 + \dfrac{2k_l(2k_n + 1)}{k_l + 2k_n + k_b}\right)\delta_a k_a a_0 \ . \end{cases} \qquad (22)$$

Таким образом, коэффициент Пуассона трансверсально-изотропной модели в линейном случае: $\nu_{лин} = \dfrac{k_l}{k_l + 2k_n + k_b}$, а модуль Юнга в продольном направлении:

$$E_{лин} = \left(1 + \frac{2k_l(2k_n + 1)}{k_l + 2k_n + k_b}\right) \cdot k_a a_0 / S = \left(1 + 2\nu_{лин}(2k_n + 1)\right) \cdot k_a a_0 / S \cdot$$

Выбирая различные параметры модели k_b, k_l и k_n при нормировании $k_a=1$, можно добиться различных значений коэффициента Пуассона и модуля Юнга. В табл.1 приведены значения коэффициента Пуассона и модуля Юнга, полученные при вариации значений параметров модели.

Таблица 1

Влияние параметров модели на коэффициент Пуассона и модуль Юнга

	k_b	k_l	k_n	$\nu_{лин}$	$E_{лин}$
	0	0	0	0	1
Варианты k_b	1	1	1	0,250	0,625
	2	1	1	0,200	0,650
	3	1	1	0,167	0,667
	5	1	1	0,125	0,688
	10	1	1	0,077	0,712
	20	1	1	0,043	0,728
Варианты k_l	1	1,5	1	0,333	0,750
	1	2	1	0,400	0,850
	1	2,5	1	0,455	0,932
	1	3	1	0,500	1,000
	1	5	1	0,625	1,188
Варианты k_n	1	1	2	0,167	0,667
	1	1	3	0,125	0,688
	1	1	5	0,083	0,708
	1	1	10	0,045	0,727
	1	1	20	0,024	0,738

Данные значения позволяют понять роль каждого параметра модели. Как видно, коэффициент Пуассона зависит только от коэффициентов $k_l,\ k_n$ и k_b. Увеличение упругости связи k_l влечет за собой увеличение коэффициента Пуассона. Увеличение же упругости связей k_n и k_b влечет за собой уменьшение коэффициента Пуассона в обратно пропорциональной зависимости. И это понятно, ведь связи *n* и *b* препятствуют развитию деформации в перпендикулярной к направлению растяжения плоскости, уменьшая таким образом коэффициент Пуассона.

При некоторых отношениях параметров модели можно получить значения коэффициента Пуассона, бо́льшие 0,5. Это возможно для анизотропного материала, когда k_l велико по сравнению с остальными параметрами k_n и k_b.

Коэффициент Пуассона не зависит от величины коэффициентов k_i модели, а только от их отношения. Модуль Юнга, наоборот, зависит как от отношения коэффициентов, так и от величины этих коэффициентов. За размерность силы «отвечает» коэффициент k_a. Таким образом, подбирая параметры модели, можно получать разнообразные модули упругости и коэффициенты Пуассона практически существующих материалов.

Отметим, что при значениях всех жесткостей пружин равных 1 коэффициент Пуассона равен 0,25, что соответствует значению этого коэффициента, наиболее часто принимаемому в одноконстантной теории упругости.

Уравнения модели для изотропного материала. В полностью изотропном материале $a_0 = b_0 = c_0$ и $l_0 = n_0 = p_0$. «Механическая» изотропия выражается в том, что $k_a = k_b = k_c$ и $k_l = k_n = k_p$. Тогда нетрудно показать, что система уравнений (19), описывающая одноосное растяжение вдоль связей a_0, примет вид:

$$\begin{cases} C_l(\delta_l) = \dfrac{2k_l}{\sqrt{2}(2k_l+1) + \delta_l(4k_l+1)} \\ \delta_l^2(1 - C_l^2) + 2\delta_l(\sqrt{2} + C_l) - 2\delta_a - \delta_a^2 = 0 \\ \delta_b = C_l\delta_l \\ \delta_n = \delta_b\sqrt{2} \\ F_a = \left(\delta_a + 4k_l\delta_l \dfrac{1+\delta_a}{\sqrt{2}+\delta_l}\right)k_a a_0. \end{cases} \tag{23}$$

В линеаризованной форме при бесконечно малых деформациях получаем явное решение:

$$\begin{cases} \delta_b = \dfrac{k_l}{3k_l+1}\delta_a = \nu \cdot \delta_a \\ F_a = \left(1 + \dfrac{2k_l(2k_l+1)}{3k_l+1}\right) \cdot \delta_a k_a a_0 = \left(1 + 2\nu(2k_l+1)\right) \cdot \delta_a k_a a_0 . \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $\nu = \dfrac{k_l}{3k_l+1}$ является коэффициентом Пуассона. Модуль упругости Юнга $E = \left(1 + \dfrac{2k_l(2k_l+1)}{3k_l+1}\right) \cdot k_a a_0 / S = \left(1 + 2\nu(2k_l+1)\right) \cdot k_a a_0 / S$. Два размерных параметра k_a и a_0 определяют размерность модуля упругости [k_a]=Н/м, [a_0]=м, [E]=Па. В изотропном случае $a_0 = 1$.

Рассматриваемая модель представляет свойства известных линейно-упругих материалов. В табл.2 приведены значения параметров модели, соответствующие некоторым материалам. При этом выделяются две группы материалов: с коэффициентом Пуассона $0 \le \nu \le 1/3$ и $\nu > 1/3$. Интересно, что группа материалов с коэффициентами Пуассона $\nu > 1/3$ (сюда попадают, например, медь, серебро, свинец, золото) имеет повышенную пластичность, но небольшие модули Юнга [4].

Таблица 2

Значения параметров модели для разных материалов

Материал	k_l	k_a, ГН/м	ν	E, ГПа
Сталь	1,75	234	0,28	206
Стекло кварцевое	0,347	19,0	0,17	7,5
Стекло простое	1,00	112	0,25	70
Кальций	4,43	1,46	0,31	2,6
Цинк	1,42	130	0,27	100
Железо	2,23	197	0,29	205
Никель	8,00	70,7	0,32	210
Хром	4,43	167	0,31	297
Олово	33,0	3,98	0,33	45
Вольфрам	3,00	269	0,30	350
Бериллий	0,105	1005	0,08	300
Серебро	-7,00	-35,6	0,35	72
Медь	-3,36	-136	0,37	110
Золото	-1,62	-371	0,42	81
Свинец	-1,38	-119	0,44	16

При рассмотренном выше выборе значений жесткостей связей коэффициент Пуассона находится в пределах $0 \le \nu \le 1/3$ (первая группа материалов). Для описания свойств материалов второй группы ($\nu > 1/3$) имеются две возможности: задать отрицательное значение жесткости k_l (безразмерное значение $k_l \ge -1$ обеспечивает условие $0 \le \nu \le 1/2$) или выбрать различные жесткости пружин связей при растяжении и сжатии. Во втором случае $\nu = \dfrac{k_l}{k_l + 2k_n + k_b}$, и модель будет иметь больше свободных параметров. При условии $\nu \le \dfrac{1}{2}$

$$2k_l \le k_l + 2k_n + k_b \quad \Rightarrow \quad k_l \le 2k_n + k_b.$$

Для материалов с $\nu > 1/3$ (табл.2) связи модели предварительно деформированные: в размерном виде $k_a < 0,\ k_b < 0,\ k_l > 0$, а в безразмерном $k_b > 0,\ k_l < 0$.

Надо заметить, что отрицательное значение жесткости пружин k_a и k_b не является физически невозможным. Отрицательные значения k_a и k_b можно получить, например, следующим способом: к предварительно сжатым диагональным связям крепятся ненапряженные вертикальные и горизонтальные связи. После освобождения всей конструкции от удерживающих сил диагональные связи, стремясь вернуться в недеформированное состояние, разожмутся и растянут вертикальные и горизонтальные. В такой пространственной конструкции часть связей (диагональные) будут находиться в сжатом состоянии, а оставшиеся связи (вертикальные и горизонтальные) будут растянуты. Таким образом, в полученной модели до определенного момента (до возврата в недеформированное состояние) горизонтальные связи не будут оказывать сопротивления поперечному сжатию, а, наоборот, способствовать ему, что и будет соответствовать отрицательному коэффициенту жесткости пружин a_0 и b_0.

Заключение. В работе получены представления о свойствах математической модели нелинейно-упругих тел и о влиянии на них геометрических и механических параметров модели. Предложенные в статье определяющие соотношения, возможно, и сложные по виду формулы, достаточно естественны по смыслу параметров. Для разных частных задач путем последующих аппроксимаций можно получить простые аналитические зависимости.

При анализе свойств развиваемой математической модели основное внимание уделено двум нелинейным характеристикам, которым в линейной теории упругости соответствуют модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
2. Азаров А.Д. Моделирование больших деформаций полимеров / А.Д. Азаров // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. IX междунар. конф. – Ростов н/Д: ООО «ЦВВР», 2005. – Т.1. – С. 13-16.
3. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч.1. Малые деформации / Дж. Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
4. Сандитов Д.С. Коэффициент Пуассона и пластичность стекол / Д.С. Сандитов, В.В. Мантатов, Б.Д. Сандитов // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 4. – С. 150-152.
5. Сандитов Д.С. Ангармонизм колебаний решетки и поперечная деформация кристаллических и стеклообразных твердых тел / Д.С. Сандитов, В.В. Мантатов, Б.Д. Сандитов // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, вып. 5. – С. 947-951.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 7. Физика сплошных сред / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966. – 290 с.

Материал поступил в редакцию 21.21.10.

References

1. Lur'e A.I. Nelineinaya teoriya uprugosti / A.I. Lur'e. – M.: Nauka, 1970. – 940 s. – In Russian.
2. Azarov A.D. Modelirovanie bol'shih deformacii polimerov / A.D. Azarov // Sovremennye problemy mehaniki sploshnoi sredy: tr. IX mejdunar. konf. – Rostov n/D: OOO «CVVR», 2005. – T.1. – S. 13-16. – In Russian.
3. Bell D. F. Eksperimental'nye osnovy mehaniki deformiruemyh tverdyh tel. Ch.1. Malye deformacii / D. F. Bell. – M.: Nauka, 1984. – 600 s. – In Russian.
4. Sanditov D.S. Koefficient Puassona i plastichnost' stekol / D.S. Sanditov, V.V. Mantatov, B.D. Sanditov // Jurnal tehnicheskoi fiziki. – 2009. – T. 79, vyp. 4. – S. 150-152. – In Russian.
5. Sanditov D.S. Angarmonizm kolebanii reshetki i poperechnaya deformaciya kristallicheskih i stekloobraznyh tverdyh tel / D.S. Sanditov, V.V. Mantatov, B.D. Sanditov // Fizika tverdogo tela. – 2009. – T. 51, vyp. 5. – S. 947-951. – In Russian.
6. Feinman R. Feinmanovskie lekcii po fizike. – Vyp. 7. Fizika sploshnyh sred / R. Feinman, R. Leiton, M. Sends. – M.: Mir, 1966. – 290 s. – In Russian.

3D MECHANICAL MODEL FOR DESCRIPTION OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS UNDER UNIAXIAL TENSION

A.D. AZAROV
(Research Institute of Mechanics and Applied Mathematics after I.I. Vorovich),
D.A. AZAROV
(Don State Technical University)

A 3D mechanical model for description of large deformations of non-linear elastic bodies is offered. The model describes various types of anisotropy, such as orthotropic, transversely isotropic, as well as isotropic bodies. The case of uniaxial tension is considered. Two characteristics of the nonlinear material similar to the linear Young's modulus and Poisson's ratio are investigated. The inner-model parameters effecting material specifications are analyzed.

Keywords: *nonlinear elasticity, anisotropy, mathematical model, Young's modulus, Poisson's ratio, uniaxial tension.*